le T MATHÉMATIQUES

ENTRAÎNEMENT AU **BAC** ET AU **GRAND ORAL**

SPÉCIALITÉ

NOUVEAU BAC PROGRAMME 2020

COLLECTION BARBAZO

Accès libre :
Mon manuel toujours accessible en ligne sur mesmanuels.fr/4605279

Manuel numérique

Plateforme d'exercices

Ressources numériques

hachette ÉDUCATION

Mémento Python

Variables

Syntaxe	Rôle
a=12.5 ou a=b	Affecter la valeur 12,5 ou la valeur de b à la variable a.
a,b=1.4,3.14	Affecter simultanément la valeur 1,4 à a et 3,14 à b.
int(x)	Valeur de x convertie en entier (si x est un nombre décimal, le résultat renvoyé est sa troncature).
float(x)	Valeur de x convertie en flottant.
str(x)	Valeur de x convertie en chaîne de caractères.
round(x,n)	Valeur approchée de x avec une précision de n chiffres après la virgule.

Listes

Syntaxe	Rôle
L=[ ]	Affecte à L une liste vide.
L=[8,"heure",False] ou L=[[1,2], [5,7]]	Une liste peut contenir des objets différents (nombres, chaînes de caractères ou booléens) ou des listes.
L[0]	Premier objet de la liste ou objet de rang 0.
L[k]	k+1-ième objet de la liste ou objet de rang k.
len(L)	Longueur ou nombre d'objets de la liste.
L.append(objet)	Ajoute un objet en fin de liste.
L.insert(k,objet)	Insère un objet au rang k.
L.pop(k)	Renvoie l'objet de rang k et enlève cet objet de la liste.

Opérations

Syntaxe	Rôle
a+b	Somme de a et de b (si a et b sont des chaînes de caractères ou des listes, le résultat renvoyé est la concaténation de a et de b (c'est-à-dire a et b mises « bout à bout »).
a*b	Produit de a par b (si a est une chaîne de caractères ou une liste et b un entier naturel, le résultat renvoyé est une répétition de la chaîne ou de la liste a).
a**b	a exposant b.
a/b	Quotient de a par b (Le résultat renvoyé est un flottant).
a//b	Quotient de la division euclidienne de a par b (Le résultat renvoyé est un entier).
a%b	Reste de la division euclidienne de a par b (Le résultat renvoyé est un entier).

Définition d'une fonction

Syntaxe	Rôle

def nom(a1,a2) :
  Instruction(s)
  return résultat
	Une fonction est un programme qui porte un nom et qui peut utiliser plusieurs paramètres a1,a2,... (appelés arguments) ou aucun.
	L'instruction return est obligatoire. Une fonction peut-être utilisée soit dans la console soit dans une autre fonction et renvoie un résultat.

Tests et structures itératives

Syntaxe	Rôle
a==b	Teste si a est égal à b et renvoie le booléen True si a = b et False sinon.
a!=b	Teste si a est différent de b et renvoie le booléen True si a ≠ b et False sinon.
a<b (a>b)	Compare si a est strictement inférieur à b (a est strictement supérieur à b).
a<=b (a>=b)	Compare si a est inférieur ou égal à b (a est supérieur ou égal à b).
condition 1 and condition 2	Teste si les deux conditions sont vérifiées simultanément.
condition 1 or condition 2	Teste si au moins l'une des deux conditions est vérifiée.

if condition 1 :
  Instruction(s) 1
elif condition 2 :
  Instruction(s) 2
else :
  Instruction(s) 3
	Exécute la ou les Instruction(s) 1 si la condition 1 est vérifiée, sinon, teste la condition 2. Si la condition 2 est vérifiée, alors exécute la ou les Instruction(s) 2, sinon exécute la ou les Instruction(s) 3.
	Les instructions elif et else ne sont pas obligatoires.

Mémento Python

Boucles

Syntaxe	Rôle
while condition : Instruction(s)	Exécute en boucle la ou les **Instruction(s)** tant que la **condition** est vérifiée.
for variable in range(n) : Instruction(s)	Exécute **n** fois la ou les **Instruction(s)** pour **variable** allant de 0 à **n**−1 (inclus).
for variable in range(m,n) : Instruction(s)	Exécute la ou les **Instruction(s)** pour **variable** allant de **m** à **n**−1 (inclus).
for caractère in "chaîne" : Instruction(s)	Exécute la ou les **Instruction(s)** pour chaque **caractère** de chaîne.

Principales fonctions

1. Bibliothèque math (from math import ...)

Syntaxe	Rôle
pi et e	Valeurs approchées de π et du nombre **e**.
sqrt(x)	Racine carrée de **x**.
sin(x) et cos(x)	Sinus de **x** et cosinus de **x**.
exp(x) et log(x)	Exponentielle de **x** et logarithme népérien de **x**.
log(x,10)	Logarithme décimal de **x**.
isclose(a,b,rel_tol=h)	Détermine si **b** est une valeur approchée de **a** avec une précision inférieure à **h**.

2. Bibliothèque random (from random import ...)

Syntaxe	Rôle
random()	Nombre réel aléatoirement choisi dans l'intervalle [0 ; 1[.
randint(a,b)	Nombre entier aléatoirement choisi dans l'intervalle [**a** ; **b**].
uniform(a,b)	Nombre réel aléatoirement choisi dans l'intervalle [**a** ; **b**].
choice("chaîne")	Choisit aléatoirement un caractère de la chaîne.

3. Bibliothèque scipy.special (from scipy.special import binom)

Syntaxe	Rôle
binom(n,k)	Coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (dans la bibliothèque **scipy.special**

4. Bibliothèque scipy.stats (from scipy.stats import binom)

Syntaxe	Rôle
binom.pmf(k,n,p)	La probabilité $P(X = k)$ si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.
binom.cdf(k,n,p)	La probabilité $P(X \leqslant k)$ si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

Graphiques

1. Bibliothèque numpy (from numpy import ...)

Syntaxe	Rôle
linspace (a,b,n)	Une liste de **n** nombres uniformément répartie sur l'intervalle [**a** ; **b**]. Le premier nombre est **a** et le dernier **b**.

2. Bibliothèque matplotlib.pyplot (from matplotlib.pyplot import ...)

Syntaxe	Rôle
axis ([xmin,xmax,ymin,ymax])	Affiche un repère gradué de **xmin** à **xmax** sur l'axe des abscisses et de **ymin** à **ymax** sur l'axe des ordonnées.
grid()	Affiche une grille
plot(x,y)	Trace le point de coordonnées (**x** ; **y**). Si les arguments **x** et **y** sont des listes, trace et relie tous les points dont les abscisses sont les éléments de **x** et les ordonnées ceux de **y**.
scatter(x,y)	Trace un nuage de points.
show()	Montre le graphique dans une nouvelle fenêtre.

Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

1. Le calcul formel

À l'ouverture du logiciel, sélectionner Calcul formel

a. Étude d'une fonction

• Pour définir la fonction f, écrire dans la zone calcul formel **f(x) :=ln(x)-1**. Le logiciel représente alors la fonction dans la zone graphique. Cliquer droit dans cette zone et sélectionner Graphique pour régler la fenêtre d'affichage.

• Dans la zone de calcul formel, en écrivant **f(2)**, on obtient l'image de 2. En cliquant sur $=$, le logiciel renvoie une valeur exacte et sur $\approx$ une valeur approchée.

• En écrivant **f'(x),** le logiciel renvoie l'expression de la dérivée de f.

• L'instruction **Intégrale(f(x))** renvoie les primitives de f et **Intégrale(f(x),4,6)** renvoie l'intégrale $\int_4^6 f(x)\,dx$. Si l'on coche la ligne 5, le logiciel représente cette intégrale et affiche une valeur approchée.

• En tapant **Limite(f,+inf),** le logiciel renvoie la limite de f en $+\infty$.

b. Transformation d'écritures

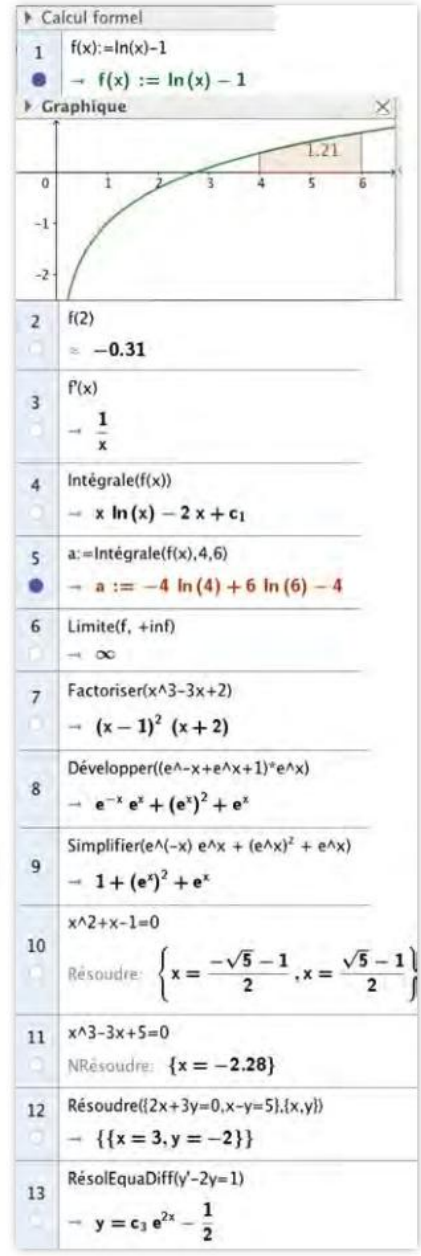
En utilisant les instructions **Factoriser**, **Développer** et **Simplifier**, le logiciel transforme les écritures des expressions algébriques.

c. Résolution d'équations

Pour résoudre une équation, il suffit d'écrire l'équation puis cliquer sur $x=$ (instruction **Résoudre**) pour obtenir les valeurs exactes et sur $x\approx$ pour obtenir les valeurs approchées (instruction **Nrésoudre**).

L'instruction **Résoudre** permet également de déterminer les solutions d'un système d'équations.

L'instruction **RésolEquaDiff** permet de résoudre une équation différentielle.

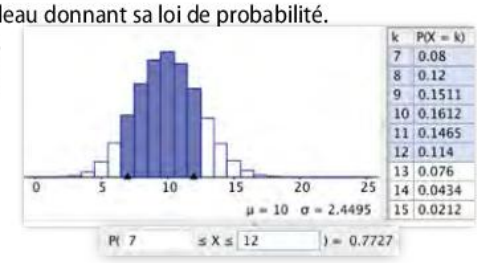


2. Les probabilités

À l'ouverture du logiciel, sélectionner Probabilités.

Selectionner dans le menu déroulant la loi binomiale Binomiale puis en précisant les valeurs de n et de p, on obtient la représentation graphique de la loi $B(n\,;p)$ et un tableau donnant sa loi de probabilité.

Pour $n=25$ et $p=0{,}4$, on obtient les résultats ci-contre et après avoir selectionné le type d'intervalle et ses bornes, le logiciel affiche la probabilité que $P(7\leqslant x\leqslant 12)$.



k	P(X = k)
7	0.08
8	0.12
9	0.1511
10	0.1612
11	0.1465
12	0.114
13	0.076
14	0.0434
15	0.0212

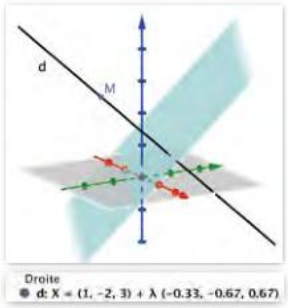
3. La géométrie dans l'espace

À l'ouverture du logiciel, sélectionner Géométrie 3D.

a. Création de points et de droites

• Dans la zone de saisie, écrire Saisie: P:x+2y-2z+1=0 pour créer le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-2z+1=0$.

• Saisir M=(1,-2,3) puis cliquer sur pour représenter la droite d perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M. Le logiciel affiche une représentation paramétrique de cette droite dans la zone *Algèbre*.

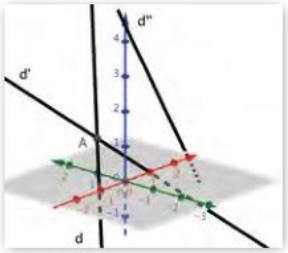


b. Intersection de droites

• Dans la zone de saisie, l'instruction d=Droite((1,2,3),(0,1,1)) permet de tracer la droite d passant par les points de coordonnées respectives (1 ; 2 ; 3) et (0 ; 1 ; 1).
Dans la zone algèbre, le logiciel affiche une représentation paramétrique de la droite d.
De même, en tapant d'=Droite((1,0,0), (0,1,1)) et d''=Droite((2,0,1),(0,-1,3)), le logiciel trace les droites d' et d''.

• Dans le menu , sélectionner Intersection puis cliquer sur deux droites pour déterminer leur éventuelle intersection.
Ainsi les droites d et d' sont sécantes en A (0 ; 1 ; 1) par contre les droites d et d'' ne sont pas sécantes (le logiciel affiche « B non défini »).

Remarque : À l'aide de l'outil , on peut tourner la figure pour mieux visualiser la situation.



c. Tracé de la section d'un cube

• Pour effacer les axes, cliquer droit sur la figure puis décocher Axes et Plan.

• Pour créer un cube, saisir A=(0,0,0) et B=(3,0,0) puis dans le menu , sélectionner . Cliquer successivement sur A et B pour afficher le cube.

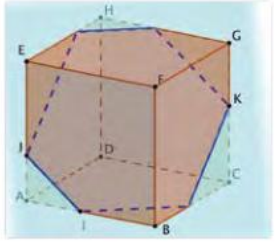
• À l'aide de l'outil , créer les points I, J et K respectivement sur les segments $[AB]$, $[AE]$ et $[CG]$.

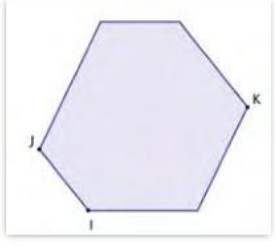
• À l'aide de l'icône créer le plan (IJK).

• Cliquer sur puis sur le cube et le plan pour obtenir la section du cube par le plan.

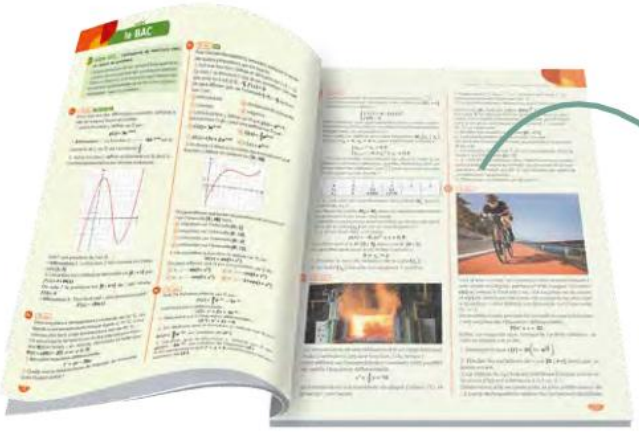
• Pour obtenir une vue 2D de la section, cliquer droit sur « poly1 » et sélectionner Créer une vue 2D de poly1. Une fenêtre s'ouvre avec la vue 2D.

Remarque : L'icône permet de déplacer la figure.



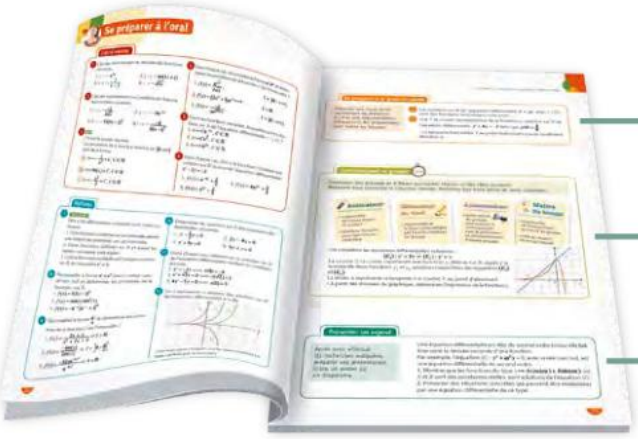


JE ME PRÉPARE POUR LE BAC



Des exercices minutés
pour m'entraîner
à l'épreuve

JE ME PRÉPARE POUR LE GRAND ORAL



J'argumente

J'interagis

Je parle en continu

JE M'ENTRAÎNE SUR LES NOTIONS DE BASE

Plateforme d'exercices
https://barbazo.reussirenmaths.fr/tle-spe

Je retrouve toutes les ressources de mon manuel sur
www.lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

le T MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ

NOUVEAU BAC
PROGRAMME 2020

COLLECTION BARBAZO

Sous la direction d'**Éric Barbazo** et **Christophe Barnet**

Martial Baheux
Nadine Billa
Aline Bouget
Michel Bourguet
Nadine Castagnos
Maïna Cigana
Amélie Daniel
Jean-Baptiste Devynck
Benoît Lafargue
Philippe Le Poezeller
Sébastien Maimaran
Anne Malibert
Corinne Ondriozola
Florence Picart
Laurent Piccinini
Sandrine Pollet
Catherine Racadot
Denis Roumilhac
Karine Sermanson
Chloé Ubéra

hachette
ÉDUCATION

Crédits photographiques

p. 10 Svetlana/Shapiro/Shutterstock ; p. 12 chrupka/Shutterstock ; p. 13 Maksim Shmeljob/Shutterstock ; p. 29 Kiev.Victor/Shutterstock ; p. 32 Tobias1900/Shutterstock ; p. 33 Dmitry Elagin/Shutterstock ; p. 37 LightField Studios/Shutterstock ; p. 40 IP3 PRESS/MAXPPP ; p. 42 REDPIXEL.PL/Shutterstock ; p. 56 hanif66/Shutterstock ; p. 59 Janelle Keys/Shutterstock ; p. 61 Kateryna Kon/Shutterstock ; p. 65 Mike Dexter/Shutterstock ; p. 66 Johann Helgason/Shutterstock ; p. 68 JackStar88/Shutterstock ; p. 70 Sasa Lalic/Shutterstock ; p. 74 Vsevolod Tarasevich/Sputnik /AFP ; p. 76 sommthink/Shutterstock ; p. 77 Kirsanov Valeriy Vladimirovich/Shutterstock ; p. 90 aslysun/Shutterstock ; p. 93 WildlifeWorld/Shutterstock ; p. 100 Nopparat Promtha/Shutterstock ; p. 103a Linnas/Shutterstock ; p. 103b Efired/Shutterstock ; p. 107 A_stockphoto/Shutterstock ; p. 108 Daniel Milchev/Getty ; p. 110 CK Bangkok Photography/Shutterstock ; p. 131 Ugis Riba/Shutterstock ; p. 135 Pixavril/Shutterstock ; p. 139 Gozzoli/Shutterstock ; p. 140 RukiMedia/Shutterstock ; p. 141 Sucharas Wongpeth/Shutterstock ; p. 143 Svedoliver/Shutterstock ; p. 144 Ortis/Shutterstock ; p. 163 Sasin Paraksa/Shutterstock ; p. 167 Kiev.Victor/Shutterstock ; p. 169 zhao jiankang/Shutterstock ; p. 171a Kemal Taner/Shutterstock ; p. 171b Charles Knowles/Shutterstock ; p. 174 Melinda Nagy/Shutterstock ; p. 177 Andrey_Popov/Shutterstock ; p. 178 SSPL/Science Museum/Leemage ; p. 181 austinding/Shutterstock ; p. 197 F8 studio/Shutterstock ; p. 200 astarot/Shutterstock ; p. 201 JRJFin/Shutterstock ; p. 205 RoxannaR/Shutterstock ; p. 208 Photo12/Alamy/Hans Blossey ; p. 210 David Rogers/GETTY IMAGES EUROPE/Getty Images/AFP ; p. 211 Kopityn Georgy/Shutterstock ; p. 226 Science Photo Library/Giphotostock ; p. 227 ESA/CNES/Arianespace -Service Op ; p. 228 Science Photo Library / King-Holmes, James ; p. 229 iravgustin/Shutterstock ; p. 232 ungvar/Shutterstock ; p. 233 angellodeco/Shutterstock ; p. 234 chrisbrignell/Shutterstock ; p. 235 Brook Robinson/Shutterstock ; p. 237a sezer66/Shutterstock ; p. 237b TORWAISTUDIO/Shutterstock ; p. 242 Hung Chung Chih/Shutterstock ; p. 257a Bridgeman Images/Leemage ; p. 257b SSPL/Leemage ; p. 263 Ander5/Shutterstock ; p. 264 Photomontage/Shutterstock ; p. 267 DeAgostini/Leemage ; p. 268a ermess/Shutterstock ; p. 268b Photoagriculture/Shutterstock ; p. 271 Den Rozhnovsky/Shutterstock ; p. 272 gresei/Shutterstock ; p. 274 Rawpixel.com/Shutterstock ; p. 290 Pack-Shot/Shutterstock ; p. 292 d13/Shutterstock ; p. 293 wavebreakmedia/Shutterstock ; p. 294 Stephen Clarke/Shutterstock ; p. 296 Rost9/Shutterstock ; p. 297 NeydtStock/Shuttertock ; p. 299 jorrisg/Shutterstock ; p. 300a haveseen:Shutterstock ; p. 300b ©Gallimard ; p. 302 New Africa/Shutterstock ; p. 303 Alfred Wekelo/Shutterstock ; p. 305 The Toidi/Shutterstock ; p. 306 Sonandonures/Shutterstock ; p. 308 ARTHUS-BERTRAND Yann/hemis.fr ; p. 325 ARCHITECTE BJARKE INGELS J-B NADEAU/ONLY France/AFP ; p. 334 Luciana Rinaldi/Shutterstock ; p. 335 Bertold Werkmann/Shutterstock ; p. 339 Wikipedia ; p. 340 Ramunas Bruzas/Shutterstock ; p. 343 Pixel-Shot/Shutterstock ; p. 367 Rawpixel.com/Shutterstock ; p. 368 Bianchetti/Leemage ; p. 369 muratart/Shutterstock ; p. 374 nikolpetr/Shutterstock ; p. 376 Yves Talensac/Photononstop ; p. 397 Choksawatdikorn/Shutterstock ; p. 401 Ruslan Ivantsov/Shutterstock ; p. 403 Elena Elisseeva/Shutterstock ; p. 404 Photo reproduite avec l'aimable autorisation de Physlab ; p. 406 Alexander Raths/Shutterstock ; p. 417 Sergey Furtaev/Shutterstock ; p. 419 NIKCOA/Shutterstock ; p. 422 Bertl123/Shutterstock ; p. 423 david djordjevic studio ; p. 423 PhotoStock10/Shutterstock ; p. 424 GreenArt/Shutterstock ; p. 425 goofyfoottaka/Shutterstock ; p. 426 Ivan Smuk/Shutterstock ; p. 427 Pressmaster/Shutterstock ; p. 428 Jacques Tarnero/Shutterstock ; p. 429 Lucky Business/Shutterstock ; p. 431 Firat Cetin/Shutterstock ; p. 433 James Steidl/Shutterstock ; p. 434 Andrey Armyagov/Shutterstock ; p. 452 Dmitry Kalinovsky/Shutterstock ; p. 453 Danièle Schneider/Photononstop ; p. 454 chaechaebyv/Shutterstock ; p. 457a Sergey Ryzhov/Shutterstock ; p. 457b Eric Guilloret/Naturagency ; p. 460a Viktor Fedorenko/Shutterstock ; p. 460b Viktor1/Shutterstock ; p. 461a Gilles ROLLE/REA ; p. 461b yongheng19962008/Shutterstock ; p. 462 DR.

Les copies d'écran sont issues des logiciels Excel, GeoGebra, de l'environnement EduPython et de l'émulateur NumWorks.
Merci aux sociétés Casio et Texas Instruments pour la fourniture d'émulateurs de calculatrices.

Nous remercions tous les enseignants qui ont bien voulu contribuer à la conception de cet ouvrage et, en particulier, pour leurs précieux conseils et suggestions, **Frédérique Feibel** (lycée Jean Monnet – Joué-lès-Tours) et **Olivier Véziant**.

Mise en pages et schémas : Soft Office
Maquette intérieure : Anne-Danielle Naname
Maquette de couverture : Guylaine Moi
Recherche iconographique : Candice Renault
Illustrations : Pascal Baltzer
Édition : Frédéric Gomariz, Alexandre Bertin

PAPIER À BASE DE FIBRES CERTIFIÉES

hachette s'engage pour l'environnement en réduisant l'empreinte carbone de ses livres. Celle de cet exemplaire est de : 2100 g éq. CO_2 Rendez-vous sur www.hachette-durable.fr

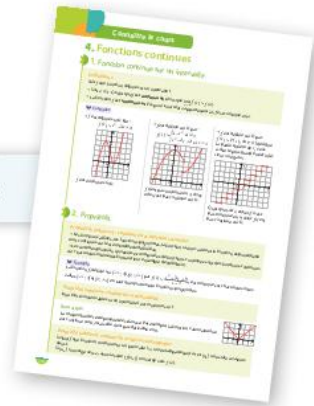
www.hachette-education.com
© Hachette Livre 2020, 58 rue Jean Bleuzen, 92178 Vanves
ISBN : 978-2-01-786619-0
ISBN à utiliser pour toute commande de l'ouvrage

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisations collective » et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de droit de copie (20, rue des Grands-Augustins – 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par l'article L335-2 du Code de la propriété intellectuelle.

Votre manuel vous accompagne dans l'apprentissage des mathématiques et la préparation aux épreuves du Bac

Une mise en perspective historique en ouverture de chapitre

Un cours clair et structuré



Des pages pour apprendre à raisonner et à démontrer

Comprendre une démonstration

```
def nombre_dérivé_approché(a):
    h=1e-10
    return(f(a+h)-f(a))/h

def méthode_Newton(n):
    x=1
    for i in range(n):
        x=x-...
    return ...
```

De nombreux TP et exercices sur l'algo et la programmation en Python, sur tableur ou logiciel de géométrie dynamique

Des entraînements à la prise de parole pour le Grand oral

Se préparer à l'oral

La mise en évidence des 6 compétences du programme dans les exercices

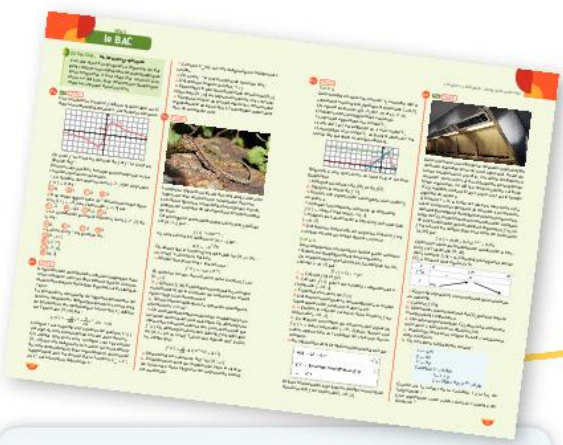
Raisonner · Calculer · Communiquer · Chercher · Représenter · Modéliser

+ D'ENTRAÎNEMENT SUR LA PLATEFORME D'EXERCICES

https://barbazo.reussirenmaths.fr/tle-spe

Approfondissement AP

De nombreuses possibilités de différenciation et d'approfondissement



Des exercices chronométrés pour se préparer à l'épreuve écrite du Bac

Sommaire

Grand oral et épreuve écrite du Bac 6

Analyse

Chapitre 1 **Suites numériques et récurrence** 10
1. Raisonnement par récurrence 14
2. Comportement global d'une suite 16
Démonstrations et raisonnements 18
Travaux pratiques 22
Se préparer à l'oral 24
Exercices 26
Vers le Bac 36

Chapitre 2 **Limites de suites** 40
1. Définition des limites 44
2. Limites et opérations 46
3. Limites et comparaison 48
4. Suites géométriques, suites monotones 50
Démonstrations et raisonnements 52
Travaux pratiques 56
Se préparer à l'oral 58
Exercices 60
Vers le Bac 70

Chapitre 3 **Limites de fonctions** 74
1. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ 78
2. Limite en un réel a 80
3. Limites et opérations 82
4. Limites et comparaison 84
Démonstrations et raisonnements 86
Travaux pratiques 90
Se préparer à l'oral 92
Exercices 94
Vers le Bac 104

Chapitre 4 **Dérivation, convexité et continuité** 108
1. Compléments de dérivation 112
2. Convexité : approche graphique 114
3. Convexité des fonctions dérivables 116
4. Fonctions continues 118
5. Théorème des valeurs intermédiaires 120
Démonstrations et raisonnements 122
Travaux pratiques 126
Se préparer à l'oral 128
Exercices 130
Vers le Bac 140

Chapitre 5 **Fonctions trigonométriques** 144
1. Fonctions cosinus et sinus 148
2. Variations des fonctions trigonométriques 150
3. Équations et inéquations sur $[-\pi ; \pi]$ avec le cosinus 152
4. Équations et inéquations sur $[-\pi ; \pi]$ avec le sinus 154
Démonstrations et raisonnements 156
Travaux pratiques 160
Se préparer à l'oral 162
Exercices 164
Exercices de synthèse 174

Chapitre 6 **Fonction logarithme** 178
1. Fonction logarithme népérien 182
2. Variations et limites de la fonction ln 184
Démonstrations et raisonnements 186
Travaux pratiques 190
Se préparer à l'oral 192
Exercices 194
Vers le Bac 204

Chapitre 7 **Primitives, équations différentielles** 208
1. Équation différentielle $y' = f$ et primitive 212
2. Primitives et opérations 214
3. Équations différentielles 216
Démonstrations et raisonnements 218
Travaux pratiques 222
Se préparer à l'oral 224
Exercices 226
Vers le Bac 236

Chapitre 8 **Calcul intégral** 240
1. Intégrale d'une fonction continue et positive 244
2. Intégrale d'une fonction continue 246
3. Applications du calcul intégral 248
Démonstrations et raisonnements 250
Travaux pratiques 254
Se préparer à l'oral 256
Exercices 258
Exercices de synthèse 268

Algèbre et géométrie

Chapitre 9 Combinatoire et dénombrement 272
1. Principes additif et multiplicatif 276
2. k-uplets d'un ensemble fini 278
3. Parties d'un ensemble et combinaisons 280
4. Propriétés des combinaisons 282
Démonstrations et raisonnements 284
Travaux pratiques 288
Se préparer à l'oral 290
Exercices 292
Vers le Bac 302

Chapitre 10 Vecteurs, droites et plans de l'espace 306
1. Vecteurs de l'espace 310
2. Droites et plans de l'espace 312
3. Positions relatives de droites et de plans 314
4. Repères de l'espace 316
Démonstrations et raisonnements 318
Travaux pratiques 322
Se préparer à l'oral 324
Exercices 326
Vers le Bac 336

Chapitre 11 Orthogonalité et distances dans l'espace 340
1. Produit scalaire dans l'espace 344
2. Orthogonalité dans l'espace 346
3. Vecteur normal, projeté orthogonal 348
4. Calculs de distances 350
Démonstrations et raisonnements 352
Travaux pratiques 356
Se préparer à l'oral 358
Exercices 360
Vers le Bac 370

Chapitre 12 Représentations paramétriques et équations cartésiennes 374
1. Représentations paramétriques de droites 378
2. Équations cartésiennes de plans 380
Démonstrations et raisonnements 382
Travaux pratiques 386
Se préparer à l'oral 388
Exercices 390
Vers le Bac 400

Probabilités

Chapitre 13 Loi binomiale 404
1. Succession d'épreuves indépendantes 408
2. Schéma de Bernoulli et loi binomiale 410
Démonstrations et raisonnements 412
Travaux pratiques 416
Se préparer à l'oral 418
Exercices 420
Vers le Bac 430

Chapitre 14 Loi des grands nombres 434
1. Transformations de variables aléatoires 438
2. Inégalités de concentration 440
3. Loi des grands nombres 442
Démonstrations et raisonnements 444
Travaux pratiques 448
Se préparer à l'oral 450
Exercices 452
Vers le Bac 460
Exercices de synthèse 461

Utilisation des calculatrices
TI-83 Premium CE 464
Casio Graph 90+E 467
NumWorks 470

Corrigés des exercices 473
Les exercices corrigés sont signalés par une puce verte 2

Programme de Terminale 489

Index 496

Rabats
- Mémento Python
- Utilisation de Python avec une calculatrice
- Utilisation du tableur
- Utilisation d'un logiciel de géométrie

Les démonstrations signalées par DÉMO en ligne sont présentes sur le site de la collection.

Grand oral

Définition et objectifs

Épreuve orale
Durée : 20 minutes
Préparation : 20 minutes
Coefficient : 10
L'épreuve orale terminale est l'une des cinq épreuves terminales de l'examen du baccalauréat.
(…)

Finalité de l'épreuve

L'épreuve permet au candidat de montrer sa capacité à prendre la parole en public de façon claire et convaincante. Elle lui permet aussi de mettre les savoirs qu'il a acquis, particulièrement dans ses enseignements de spécialité, au service d'une argumentation, et de montrer comment ces savoirs ont nourri son projet de poursuite d'études, voire son projet professionnel.

Évaluation de l'épreuve

L'épreuve est notée sur 20 points.
Le jury valorise la solidité des connaissances du candidat, sa capacité à argumenter et à relier les savoirs, son esprit critique, la précision de son expression, la clarté de son propos, son engagement dans sa parole, sa force de conviction. Il peut s'appuyer sur la grille indicative de l'annexe 1.

Format et déroulement de l'épreuve

L'épreuve, d'une durée totale de 20 minutes, se déroule en trois temps :

Premier temps : présentation d'une question (5 minutes)

Au début de l'épreuve, le candidat présente au jury deux questions.
Ces questions portent sur les deux enseignements de spécialité soit pris isolément, soit abordés de manière transversale. Elles mettent en lumière un des grands enjeux du ou des programmes de ces enseignements. Elles sont adossées à tout ou partie du programme du cycle terminal. Pour les candidats scolarisés, elles ont été élaborées et préparées par le candidat avec ses professeurs et, s'il le souhaite, avec d'autres élèves.
Les questions sont transmises au jury, par le candidat, sur une feuille signée par les professeurs des enseignements de spécialité du candidat et portant le cachet de son établissement d'origine.
Le jury choisit une des deux questions. Le candidat dispose de 20 minutes de préparation pour mettre en ordre ses idées et réaliser, s'il le souhaite, un support qu'il remettra au jury sur une feuille qui lui est fournie. Ce support ne fait pas l'objet d'une évaluation. L'exposé du candidat se fait sans note.
Le candidat explique pourquoi il a choisi de préparer cette question pendant sa formation, puis il la développe et y répond.
Le jury évalue les capacités argumentatives et les qualités oratoires du candidat.

Deuxième temps : échange avec le candidat **(10 minutes)**

Le jury interroge ensuite le candidat pour l'amener à préciser et à approfondir sa pensée. Il peut interroger le candidat sur toute partie du programme du cycle terminal de ses enseignements de spécialité et évaluer ainsi la solidité des connaissances et les capacités argumentatives du candidat.

Troisième temps : échange sur le projet d'orientation du candidat **(5 minutes)**

Le candidat explique en quoi la question traitée éclaire son projet de poursuite d'études, voire son projet professionnel. Il expose les différentes étapes de la maturation de son projet (rencontres, engagements, stages, mobilité internationale, intérêt pour les enseignements communs, choix de ses spécialités, etc.) et la manière dont il souhaite le mener après le baccalauréat.

Le jury mesure la capacité du candidat à conduire et exprimer une réflexion personnelle témoignant de sa curiosité intellectuelle et de son aptitude à exprimer ses motivations.

Le candidat effectue sa présentation du premier temps debout, sauf aménagements pour les candidats à besoins spécifiques. Pour les deuxième et troisième temps de l'épreuve, le candidat est assis ou debout selon son choix.

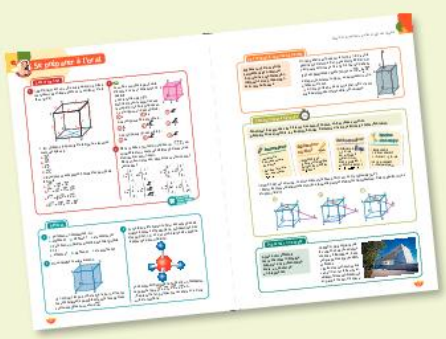
(…)

Composition du jury

Le jury est composé de deux professeurs de disciplines différentes, dont l'un représente l'un des deux enseignements de spécialité du candidat et l'autre représente l'autre enseignement de spécialité ou l'un des enseignements communs, ou est professeur-documentaliste.

Les pages Se préparer à l'oral

de ce manuel donnent la possibilité de s'entraîner à la prise de parole devant un jury ou un public, qui peut être les élèves de la classe par exemple.



Se préparer à la prise de parole

Pour dire les mathématiques à voix haute, pour argumenter…

Présenter un exposé

Pour s'entraîner à parler en continu, introduire et conclure un exposé, ménager des transitions, poser sa voix, capter l'attention…

Communiquer en groupe

Pour élaborer une problématique, apprendre à réagir aux questions, à écouter, à reformuler, à argumenter et contre-argumenter…

Grille d'évaluation indicative de l'épreuve orale terminale (annexe 1)

	Qualité orale de l'épreuve	Qualité de la prise de parole en continu	Qualité des connaissances	Qualité de l'interaction	Qualité et construction de l'argumentation
très insuffisant	Difficilement audible sur l'ensemble de la prestation. Le candidat ne parvient pas à capter l'attention.	Enoncés courts, ponctués de pauses et de faux démarrages ou énoncés longs à la syntaxe mal maîtrisée.	Connaissances imprécises, incapacité à répondre aux questions, même avec une aide et des relances.	Réponses courtes ou rares. La communication repose principalement sur l'évaluateur.	Pas de compréhension du sujet, discours non argumenté et décousu.
insuffisant	La voix devient plus audible et intelligible au fil de l'épreuve mais demeure monocorde. Vocabulaire limité ou approximatif.	Discours assez clair mais vocabulaire limité et énoncés schématiques.	Connaissances réelles, mais difficulté à les mobiliser en situation à l'occasion des questions du jury.	L'entretien permet une amorce d'échange. L'interaction reste limitée.	Début de démonstration mais raisonnement lacunaire. Discours insuffisamment structuré.
satisfaisant	Quelques variations dans l'utilisation de la voix ; prise de parole affirmée. Il utilise un lexique adapté. Le candidat parvient à susciter l'intérêt.	Discours articulé et pertinent, énoncés bien construits.	Connaissances précises, une capacité à les mobiliser en réponses aux questions du jury avec éventuellement quelques relances.	Répond, contribue, réagit. Se reprend, reformule en s'aidant des propositions du jury.	Démonstration construite et appuyée sur des arguments précis et pertinents.
très satisfaisant	La voix soutient efficacement le discours. Qualités prosodiques marquées (débit, fluidité, variations et nuances pertinentes, etc.). Le candidat est pleinement engagé dans sa parole. Il utilise un vocabulaire riche et précis.	Discours fluide, efficace, tirant pleinement profit du temps et développant ses propositions.	Connaissances maîtrisées, les réponses aux questions du jury témoignent d'une capacité à mobiliser ces connaissances à bon escient et à les exposer clairement.	S'engage dans sa parole, réagit de façon pertinente. Prend l'initiative dans l'échange. Exploite judicieusement les éléments fournis par la situation d'interaction.	Maîtrise des enjeux du sujet, capacité à conduire et exprimer une argumentation personnelle, bien construite et raisonnée.

Épreuve de l'enseignement de spécialité

Cette note de service définit l'épreuve de l'enseignement de spécialité mathématiques de la classe de terminale de la voie générale, applicable à compter de la session 2021 du baccalauréat.

Épreuve écrite

Durée : 4 heures

Objectifs

L'épreuve porte sur le programme de la spécialité mathématiques de la classe de terminale. Elle est destinée à évaluer également la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme de spécialité mathématiques de la classe de première (…).

Structure

Le sujet comporte de trois à cinq exercices indépendants les uns des autres, qui permettent d'évaluer les connaissances et compétences des candidats. Le sujet aborde une grande variété des contenus du programme de spécialité, **à l'exception des sections suivantes** du programme de spécialité de terminale :

- fonctions sinus et cosinus ;
- calcul intégral ;
- concentration, loi des grands nombres.

De plus, la section Combinatoire et dénombrement du programme de spécialité de terminale est mobilisable mais ne peut constituer le ressort essentiel d'un exercice.

Le sujet précise si l'usage de la calculatrice, dans les conditions précisées par les textes en vigueur, est autorisé.

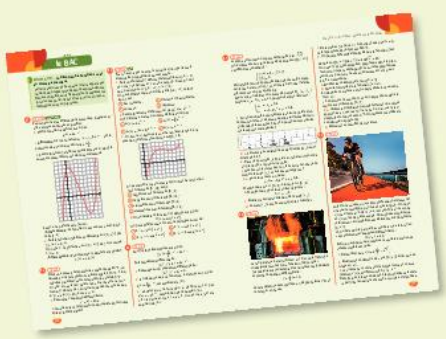
Notation

La note globale de l'épreuve est donnée sur 20 points. Chaque exercice est noté sur 4 à 8 points.

Les contenus exclus de l'évaluation lors de l'épreuve correspondent dans ce manuel aux chapitres 5, 8 et à une partie du chapitre 14.

Les pages « Vers le bac » sont alors remplacées par des pages d'« exercices de synthèse ».

Les pages VERS le BAC de ce manuel permettent de s'entraîner à l'épreuve écrite du baccalauréat en proposant des exercices chronométrés.



CHAPITRE

1 Suites numériques et récurrence

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Un raisonnement pour démontrer avec les entiers

Al-Karaji

Al-Karaji est un mathématicien et ingénieur d'origine persane du x^{e} siècle, principalement installé à Bagdad (actuel Irak). On connaît peu de choses de sa vie, mais on sait qu'il est l'auteur de traités d'algèbre et de géométrie, ainsi que de travaux d'hydrologie. Ses talents en algèbre lui valent le surnom de « calculateur ». Il est l'un des premiers à utiliser implicitement le raisonnement dit « par récurrence », qui sera formalisé des siècles plus tard par l'Italien Giuseppe Peano et le Français Blaise Pascal.

Dans *Le Fakhri*, écrit vers l'an 1000, Al-Karaji propose une une démonstration de la somme des cubes des entiers de 1 à 10 qui utilise implicitement le raisonnement par récurrence.

Il démontre que :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3=(1+2+3+\ldots+10)^2$$

Au préalable, en faisant intervenir géométrie et algèbre, il démontre l'égalité $2n\dfrac{n(n-1)}{2}+n^2=n^3$ (*) et rappelle que $1+2+3+\ldots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ (**).

Voici sa démonstration.

$$\begin{aligned}(1+2+3+\ldots+10)^2&=[(1+2+3+\ldots+9)+10]^2\\&=(1+2+3+\ldots+9)^2\\&\quad+2\times(1+2+3+\ldots+9)\times10+10^2\\&=(1+2+3+\ldots+9)^2+10^3\text{, d'après (*) et (**).}\\&=(1+2+3+\ldots+8)^2+9^3+10^3\\&=(1+2+3+\ldots+7)^2+8^3+9^3+10^3\\&=\ldots\\&=1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3\end{aligned}$$

Selon vous, après lecture de la démonstration d'Al-Karaji et d'éventuelles recherches, en quoi consiste le raisonnement par récurrence ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Calcul de termes

La suite (u_n) est définie par la formule explicite $u_n = 5 + \sqrt{n}$ pour tout entier naturel n.

La suite (v_n) est définie par son premier terme $v_0 = 16$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = 5 + \sqrt{v_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer à la main u_0, u_1, v_1 et v_2.
2. Déterminer, à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, les dix premiers termes de chacune des deux suites.
3. Écrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer le terme de rang n de la suite (v_n).

2 Suites particulières

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 48$ et de raison -5.

a. Donner la relation de récurrence vérifiée par (u_n), puis la formule explicite de (u_n).

b. Calculer u_5.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Reprendre la question 1 en considérant cette fois la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_1 = -2$ et de raison 3.

3 Obtenir une formule explicite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -2u_n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

4 Sens de variation

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = 2n^2 - 3n$.

- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5 Variations et fonctions

Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes définies et dérivables sur l'intervalle I.

1. $h(x) = 0{,}2x^2 + x - 3$ sur $I = [0\,;+\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ sur $I =]-1\,;+\infty[$.
3. $k(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $I =]-1\,;+\infty[$.
4. $l(x) = (x+3)\sqrt{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.

6 Variations et suites

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous.

1. Pour tout entier naturel n :
$$u_n = 0{,}2n^2 + n - 3.$$
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3}{n+1}$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
4. $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = u_n - 2n - 5.$$
5. $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = u_n + n^2.$$

7 Suite définie par un algorithme

On considère la suite (u_n), définie par la fonction Python suivante.

```
def terme_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=5*u-1
    return u
```

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

8 Multiples

1. Déterminer quatre multiples de 3.
2. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $(3n+1)^2 - 7$ est un multiple de 3.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Discuter un raisonnement

Objectif Introduire le raisonnement par récurrence.

1 Le professeur de mathématiques propose à ses élèves l'exercice suivant.
« Trouver, dans la suite de nombres ci-dessous, le terme correspondant au point d'interrogation :

$$2\,;5\,;11\,;23\,;47\,;?\,»$$

Les élèves proposent 95. Que peut-on penser de cette réponse ?

2 Le professeur de mathématiques propose maintenant à ses élèves le raisonnement suivant.
« Je prends l'avion et j'atterris dans un pays inconnu. À ma descente de l'avion, je rencontre un chat noir. Cinq minutes après, je rencontre un deuxième chat noir. Quelque temps encore après, je rencontre un troisième chat noir, puis je croise un quatrième chat encore noir. Ma conclusion est que, dans ce pays, tous les chats sont noirs. »
Que peut-on penser de ce raisonnement ?

3 Enfin, le professeur de mathématiques propose l'exercice suivant.
« Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n.\,»$$

Quel lien peut-on faire avec les questions **1** et **2** ?

Situation 2 Étudier une propriété qui dépend d'un entier naturel

Objectif Mettre en place le raisonnement par récurrence.

On considère la somme des n premiers entiers impairs :

$$S_n = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1), \text{ avec } n \geqslant 1.$$

A. Une idée du résultat

1 Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.

2 Conjecturer une expression simple de S_n en fonction de n.
À ce stade, cette expression est-elle certaine pour tout entier $n \geqslant 1$?

B. Une démonstration

On se propose de démontrer que $S_n = n^2$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (Q).

1 Calculer S_5, S_6 et S_7. Cela suffit-il pour démontrer la formule (Q) ?

2 **a.** Montrer que la formule (Q) est vraie pour $n = 1$.
Cette phase du raisonnement est la phase d'**initialisation.**

b. On considère un entier quelconque $k \geqslant 1$. On suppose que (Q) est vraie pour cet entier k.
On admet donc, pour le moment, que $S_k = k^2$.
Que vaut alors S_{k+1} ? Quelle implication vient-on de démontrer pour tout entier $k \geqslant 1$?
Cette phase du raisonnement s'appelle l'**hérédité.**

c. À l'aide de la question **2.b**, justifier la chaîne d'implications suivante.
$S_1 = 1^2$ implique $S_2 = 2^2$ implique $S_3 = 3^2$ implique $S_4 = 4^2$ implique … implique $S_{n-1} = (n-1)^2$ implique $S_n = n^2$.

d. La réponse à la question **2.a** prouvant que $S_1 = 1^2$, que peut-on alors déduire pour la dernière égalité de la chaîne d'implications précédente ?
Cette phase du raisonnement permet la **conclusion.**

Situation 3 Analyse critique d'un résultat

Objectif
Montrer l'importance de l'initialisation.

On présente ci-dessous le raisonnement d'un élève.

> Je veux démontrer que 2^n est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.
> On note $P(n)$ la propriété : 2^n est un multiple de 3.
> On considère un entier k quelconque. On suppose que la propriété $P(k)$ est vraie pour ce rang k, c'est-à-dire que 2^k est un multiple de 3, c'est-à-dire que $2^k = 3a$ avec a entier.
> On veut montrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire $2^{k+1} = 3a'$ avec a' entier.
> On a : $2^{k+1} = 2 \times 2^k = 2 \times 3a$ d'après l'hypothèse faite au rang k.
> On a donc $2^{k+1} = 3 \times 2a = 3a'$, avec $a' = 2a$, qui est bien un entier.
> On peut donc dire que 2^{k+1} est bien un multiple de 3 et donc que $P(k+1)$ est vraie.
> La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.
> On en déduit que 2^n est un multiple de 3 pour tout entier $n \geqslant 0$.

- Que penser de la justesse de ce raisonnement ?

Situation 4 Évolution d'une population de bactéries

Objectif
Utiliser le raisonnement par récurrence.

Un biologiste étudie une culture bactériologique, qui contient 10 000 bactéries à l'instant 0.
Chaque seconde, 20 % des bactéries meurent naturellement et 1 500 bactéries nouvelles sont injectées dans la culture.
On note u_n le nombre de bactéries au bout de n secondes.

1. Quel est le nombre de bactéries présentes dans la culture au bout de 1 seconde ? au bout de 2 secondes ?
2. CALCULATRICE Programmer la suite (u_n) à la calculatrice et observer les 30 premiers termes.
   Que peut-on dire de l'évolution des bactéries de la culture ?
3. Un étudiant en biologie conjecture que le nombre de bactéries sera toujours supérieur à 7 500. Mais seule son observation lui permet de l'affirmer et il ne sait pas comment le prouver. Il demande à une collègue mathématicienne une démonstration qui ne repose pas sur la seule observation des premiers termes.
   Aider l'étudiant en biologie à rédiger cette démonstration.

1. Raisonnement par récurrence

1. Propriété mathématique

Définition

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse.

Remarque

Lorsque la propriété concerne un entier naturel n, on peut la noter $P(n)$.
Cette propriété peut être :

- une égalité, par exemple $P(n) : 1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
- une inégalité, par exemple $P(n) : (1+\pi)^n \geqslant 1+n\pi$;
- une phrase, par exemple $P(n) : n^3-n$ est un multiple de 3.

2. Principe de récurrence

Principe de récurrence (axiome)

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.
Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- étape 1 (**initialisation**) : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
- étape 2 (**hérédité**) : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;

alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.

Initialisation $P(n_0)$ **vraie**	**Hérédité** Pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ **est vraie** » **implique** « $P(k+1)$ **est vraie** ».

Conclusion : $P(n_0)$ **vraie** $\Rightarrow$ $P(n_0+1)$ **vraie** $\Rightarrow$ $P(n_0+2)$ **vraie** $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $P(n)$ **vraie**

3. Raisonnement par récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède ainsi.

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang n_0).
- **Hérédité** : on démontre, pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, l'implication :

$$P(k) \text{ vraie} \Rightarrow P(k+1) \text{ vraie.}$$

Pour cela, on considère un entier quelconque k, avec $k \geqslant n_0$, et on suppose que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on suppose que la propriété est vraie au rang k). C'est **l'hypothèse de récurrence**.
On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

- **Conclusion** : on conclut, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque

L'initialisation se fait souvent pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. On vérifie donc que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.

Méthode 1 Vérifier qu'une propriété est vraie à un rang donné

Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété $P(n)$ suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

1. $P(n) : 5^n - 2^n$ est un multiple de 3 ; $n_0 = 1$.
2. $P(n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \leqslant n^3$; $n_0 = 2$.
3. $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$; $n_0 = 3$.

Solution commentée

1. On remplace n par n_0 et on obtient $5^1 - 2^1 = 3$, qui est bien un multiple de 3.
Donc $P(n)$ est vraie pour $n_0 = 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

2. On remplace n par n_0 et on obtient $1^2 + 2^2 = 5$.
Par ailleurs, $2^3 = 8$ et $5 \leqslant 8$. Donc $P(2)$ est vraie.

3. On remplace n par n_0 et on obtient $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$.
Par ailleurs, $(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$. Donc $P(3)$ est vraie.

EXERCICE 6 p. 26

Méthode 2 Étudier l'initialisation d'une propriété

Soit n un entier naturel. On considère la propriété $P(n) : 3^n \geqslant (n+2)^2$.

• Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie.

Solution commentée

On teste $P(n)$ pour les premières valeurs entières de n :
$3^0 = 1$ et $(0+2)^2 = 2^2 = 4$, donc $P(0)$ n'est pas vraie ;
$3^1 = 3$ et $(1+2)^2 = 3^2 = 9$, donc $P(1)$ n'est pas vraie ;
$3^2 = 9$ et $(2+2)^2 = 4^2 = 16$, donc $P(2)$ n'est pas vraie ;
$3^3 = 27$ et $(3+2)^2 = 5^2 = 25$, donc $P(3)$ est vraie.
Le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie est $n_0 = 3$.

EXERCICE 8 p. 27

Méthode 3 Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}3u_n + 7$.

• Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

Solution commentée

On considère la propriété $P(n) : u_n \leqslant 10$.

• **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 2$. Or $2 \leqslant 10$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire : $u_k \leqslant 10$. On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leqslant 10$.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leqslant 10$, donc $0{,}3u_k \leqslant 3$ en multipliant chaque membre par le réel positif 0,3.
En ajoutant 7 à chaque membre, on trouve alors : $0{,}3u_k + 7 \leqslant 10$, soit $u_{k+1} \leqslant 10$.
Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

EXERCICE 12 p. 27

2. Comportement global d'une suite

1. Suites monotones

Définitions

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Trois méthodes permettent l'étude de la monotonie d'une suite.
- **Méthode algébrique :** elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
  – soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
  – soit en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
- **Méthode fonctionnelle :** elle s'applique aux suites définies par une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
- **Méthode du raisonnement par récurrence :** elle s'applique aux suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et consiste à démontrer qu'une des propriétés $P(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$ ou $P(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Suites majorées, minorées et bornées

Définitions

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.

M est appelé un **majorant** de (u_n).
- **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

m est appelé un **minorant** de (u_n).
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques

- Une suite majorée admet une infinité de majorants. En effet, si M est un majorant de (u_n), tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de (u_n). De même, une suite minorée admet une infinité de minorants.
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- Pour démontrer qu'une suite est majorée ou minorée, on peut utiliser une des méthodes vues plus haut.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2+1}$.

On peut montrer qu'elle est bornée en utilisant la méthode algébrique.

Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{n^2+1} \geqslant 0$, donc $u_n \leqslant 2$. Donc la suite (u_n) est majorée par 2.

Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{n^2+1} \leqslant 1$, donc $-\frac{1}{n^2+1} \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant 1$. Donc la suite (u_n) est minorée par 1.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Donc la suite (u_n) est bornée.

Méthode 1 Déterminer le sens de variation d'une suite

1. Montrer que la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3n$, est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n n^2$, est décroissante.
3. La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n - 3$.
Montrer par récurrence que la suite (w_n) est décroissante.

Solution commentée

1. On peut utiliser la méthode algébrique : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n = 2n + 4$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 4 \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
On peut également utiliser la méthode fonctionnelle en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x$ sur $[0 ; +\infty[$. $f'(x) = 2x + 3$. Or $2x + 3 \geqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante.

2. On peut utiliser la méthode algébrique : ici, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n > 0$.
Donc on compare le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1 pour tout entier $n \geqslant 1$.
$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}(n+1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^n n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$. Or $\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$, donc la suite (v_n) est décroissante.

3. On considère la propriété $P(n) : w_{n+1} \leqslant w_n$.
• **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $w_1 = 2w_0 - 3 = -1$ et $w_0 = 1$, donc $w_1 \leqslant w_0$, donc $P(0)$ est vraie.
• **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire $w_{k+1} \leqslant w_k$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire $w_{k+2} \leqslant w_{k+1}$.
Par hypothèse de récurrence, on a $w_{k+1} \leqslant w_k$, donc $2w_{k+1} \leqslant 2w_k$ en multipliant chaque membre par le réel positif 2. En ajoutant à chaque membre le nombre –3, on a alors $2w_{k+1} - 3 \leqslant 2w_k - 3$, soit $w_{k+2} \leqslant w_{k+1}$.
Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
• **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leqslant w_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante.

EXERCICE 27 p. 28

Méthode 2 Montrer qu'une suite est majorée ou minorée

1. Montrer que la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 5$, est minorée par –4.
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.
Montrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 3.

Solution commentée

1. Pour montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -4$, on étudie le signe de la différence $u_n - (-4)$.
$u_n - (-4) = n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2$. Or $(n-3)^2 \geqslant 0$ pour tout entier naturel n, donc $u_n - (-4) \geqslant 0$, donc $u_n \geqslant -4$.
Donc la suite (u_n) est minorée par –4.

2. On considère la propriété $P(n) : v_n \leqslant 3$.
• **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $v_0 = 1$. Or $1 \leqslant 3$, donc $P(0)$ est vraie.
• **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k \leqslant 3$.
Alors $2v_k \leqslant 6$, donc $2v_k - 3 \leqslant 3$, donc $v_{k+1} \leqslant 3$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
• **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_n \leqslant 3$. Donc la suite (v_n) est majorée par 3.

EXERCICE 42 p. 30

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Pour tout entier naturel n non nul, $1+5+9+\ldots+(4n-3)=\dfrac{n(4n-2)}{2}$.

Démonstration

On considère la propriété $P(n)$: $1+5+9+\ldots+(4n-3)=\dfrac{n(4n-2)}{2}$.

- **Initialisation.** Pour $n_0=1$: le premier membre de l'égalité à démontrer vaut 1 ; le second membre de l'égalité à démontrer vaut $\dfrac{1(4\times1-2)}{2}$ soit $\dfrac{2}{2}$, et donc 1. On en déduit que $P(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 1$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$1+5+9+\ldots+(4k-3)=\frac{k(4k-2)}{2}.$$

C'est l'hypothèse de récurrence.
On veut montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$1+5+9+\ldots+[4(k+1)-3]=\frac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2}.$$

On a : $1+5+9+\ldots+[4(k+1)-3]=1+5+9+\ldots+(4k-3)+[4(k+1)-3]$.
On a donc :

$$1+5+9+\ldots+[4(k+1)-3]=\frac{k(4k-2)}{2}+[4(k+1)-3]=2k^2+3k+1.$$

Or $\dfrac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2}=2k^2+3k+1$.

On peut donc dire que $1+5+9+\ldots+[4(k+1)-3]=\dfrac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2}$ et, donc, que $P(k+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.

- **Conclusion.**

La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 1 et héréditaire.
On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$. Donc :

$$1+5+9+\ldots+(4n-3)=\frac{n(4n-2)}{2}, \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

1 Aurait-on pu faire l'initialisation pour $n_0=0$?

2 Dans la démonstration de l'hérédité :

a. aurait-on pu remplacer « On considère un entier quelconque $k \geqslant 1$. On suppose que $P(k)$ est vraie. » par « On suppose que, pour tout $k \geqslant 1$, $P(k)$ est vraie. » ?

b. justifier que l'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$1+5+9+\ldots+[4(k+1)-3]=\frac{k(4k-2)}{2}+[4(k+1)-3].$$

c. justifier que $\dfrac{k(4k-2)}{2}+[4(k+1)-3]=2k^2+3k+1$ puis que $\dfrac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2}=2k^2+3k+1$.

3 Dans la conclusion :

a. pourquoi l'initialisation est-elle nécessaire ?

b. traduire l'hérédité de $P(n)$ par une implication.

Rédiger une démonstration

On propose de revenir sur quelques propriétés vues en première et de les démontrer par récurrence.

1 On considère la propriété suivante.

> Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
> Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Écrire la propriété $P(n)$ à démontrer.
- Vérifier que $P(0)$ est vraie.
- En utilisant la relation de récurrence vérifiée par une suite arithmétique, démontrer l'hérédité de la propriété $P(n)$.
- Conclure.

2 On considère la propriété suivante.

> Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.
> Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Écrire la propriété $P(n)$ à démontrer.
- Vérifier que $P(0)$ est vraie.
- En utilisant la relation de récurrence vérifiée par une suite géométrique, démontrer l'hérédité de la propriété $P(n)$.
- Conclure.

3 On considère la propriété suivante

> Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel n, on a : $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Écrire la propriété $P(n)$ à démontrer.
- Vérifier que $P(0)$ est vraie, sachant que $q^0 = 1$.
- Démontrer l'hérédité de la propriété $P(n)$.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

Le raisonnement par récurrence n'est pas le seul type de raisonnement que l'on peut adopter pour démontrer une propriété portant sur un entier naturel.
Montrer que les propriétés suivantes sont vraies pour tout entier naturel n en utilisant un des types de raisonnements mentionnés dans l'encadré ci-contre.

1 $P_1(n) : 15 + (2n-1)^2$ est un multiple de 4.

2 $P_2(n) : n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

3 $P_3(n)$: si n^2 est impair, alors n est impair.

4 $P_4(n) : \left(1+\sqrt{2}\right)^n \geqslant 1 + n\sqrt{2}$.

Démontrer une propriété portant sur un entier naturel

Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n, on peut raisonner par :
- déduction logique ;
- contraposée ;
- disjonction des cas (qui permet d'explorer tous les cas) ;
- récurrence.

Carte mentale

Suites numériques et récurrence

Démontrer par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (en général, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$), on peut utiliser le **raisonnement par récurrence** :

1. Initialisation
On vérifie que **$P(n_0)$ est vraie.**

2. Hérédité
Hypothèse de récurrence : on considère un entier quelconque k tel que $k \geqslant n_0$ et on suppose que $P(k)$ est vraie.
On démontre l'implication : « **$P(k)$ vraie** » $\Rightarrow$ « **$P(k+1)$ vraie** »

3. Conclusion
$P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Étudier la monotonie d'une suite

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Pour démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante :
– on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
– si $u_n = f(n)$, on peut étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
– si $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut démontrer par récurrence qu'une des propriétés $P(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ » ou $P(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » est vraie pour tout entier naturel n.

Montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
M est appelé un **majorant** de (u_n). Une suite majorée admet une infinité de majorants
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
m est appelé un **minorant** de (u_n). Une suite minorée admet une infinité de minorants.
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Pour démontrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on raisonne parfois par récurrence.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification. Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Les trois premiers termes de la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n$ et $u_0 = 10$, sont :

(a) $5 ; \frac{3}{2} ; -\frac{5}{4}$ (b) $10 ; 5 ; \frac{3}{2}$ (c) $10 ; 4 ; 0$

2 On considère le raisonnement suivant.
« On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Si $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$, alors $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant 0$, puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, par récurrence, on peut affirmer que la suite (u_n) est croissante. »
Le raisonnement ci-dessus est :
(a) correct.
(b) incorrect.
(c) mal rédigé.

3 La propriété « $P(n)$: 9 divise $10^n + 1$ » :
(a) est héréditaire.
(b) n'est pas héréditaire.
(c) est vraie pour tout entier naturel n.

4 La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 3u_n - 10.$$
La propriété « $P(n) : u_n = 5$ » :
(a) n'est pas héréditaire.
(b) est vraie pour tout entier naturel n, quelle que soit la valeur de u_0.
(c) est vraie pour tout entier naturel n lorsque $u_0 = 5$.

5 La suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 + (-1)^n$, est :
(a) majorée par 2.
(b) minorée par 2.
(c) minorée par 1.

6 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.
On a :
(a) $u_n \geqslant 5$ pour tout entier naturel n.
(b) $u_n \leqslant 5$ pour tout entier naturel n.
(c) (u_n) n'est pas monotone.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 4$ et est héréditaire à partir de $n = 2$, alors elle est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

2 Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire à partir de $n = 4$, alors elle est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

3 La suite (u_n) définie par $u_0 = -4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 4$, a pour terme général $u_n = 5 \times 2^n - 4$.

4 La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 4$, a pour terme général $u_n = 5 \times 2^n - 4$.

5 La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -2v_n + 1$, est croissante.

6 Si une suite est croissante, alors elle est minorée.

7 Si une suite est décroissante, alors elle n'est pas minorée.

8 Si une suite est majorée par 7, alors elle est majorée par 5.

9 La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2 + \sin(n)$ est bornée.

TP 1 Une somme de carrés ALGO PYTHON

Objectif
Utiliser les listes pour afficher les termes d'une suite et pour émettre une conjecture.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{6}{n}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

L'objectif de ce TP est d'afficher et de représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un programme Python, puis de trouver une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls.

1. Recopier et compléter le script ci-dessous afin que la fonction renvoie la liste des carrés des entiers de 1 à n.

```
def liste_carrés(n):
    return [... for k in range (...,...)]
```

2. En utilisant la fonction sum, écrire une fonction nommée u d'argument n qui renvoie le terme de rang n de la suite (u_n).
3. Créer une liste L définie en compréhension qui contient les 30 premiers termes de la suite.
4. **a.** Le script ci-dessous permet d'afficher un nombre donné de points représentant les premiers termes de la suite (u_n).

```
from matplotlib.pyplot import*
def tracé(nombre_points):
    for i in range(1,nombre_points+1):
        plot(i,u(i),'r.')
    show()
```

Recopier ce script à la suite des scripts précédents.

b. Que doit-on écrire dans la console pour obtenir un graphique représentant les 80 premiers termes de la suite ?

5. On suppose qu'il existe une fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.

a. À l'aide du graphique précédent, quelle conjecture peut-on formuler sur la nature de la fonction f ?

b. CALCULATRICE En utilisant les valeurs de la suite trouvées à l'aide de la liste L, conjecturer l'expression algébrique de f. On pourra utiliser le solveur de la calculatrice pour résoudre le système.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, une formule explicite possible pour (u_n) est :

$$u_n = (n+1)(2n+1).$$

6. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que l'on a bien $u_n = (n+1)(2n+1)$ pour tout entier naturel n non nul.
7. En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers non nuls.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- On peut définir une liste en compréhension avec l'instruction [formule contenant k for k in range(min,max+1)].
- Afin de créer une liste L des termes d'une suite définie par récurrence dans une fonction, on pourra utiliser L[–1], qui est la dernière valeur de la liste L. Cette valeur sera utilisée dans le calcul du terme suivant de la suite grâce à la formule de récurrence.
- Le terme alors calculé sera à son tour ajouté dans la liste, en dernière position, grâce à l'instruction :
  liste.append(terme à ajouter).
- Dans from matplotlib.pyplot import*, le * permet d'importer tout le contenu de la bibliothèque. On pourra ainsi utiliser les fonctions définies dans cette bibliothèque, comme plot ou show.

TP 2 Établir l'expression explicite d'une suite TABLEUR

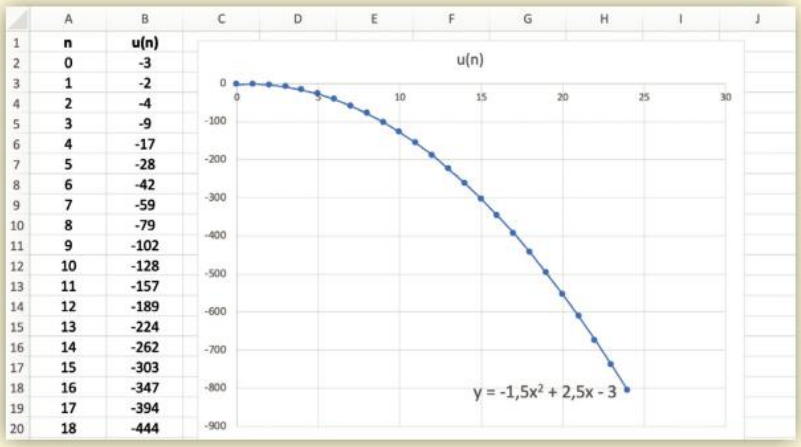
Objectifs
Utiliser le tableur pour afficher les termes d'une suite et pour émettre une conjecture, puis la démontrer par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.
On souhaite déterminer une formule explicite de u_n pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

1. Ouvrir un tableur et recopier la feuille de calcul commencée ci-contre.

	A	B
1	**n**	**u(n)**
2	**0**	**0**
3	**1**	
4	**2**	
5	**3**	

2. Quelle formule saisir dans la case B3 qui, recopiée vers le bas, permettra d'afficher les premiers termes de cette suite ?
3. Construire sur le tableur une représentation graphique des 25 premiers termes de cette suite.
4. Faire apparaître sur la représentation graphique précédente une courbe de tendance polynomiale ainsi que son équation.
5. On suppose qu'il existe une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$.
À l'aide du graphique précédent, quelle conjecture peut-on formuler sur la nature de la fonction f ?
6. **a.** L'équation de la courbe de tendance affichée à la question 4 donne-t-elle exactement l'expression algébrique de f ?
b. Donner une formule explicite possible pour la suite (u_n).
7. Démontrer la conjecture précédente à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
8. Calculer la valeur de u_{2020} et vérifier avec le tableur.
9. Reprendre les questions 1 à 7 avec la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$. On s'aidera de la copie d'écran ci-dessous.



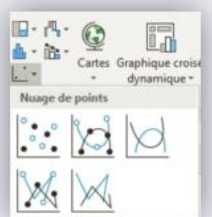
	A	B
1	**n**	**u(n)**
2	0	-3
3	1	-2
4	2	-4
5	3	-9
6	4	-17
7	5	-28
8	6	-42
9	7	-59
10	8	-79
11	9	-102
12	10	-128
13	11	-157
14	12	-189
15	13	-224
16	14	-262
17	15	-303
18	16	-347
19	17	-394
20	18	-444

10. Reprendre les questions les questions 1 à 7 avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + n$. La méthode fonctionne-t-elle ?

Boîte à outils

Tableur

- Pour insérer un graphique :



- Pour ajouter une courbe de tendance
  - faire un clic droit sur la courbe tracée au tableur ;
  - dans le menu « courbe de tendance », choisir « ajouter une courbe de tendance » ;
  - choisir le type de la courbe de tendance (linéaire, polynomiale, etc.) ;
  - cocher « Afficher l'équation sur le graphique ».

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Dans chaque cas, calculer u_n pour la valeur de n indiquée.

1. $u_n = \dfrac{2 + 5(-1)^n}{n}$ pour $n = 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{\sqrt{n - 2}}$ pour $n = 3$.
3. $u_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ pour $n = 5$.
4. $u_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n$ pour $n = 8$.

2 Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans chacun des cas.

1. $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
2. $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n.$$

3 Déterminer le signe des expressions suivantes.

1. $-n^2 - 2n$, pour tout entier naturel n.
2. $n^2 + n + 1$, pour tout entier naturel n.
3. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, pour tout entier naturel n.
4. $2n - 1$, pour tout entier naturel n non nul.
5. $n^3 - n^2$, pour tout entier naturel n non nul.
6. $n - n^2$, pour tout entier naturel n non nul.
7. $\dfrac{1}{1 - n}$, pour tout entier n strictement supérieur à 1.

4 Dans chaque cas, déterminer si $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

1. $P(n) : n^2 - 6n + 2 > 0$
2. $P(n) : 5^n - 3^n + 4$ est un multiple de 4.
3. $P(n) : \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \leqslant 1 + \dfrac{n}{3}$

5 Déterminer un majorant de chacune des suites ci-dessous.

1. (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \dfrac{3}{n+1}$.
2. (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\sqrt{n+1} - 4$.
3. (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = -2n^2 + 4n + 1$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

6 Reformuler chacune des phrases suivantes sous la forme d'une égalité ou d'une inégalité.

1. « La suite (u_n) est décroissante. »
2. « La suite (u_n) est minorée. »
3. « La suite (u_n) est strictement positive. »
4. « La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - 1$, est constante. »

7 Dans chacun des cas suivants, écrire la propriété au rang $k + 1$, c'est-à-dire $P(k + 1)$.

1. $P(n) : u_n > u_{n+1}$
2. $P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. $P(n) : 5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

8 On considère la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{2n - 6}{n + 1}.$$
• Montrer que $-6 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.

9 Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n. On suppose que, pour un entier naturel k, $-2 < u_k < -1$.
• Quelle propriété permet d'affirmer que :
$$1 < {u_k}^2 < 4 \ ?$$

10 Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n. On suppose que, pour un entier naturel k, $1 < u_k < \dfrac{3}{2}$.
• Quelle propriété permet d'affirmer que :
$$\frac{2}{3} < \frac{1}{u_k} < 1 \ ?$$

11 Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

1. Sachant que, pour un entier k, $1 < u_k < 5$ et $u_{k+1} = -0{,}5u_k + 3{,}5$, prouver que :
$$1 < u_{k+1} < 3.$$
2. Quel raisonnement permet de prouver ensuite que $1 < u_{k+1} < 5$?

12 Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.
• Sachant que, pour un entier k, $u_k \geqslant 4$ et $u_{k+1} = \sqrt{5u_k - 4}$, prouver que $u_{k+1} \geqslant 4$.

13 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 7n^2 - 3n + 1.$$

1. Écrire u_{n+1} en fonction de n.
2. Décrire deux méthodes qui permettraient d'étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Tout nombre impair s'écrit comme différence des carrés de deux entiers consécutifs.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n\left(n^2+4\right)$ n'est pas divisible par 8, alors n est impair.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2+n+2 est un nombre pair.
4. La suite (u_n), définie pour tout n entier naturel par $u_n = n^3 - 3n^2 + 2n$, est la suite nulle.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

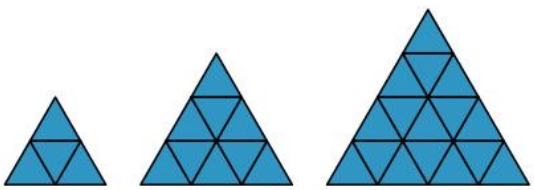
Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

On construit successivement des empilements de triangles équilatéraux comme ci-dessous.

2 rangées **3 rangées** **4 rangées**



• Combien faut-il de triangles pour construire un empilement de 1 000 rangées ? pour construire un empilement de n rangées ?

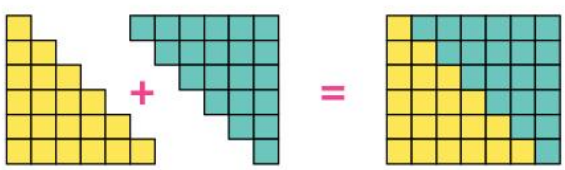
Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Il y a environ 4 000 ans, les mathématiciens babyloniens savaient calculer la somme des n premiers nombres entiers. On suppose qu'ils ont procédé de façon géométrique pour montrer que :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Expliquer comment l'égalité peut s'illustrer avec le schéma ci-contre.
2. Faire des recherches sur d'autres utilisations de procédés géométriques pour démontrer des formules de sommes d'entiers ou pour démontrer des résultats d'algèbre.



Notion de suite

1 **Calculer**

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 2n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Calculer le dixième terme de cette suite.
3. Calculer u_{10}.
4. Exprimer u_{n+1}, puis $u_n + 1$ en fonction de n.
5. Déterminer une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

2 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n^2 + v_n$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
2. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1}.
3. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}.
4. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de v_4.
5. Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

3 TABLEUR

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

On veut afficher la liste des 100 premiers termes.

1. Reproduire la feuille de calcul ci-contre sur un tableur.
2. Quelle formule écrite en B3 et recopiée vers le bas permet d'afficher les termes de cette suite ?
3. À partir de quel rang le tableur n'affiche-t-il plus la valeur exacte des termes de la suite ?

	A	B
1	n	u(n)
2	0	0
3	1	
4	2	
5	3	

4 ALGO PYTHON

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

On veut afficher la liste des 100 premiers termes à l'aide de Python.

1. **Avec une liste définie en compréhension.**

a. Écrire une fonction Python qui renvoie le terme de rang N de la suite (u_n).

b. Écrire une liste définie en compréhension qui contient les 100 premiers termes de cette suite.

2. **Avec une liste définie en extension.**

a. Recopier et compléter le script suivant.

```
def liste_termes(N):
    L=[0]
    for i in range(1,N):
        L.append(...)
    return L
```

b. Quelle instruction écrire dans la console pour obtenir la liste des 100 premiers termes de la suite (u_n) ?

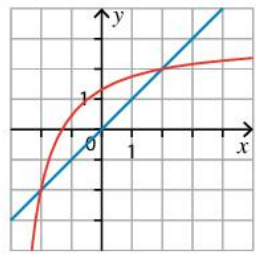
5 **Représenter**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -\frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$.

1. Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe de la fonction f définie sur $]-3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x + 4}{x + 3},$$

ainsi que la droite d'équation $y = x$.



a. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, établir un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[-2,5 ; 5]$ avec un pas de 0,5.

b. Reproduire la figure et placer sur l'axe des abscisses le terme u_0.

c. Construire le terme u_1 sur l'axe des ordonnées.

d. En utilisant la droite d'équation $y = x$, placer le terme u_1 sur l'axe des abscisses.

e. Construire le terme u_2 sur l'axe des ordonnées.

f. Continuer ce processus afin de placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n, où $n \in \mathbb{N}$.

c. Contrôler alors la valeur de u_3 obtenue graphiquement à la question 1.

Raisonnement par récurrence

6 Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété $P(n)$ suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

1. $P(n) : 10^n - 2$ est un multiple de 4 ; $n_0 = 1$.
2. $P(n) : 3^n \leqslant n! ; n_0 = 7$, où $n!$ est l'entier égal au produit des entiers de 1 à n ($n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$).
3. $P(n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $n_0 = 1$.

7 Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété $P(n)$ suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

1. $P(n) : 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; $n_0 = 1$.
2. $P(n) : 5^n \geqslant 4^n + 3^n$; $n_0 = 2$.

8 Déterminer le plus petit entier naturel pour lequel la propriété $P(n) : 2^n \geqslant (n+2)^2$ est vraie.

9 On considère la propriété $P(n)$ suivante, où n est un entier supérieur ou égal à 2.
$P(n)$: le nombre de cordes reliant n points distincts d'un cercle est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

1. Écrire la propriété $P(2)$. Est-elle vraie ?
2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Écrire les propriétés $P(k)$ et $P(k+1)$.
3. Utiliser les questions précédentes pour démontrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

10 La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{2}{5}}.$$

1. Démontrer que la propriété $P(n) : 0 < u_n < \frac{7}{5}$, où n désigne un entier naturel, est héréditaire.
2. Quelle condition doit vérifier u_0 pour que la propriété $P(n)$ soit vraie pour tout entier naturel n ?

11 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 4$.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

12 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}6$.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 1$.

13 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

14 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \sqrt{0{,}5v_n + 8}.$$

• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant 4$.

15 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 3$ pour tout entier naturel n.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

17 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n - 1$.

18 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. a. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?
b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

19 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.
• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

20 CALCULATRICE
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer les dix premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?
b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

21 **Dans une urne**
Raisonner
On considère le raisonnement suivant.

> On note $P(n)$ la propriété suivante : « Si une urne contient n boules, alors les n boules sont de la même couleur. »
> Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n non nul.
> • Pour $n = 1$: $P(1)$ est vraie car il n'y a qu'une boule.
> • Supposons que, pour un entier naturel non nul k fixé, $P(k)$ est vraie. Prenons une urne qui contient $(k+1)$ boules. On enlève une boule ; il en reste alors k qui, par hypothèse de récurrence, sont de la même couleur. On enlève une autre boule et on remet la première : il y a encore k boules dans l'urne qui sont donc, par hypothèse de récurrence, toutes de la même couleur. La première boule enlevée a donc la même couleur que les autres. Donc les $(k+1)$ boules de l'urne sont de même couleur ; donc $P(k+1)$ est vraie.
> • Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

• Quelle erreur de raisonnement commet-on ?

Comportement global d'une suite

22 **Communiquer**

Traduire par une propriété dépendant de n les énoncés suivants.

1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est minorée par 5.
3. La suite (w_n) est majorée par -1.
4. La suite (t_n) est strictement positive.

23 CALCULATRICE

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n). On commencera par calculer et représenter graphiquement les premiers termes à la calculatrice.

1. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n - 1$.

On étudiera $u_{n+1} - u_n$.

2. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 \times 3^n$.

On expliquera pourquoi $u_n > 0$ et on étudiera $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

3. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$. On étudiera les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2}$ sur $[1 ; +\infty[$.

24 CALCULATRICE

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

On commencera par calculer et représenter graphiquement les premiers termes à la calculatrice.

1. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 + 2n - 1$.

On étudiera $u_{n+1} - u_n$.

2. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = ne^n$.

On expliquera pourquoi $u_n > 0$ et on étudiera $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

3. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{-n+1}{n+1}$. On étudiera les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x+1}{x+1}$ sur $]-1 ; +\infty[$.

25 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par -3.

2. a. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{3}u_n - 1$, pour tout entier naturel n.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

26 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

• Montrer par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et que la suite (u_n) est croissante.

27 CALCULATRICE

Pour chaque suite, calculer les premiers termes à la calculatrice, conjecturer le sens de variation puis le démontrer par récurrence.

1. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

3. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 4$.

28 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0{,}7$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{1+2x}.$$

a. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

b. En déduire que si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

b. Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

29 Soit (u_n) la suite définie par u_0, un réel donné, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n - 1$.

1. Déterminer la valeur de u_0 pour que la suite (u_n) soit constante.

2. On prend désormais $u_0 = 0$.

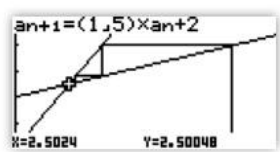
a. Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, construire les deux droites d'équations $y = \dfrac{1}{5}x - 1$ et $y = x$.

b. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n), puis émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

c. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{5}{4}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer son premier terme et sa raison. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

30 À la calculatrice, on a représenté ci-dessous la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 2$, pour tout entier naturel n.



1. a. Conjecturer graphiquement le sens de variation de la suite (u_n).

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

2. a. Conjecturer une valeur d'un réel m tel que $u_n \geqslant m$ pour tout entier naturel n.

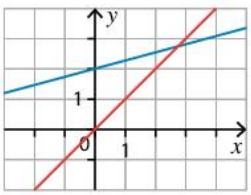
b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

31 **Représenter**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2$.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

1. a. Reproduire le graphique ci-dessous.



b. Placer sur l'axe des abscisses le terme u_0.
c. Construire le terme u_1 sur l'axe des ordonnées.
d. En utilisant la droite d'équation $y = x$, placer le terme u_1 sur l'axe des abscisses.
e. Construire le terme u_2 sur l'axe des ordonnées.
f. Continuer ce processus afin de placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2. a. Conjecturer graphiquement le sens de variation de la suite (u_n).
b. Démontrer cette conjecture par récurrence.
3. a. Conjecturer une valeur d'un réel m tel que $u_n \leqslant m$ pour tout entier naturel n.
b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

32 ALGO PYTHON **Influence de la valeur du premier terme sur le comportement d'une suite**

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, où $a \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} = 4u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Recopier et compléter les lignes 5, 8 et 9 de la fonction Python suivante, d'arguments n et a, qui renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) et en donne une représentation graphique.

```
1 from math import sqrt
2 from matplotlib.pyplot import*
3
4 def liste_termes_u(n,a):
5     u=...
6     L=[u]
7     for i in range(1,n+1):
8         u=...
9         L.append(...)
10    plot(L,'r.')
11    show()
12    return L
```

2. Conjecturer grâce à ce script le comportement de la suite (u_n) pour les valeurs de a suivantes.
a. $a = 1$
b. $a = 4$
c. $a = 2$
3. Démontrer la conjecture dans les deux premiers cas.

33 ALGO PYTHON **Abonnement à un site**

Modéliser, chercher

Un site Internet d'actualité n'est accessible que sur abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1 800 nouveaux abonnés chaque année et que, d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas. En 2019, il y avait 8 000 abonnés. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus en $(2019 + n)$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 12. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Écrire un algorithme en langage naturel permettant d'obtenir l'année à partir de laquelle le site dépassera, d'après le modèle, la barre des 11 000 abonnés.
4. Écrire une fonction Python appelée seuil(M) qui renvoie l'année à partir de laquelle le site dépassera, d'après le modèle considéré, la barre des M abonnés.

34 **Population d'une ville**

En 2020, une ville compte 5 000 habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que, chaque année :

• 20 % des habitants de la ville meurent ou quittent la ville ;

• 1 200 personnes naissent ou emménagent dans la ville.

On note u_n le nombre d'habitants (exprimé en milliers) l'année $2020 + n$.

1. Expliquer pourquoi $u_0 = 5$.
2. Montrer en justifiant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1{,}2$.
3. CALCULATRICE En utilisant la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et démontrer la conjecture par récurrence.
4. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.
b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

35 **Raisonner**

On souhaite démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est un multiple de 3.
On propose la démonstration suivante.

On considère la propriété $P(n)$:
« $7^n - 1$ est un multiple de 3. »

• **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
0 est un multiple de 3, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $7^k - 1 = 3a$, avec a entier. C'est l'hypothèse de récurrence.
On veut montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $7^{k+1} - 1 = 3a'$, avec a' entier.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier a tel que $7^k - 1 = 3a$. On a :

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7^k \times 7 - 1 = (3a+1) \times 7 - 1 \\ &= 7 \times 3a + 7 - 1 = 3 \times 7a + 6 \\ &= 3(7a+2) = 3a' \end{aligned}$$

avec $a' = 7a + 2$, qui est bien un entier.
On peut donc dire que $7^{k+1} - 1$ est un multiple de 3 et, donc, que $P(k+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.

• **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$. Elle est héréditaire. On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, donc $7^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

1. Dans l'initialisation :
a. aurait-on pu faire l'initialisation pour $n_0 = 1$?
b. justifier que 0 est bien un multiple de 3.
2. Dans la démonstration de l'hérédité :
a. justifier pourquoi l'hypothèse de récurrence permet d'écrire : $7^k \times 7 - 1 = (3a+1) \times 7 - 1$.
b. quelle égalité permet de conclure que $7^{k+1} - 1$ est un multiple de 3 ?

36 ALGO PYTHON

On considère le nombre $A(n) = 3n^2 + 3n + 6$ où n est un entier naturel.
1. Sur Python, créer en compréhension une liste L qui contient les 20 premières valeurs du nombre $A(n)$.
2. De quel entier, autre que 1 et 3, le nombre entier $A(n)$ semble-t-il être multiple ?
3. Démontrer cette conjecture pour tout entier naturel n en utilisant un raisonnement par récurrence.

37 Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

38 On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

• Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

39 CALCULATRICE

1. a. Calculer les premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 - n$. On pourra utiliser une calculatrice.
b. De quel entier, autre que 1, le nombre entier u_n semble-t-il être multiple ?
c. Démontrer cette conjecture pour tout entier naturel n en utilisant un raisonnement par récurrence.
2. a. On a trouvé, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, le résultat suivant.

Développer$\left((n+1)^5\right)$
→ $\mathbf{n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5\,n + 1}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 - n + 5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right)$.
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

40 **Calculer**

On précise que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n.$$

• En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1.$$

41 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}.$$

• Démontrer que cette suite est bornée par 0 et 7 et qu'elle est croissante.

42 **Différents types de raisonnements**
Raisonner, communiquer

1. Montrer que la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 - 2n + 8$, est majorée par 9.
2. Montrer que la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, est bornée.
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 5$.
Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{5}{2}$.

43 ALGO PYTHON

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{2n^2 + n + 1}.$$

1. Vérifier que cette suite est bien définie sur $\mathbb{N}$.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie le terme de rang N de cette suite.
3. a. Créer en compréhension, sur Python, une liste L qui contient les 100 premiers termes de cette suite.
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer la conjecture de la question précédente en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

44 **Représenter, raisonner**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. Déterminer la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. Dans un repère, représenter la fonction f et la droite d'équation $y = x$. On prendra 2 cm pour unité sur chaque axe.

En utilisant le graphique :

a. placer les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses ;
b. conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ;
c. conjecturer un majorant de la suite (u_n) ;
4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

b. Les conjectures précédentes sont-elles vérifiées ?

45 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$.

La conjecture est-elle vérifiée ?

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 5$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
4. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer u_{100}.

46 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 3.$$

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
a. À l'aide du tableur de la calculatrice, calculer les dix premiers termes de la suite (u_n).
b. La suite (u_n) semble-t-elle strictement croissante ? strictement décroissante ? Justifier la conjecture.
c. La suite (u_n) semble-t-elle minorée ? majorée ? Si oui, donner un minorant (respectivement un majorant) le plus grand (respectivement le plus petit) possible. Justifier ensuite cette conjecture.
2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = f(v_n).$$

a. À l'aide du tableur de la calculatrice, calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
b. Établir les mêmes types de conjectures qu'à la question 1.
c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.
d. Étudier la monotonie de la suite (v_n).

47 **Calculer**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

a. Si $u_0 = 2\,020$, alors la suite (u_n) est croissante.
b. Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n :

$$1 \leqslant u_n \leqslant e^2.$$

c. La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$.

48 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

• Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

49 On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \frac{n+1}{3n} v_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_n = \frac{n}{3^n}.$$

2. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
3. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, conjecturer un encadrement de v_n, pour tout entier $n \geqslant 1$, par deux constantes, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

50 On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = 5u_n + 8$ pour tout entier naturel n.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes et proposent deux méthodes différentes pour déterminer une formule explicite pour la suite (u_n).

1. Montrer par récurrence que $u_n = 3 \times 5^n - 2$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ pour tout entier naturel n.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 5.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

51 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Quelle conjecture peut-on faire quant à la formule explicite de u_n ?
3. Démontrer la conjecture.

52 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis S_1, S_2 et S_3. Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. Conjecturer une expression de S_n en fonction de n, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

53 **Nombre d'arbres d'une forêt**

Le nombre d'arbres d'une forêt est modélisé par la suite (u_n), où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2020 + n)$. En 2020, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et d'en replanter 3 000 nouveaux.

1. Justifier que $u_0 = 50$ et déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$.
4. Selon ce modèle, quel sera le nombre d'arbres de la forêt en 2026 ? On arrondira le résultat à l'unité.
5. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, déterminer dans combien d'années le nombre d'arbres de la forêt aura augmenté de 10 % par rapport à 2020.
6. ALGO Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte que la variable n contienne, en fin d'exécution, la réponse à la question 5.

```
u ← 50
n ← 0
Tant que ...
    u ← ...
    n ← ...
```

54 **Modéliser**

On place 10 000 € sur un compte rémunéré à 1,75 % et on effectue à chaque fin d'année un retrait de 225 €. On appelle c_n le capital à la fin de l'année n, après le retrait.

1. Déterminer c_0, puis c_{n+1} en fonction de c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que $c_n \leqslant 10\,000$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite (c_n) est décroissante.
4. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

55 ALGO

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5$$

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour que la variable u contienne le terme de rang n de la suite (u_n) en fin d'éxécution.

```
u ← 5
Pour k allant de 1 à ...
    u ← ...
```

2. On considère la somme S définie par :

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Modifier l'algorithme précédent pour qu'il calcule la valeur de S.

3. Que vaut S lorsque $n = 5$?

Partie B

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
b. Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5.$$

4. Démontrer que $S = 20\left(1 - 0{,}5^{n+1}\right) + \dfrac{n^2 - 9n - 10}{2}$.

56 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

On considère également la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n^2$.

1. Voici un extrait d'une feuille de tableur.
Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 puis recopiées vers le bas pour afficher les termes des suites (u_n) et (v_n) ?

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1	1
3	1	4	3
4	2	9	5
5	3	16	7
6	4	25	9

2. a. Conjecturer la nature de la suite (v_n) et son expression explicite.
b. En déduire alors une conjecture de l'expression de (u_n) en fonction de n uniquement.
3. Démontrer l'expression conjecturée pour u_n en fonction de n en utilisant un raisonnement par récurrence.

57 TABLEUR

Raisonner, représenter

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 11$ et, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 0{,}8a_n - 0{,}6b_n + 2$$
$$\text{et } b_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}8b_n - 2.$$

1. a. Recopier et compléter la feuille de tableur ci-contre afin d'afficher les 50 premiers termes de chaque suite.

	A	B	C
1	n	a_n	b_n
2	0	0	11
3	1		

b. Représenter ensuite graphiquement le nuage de points de coordonnées $(a_n ; b_n)$.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(a_n - 4)^2 + (b_n - 2)^2 = 97$.

b. Que peut-on en déduire ?

58 Démontrer par récurrence la formule de dérivation des fonctions puissances qui, à tout réel x, associent x^n pour tout entier $n \geqslant 2$.

59 On considère une fonction f définie sur un intervalle I et telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0, où $u_0 \in I$, et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose f croissante sur I. Montrer que la comparaison des deux premiers termes de la suite (u_n) permet de connaître son sens de variation.

2. On suppose f décroissante sur I.

a. Montrer que $u_n \leqslant u_{n+1}$ implique $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.

b. Que peut-on alors en déduire pour la suite (u_n) ?

60 PRISE D'INITIATIVE

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On suppose que f est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout réel x appartenant à I, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0, où $u_0 \in I$, et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Montrer que la suite (u_n) est bornée.

61 **La tour de Hanoï**

La tour de Hanoï est un casse-tête qui consiste à déplacer l'empilement « en pyramide » de disques percés de différents diamètres d'une tige à l'autre en un minimum d'étapes. Les disques sont à déplacer un à un et un disque ne peut pas se trouver au-dessus d'un disque de diamètre inférieur.

On note D_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour transporter une tour de n étages ($n \geqslant 1$).

1. a. Calculer D_1, D_2 et D_3.

b. Montrer que $D_4 = 15$.

2. Chercher une relation de récurrence suivie par la suite (D_n).

3. Conjecturer une expression de D_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture par récurrence.

4. En admettant que l'on déplace un disque par seconde, quel temps faudra-t-il pour reconstituer une tour de 80 étages ?

62 **Raisonner**

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

On considère également la suite numérique (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$

b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) puis de celui de la suite (u_n).

63 1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - n + 5$.

a. Quel est le sens de variation des suites (v_n) et (w_n), définies pour tout entier naturel n par $v_n = 2^n$ et par $w_n = -n + 5$?

b. Peut-on en déduire le sens de variation de la suite (u_n) ?

c. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Étudier le sens de variation de la suite (t_n), définie pour tout entier naturel n par $t_n = 0{,}5^n - 5n + 2$.

64 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. a. Montrer que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Montrer que la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, est une suite arithmétique.

b. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c. Refaire la démonstration de la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la formule explicite que l'on vient de trouver.

65 **Calculer, représenter**

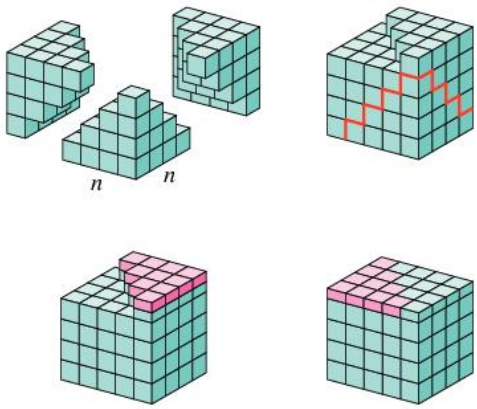
On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. **Une « démonstration » géométrique et visuelle**

En observant les schémas ci-dessous, retrouver la formule précédente.



66 Démontrer que les inégalités suivantes sont vraies à partir d'un certain rang que l'on précisera. On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ pour n entier naturel non nul.

1. $2^n > n^2$ 2. $2^n \leqslant n!$
3. $3^n > n^3$ 4. $3^n < n!$

67 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées au centième près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

b. Sans utiliser de raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

En déduire une validation de la conjecture.

3. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c. Refaire une démonstration de la croissance de la suite (u_n) à partir de la formule que l'on vient d'obtenir.

68 VRAI OU FAUX **Des multiples**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $4n^3 - n$ est un multiple de 3 quel que soit l'entier n.
2. $5^{2n} - 1$est un multiple de 24 quel que soit l'entier n.
3. $5^{2n+3} - 4^{n+1}$ est un multiple de 11 quel que soit l'entier n.

69 **Raisonner, calculer**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3n - 7$.

On souhaite démontrer qu'une formule explicite pour cette suite est $u_n = \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{17}{2}n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

1. **Un raisonnement par récurrence**

Démontrer la formule précédente en utilisant un raisonnement par récurrence.

2. **Un raisonnement direct**

On considère la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme -7.

b. On considère, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$S_n = u_n - u_0.$$

c. Calculer cette somme d'une autre manière.

d. Comparer les deux expressions obtenues et conclure.

3. **Dans le cas général**

On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + an + b$. Les nombres u_0, a et b sont des nombres réels connus.

On souhaite déterminer une formule explicite pour cette suite.

Considérer la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ et utiliser le même raisonnement qu'à la question précédente pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, u_0, a et b, pour tout entier naturel n.

70 **Raisonner, calculer**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3^n - 7$.

On souhaite démontrer qu'une formule explicite pour cette suite est $u_n = \dfrac{3^n}{2} - 7n + \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Un raisonnement par récurrence**

Démontrer la formule précédente en utilisant un raisonnement par récurrence.

2. **Un raisonnement direct**

On considère la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

On considère la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

a. Calculer cette somme de deux manières différentes.

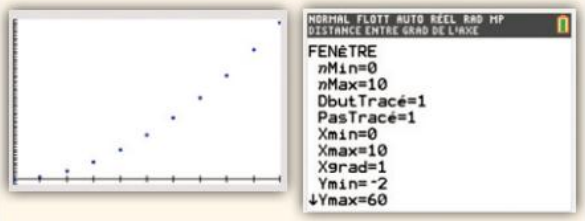
b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

71 PRISE D'INITIATIVE

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et telle que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + n + \frac{3}{2}.$$

On a représenté à la calculatrice le nuage de points constitué des 10 premiers termes de cette suite.



• Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la formule conjecturée par récurrence pour tout entier naturel n.

72 1. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'ensemble $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

On admet que f est indéfiniment dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, c'est-à-dire que l'on peut dériver la dérivée f' de f, puis dériver à nouveau, etc.

On note $f^{(0)} = f$; $f^{(1)} = f'$ la dérivée de f, puis $f^{(2)}$ la dérivée de la dérivée de f, et ainsi de suite.

On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. $f^{(n+1)}$ est alors la dérivée de $f^{(n)}$.

Démontrer que, pour tout réel x non nul et pour tout entier naturel n, on a : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définie sur l'ensemble $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

On admet que g est indéfiniment dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et on note $g^{(n)}$ sa dérivée n-ième

Démontrer que, pour tout réel x non nul et pour tout entier naturel n, on a : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

73 Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous en utilisant des raisonnements par récurrence ou des raisonnements directs.

1. $u_n = \frac{n-1}{2n-1}$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. $u_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}$, pour tout entier naturel n.

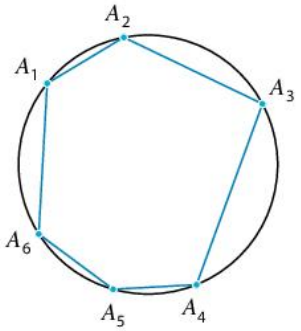
3. $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, puis $v_n = u_n + \frac{1}{2n}$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

4. $u_n = n^2 - 2^n$, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

5. $u_n = n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, pour tout entier naturel n non nul.

74 Sur un cercle, on dispose dans l'ordre n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. On obtient alors un polygone inscrit dans le cercle.

Sur la figure ci-dessous construite pour $n = 6$, on a tracé le polygone de sommets $A_1, A_2, \ldots, A_6$.



On cherche à déterminer le nombre D_n de diagonales d'un tel polygone.

1. Étude pour quelques polygones

a. Déterminer les valeurs de D_n pour n allant de 3 à 6.

b. Déterminer alors deux réels a et b tels que, pour n allant de 3 à 6, $D_n = an^2 + bn$.

2. Cas général

a. Déterminer une relation de récurrence entre les nombres D_{n+1} et D_n.

b. Déterminer D_n en fonction de n pour tout n supérieur ou égal à 3.

75 PRISE D'INITIATIVE

Montrer que la somme des angles (en degré) d'un polygone à n côtés (où $n \geqslant 3$) est égale à $180(n-2)$.

76 ALGO PYTHON

1. Voici un script écrit en langage Python.

```
def somme(N):
    S=0
    for i in range(N):
        S=S+i*(N-i)
    return S
```

Quel résultat s'affiche dans la console si l'on y entre l'instruction somme(3) ? somme(4) ?

2. On appelle S_p le résultat affiché quand l'argument N prend la valeur p, où p est un entier naturel non nul. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$S_{p+1} = S_p + \frac{p(p+1)}{2}.$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul p, $S_p = \frac{p^3 - p}{6}$.

77 PRISE D'INITIATIVE

Démontrer que tout nombre entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme $n = 5a + 7b$, où a et b sont deux entiers.

ZOOM SUR... le raisonnement par récurrence

Comme il n'est pas toujours spécifié dans un sujet de bac qu'il faut utiliser le raisonnement par récurrence, il faut avoir ce raisonnement à l'esprit lorsqu'on demande de démontrer une propriété qui dépend d'un entier naturel n.
La rédaction est très importante : il faut bien vérifier l'initialisation de la propriété pour une première valeur de n (0 ou 1 souvent), puis vérifier l'hérédité. On conclut sur le fait que la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier naturel n supérieur au rang où l'on a initialisé.

78 20 min

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$. On considère également la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait d'une feuille de tableur.
Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules B3 et C2 puis copiées vers le bas afin d'afficher les termes des suites (u_n) et (v_n) ?

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	

2. Conjecturer la nature de la suite (v_n) puis une expression de v_n en fonction de l'entier n uniquement. Conjecturer ensuite une expression de u_n en fonction de l'entier n uniquement.
3. Démontrer que l'expression conjecturée pour u_n en fonction de n est vraie pour tout entier naturel n, en utilisant un raisonnement par récurrence.

79 15 min

En mars 2020, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2021 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2020+n)$. Ainsi, $h_0 = 80$.

a. Donner l'expression de h_{n+1} en fonction de h_n.

b. Démontrer par récurrence que la suite (h_n) est croissante.

80 20 min

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau suivant (arrondir les valeurs de u_n à 10^{-2}).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

b. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n non nul et en déduire une démonstration de la conjecture faite à la question 1.b.

81 40 min ALGO PYTHON

1. On considère le programme suivant, écrit en Python.

```
from math import sqrt
def exbac(a,b,N):
    u=a
    v=b
    n=0
    while n<N:
        n=n+1
        u=(a+b)/2
        v=sqrt((a**2+b**2)/2)
        a=u
        b=v
    return u,v
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer ce qu'affiche l'instruction exbac(4,9,2), saisie dans la console.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Les valeurs de u et v seront arrondies au millième.

2. Dans cette question et la suivante, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ et on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{{u_n}^2 + {v_n}^2}{2}}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$${v_{n+1}}^2 - {u_{n+1}}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer ${v_{n+1}}^2$ et ${v_n}^2$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

82 30 min ALGO PYTHON

Partie A

On considère le script suivant écrit en Python.

```
def liste_termes_u(p):
    L=[5]
    for k in range(1,p+1):
        L.append(0.5*L[-1]+0.5*(k-1)-1.5)
    return L
```

Qu'obtient-on si l'on entre l'instruction liste_termes_u(2) dans la console ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5.$$

1. Après avoir saisi dans la console l'instruction liste_termes_u(4) on obtient : [5;1.0;–0.5;–0.75;–0.375]. Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

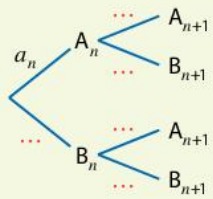
4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5.$$

83 40 min

Une plateforme propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :
• si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
• si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.
Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :
• A_n : « la n-ième partie est une partie de type A » ;
• B_n : « la n-ième partie est une partie de type B » ;
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3.$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1]. La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$.

2. **Étude d'un cas particulier**
Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.
a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$.
b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

3. **Étude du cas général**
Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle [0 ; 1]. On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0{,}6$.
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6$.
c. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B.
Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

84 30 min

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 3^n + n - 1.$$

c. Calculer $\sum_{k=0}^{100} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{100}$.

On rappelle que, pour tout entier naturel n :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ et, pour $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

d. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui calcule la somme ci-dessus.

Consolider ses acquis

85 Étude de deux suites

On considère deux suites :
• (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,3x + 2$.
• (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = g(v_n)$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Questions Va piano

1. a. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
b. À l'aide du tableur de la calculatrice, émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n), puis la démontrer par récurrence.
2. a. Montrer que g est croissante sur $]0 ; +\infty[$.
b. Montrer par récurrence que $v_n > 0$ pour tout entier naturel n.
c. À l'aide du tableur de la calculatrice, émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (v_n), puis le démontrer par récurrence.

Questions Moderato

1. a. Démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n.
b. Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur leurs ensembles de définition.
c. Étudier, en utilisant un raisonnement par récurrence, le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
2. Pour une suite du type $u_{n+1} = h(u_n)$, où h est une fonction croissante, quel est le lien entre le sens de variation de la fonction h et le sens de variation de la suite (u_n) ?

Questions Allegro

1. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
2. Pour une suite du type $u_{n+1} = h(u_n)$, le sens de variation de h donne-t-il le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Que peut-on dire de la monotonie d'une suite du type $u_{n+1} = h(u_n)$, où h est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

Se préparer aux études supérieures

86 Récurrence linéaire d'ordre 2

Approfondissement

On dit qu'une suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si elle vérifie une relation de récurrence du type :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (1)

où a et b sont des réels donnés.
La donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit une unique suite vérifiant la relation (1).
1. Montrer qu'une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q non nulle vérifie la relation (1) si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
Cette équation est appelée équation caractéristique de la suite linéaire d'ordre 2.
2. On admet le théorème suivant.
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$.
• **Cas $\Delta > 0$.** L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2.
(u_n) vérifie (1) si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.
• **Cas $\Delta = 0$.** L'équation caractéristique possède une solution double réelle, notée x_0.
(u_n) vérifie (1) si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$.
• **Cas $\Delta < 0$.** Ce cas nécessite l'utilisation des nombres complexes.
a. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$, $u_1 = -15$ et $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n$.

Déterminer une formule explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
b. Soit la suite (F_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$,

appelée suite de Fibonacci, du nom du mathématicien italien du XIII^{e} siècle.
• Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).$$

où φ est le nombre d'or $\left(\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
• Montrer ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \frac{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n}}.$$

• Conjecturer la valeur du rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

1 Mathematical induction

Mathematical induction is a special way of proving things. It has three steps:
- **Step 1.** "Initial step": show that the property is true for the first case (usually $n = 1$).
- **Step 2.** "Inductive step": show that if we assume that any case ($n = k$) is true, then the next one ($n = k + 1$) is also true.
- **Step 3.** Conclusion.

1. Read the text below and identify each step.
Is $3^n - 1$ a multiple of 2 for each integer $n \geqslant 1$?
For $n = 1$, $3^n - 1 = 3^1 - 1 = 2$, so it is true for $n = 1$.
We assume that $3^k - 1$ is a multiple of 2 and we now prove that $3^{k+1} - 1$ is also a multiple of 2.
Hint: $3^{k+1} - 1 = 3^k \times 3 - 1$ and then we split 3 in $2 + 1$.
Thus $3^{k+1} - 1 = (2 + 1)3^k - 1 = 2 \times 3^k + 3^k - 1$.
2×3^k is a multiple of 2 and we have assumed that $3^k - 1$ is a multiple of 2,
so $3^{k+1} - 1$ is also a multiple of 2 as a sum of two multiples of 2.
Therefore $3^n - 1$ is a multiple of 2 for each integer $n \geqslant 1$.
2. Using mathematical induction, show that when you add up n odd numbers, you obtain n^2.
3. Search online for the definition of triangular numbers and prove that the n^{th} triangular number can be written like this: $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 From recurrence relation to explicit formula

u is the sequence defined by $u_0 = 1$ and $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

Compute the first terms of u and find the expression of u_n in terms of n. Prove it.

3 Matching game PAIR WORK

Match each term with its definition.

Sequence	•	• u_{n-1} and u_n
Pattern	•	• Each term of the sequence is obtained from the previous term by adding or subtracting a fixed quantity
Recursive	•	• Step 1: base case; Step 2: if you assume that a statement is true for k then it is going to be true for $k + 1$.
Arithmetic sequence	•	• A whole number
Successive terms	•	• A sequence in which each term is a constant multiple of the preceding term
Geometric sequence	•	• A set of numbers which are in a particular order and which lead to a particular result
Proof by induction	•	• Involving a process that is applied repeatedly
Integer	•	• The regular way in which something happens

Final exam Past papers

1. The sequence $x_1, x_2, x_3, \ldots$ is generated by the relationship $x_{n+1} = 2x_n - n + 1$, where $x_1 = 3$.
Use mathematical induction to prove that $x_n = 2^n + n$ for all positive integers n.

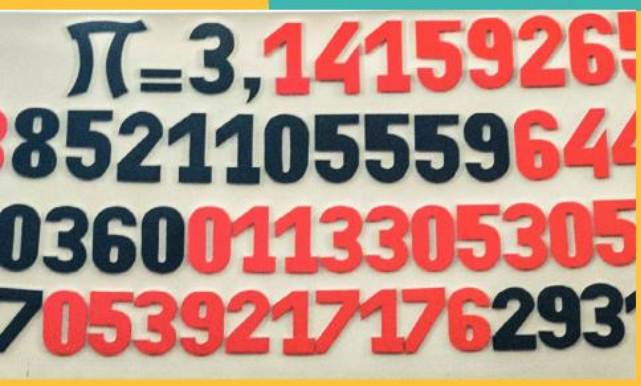
2. The sequence of positive numbers $u_1, u_2, u_3, \ldots$ is such that $u_1 < 3$ and , for $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 9}{u_n + 4}$.
1. By considering $3 - u_{n+1}$ or otherwise, prove by mathematical induction that $u_n < 3$ for all positive integers n.
2. Show that $u_{n+1} > u_n$ for $n \geqslant 1$.

CHAPITRE

2 Limites de suites

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe



Une suite pour approcher π

Srinivasa Ramanujan

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) est un mathématicien indien. Issu d'une famille modeste, il est autodidacte en mathématiques. À sa mort, il laisse des cahiers entiers de résultats non démontrés (appelés les *Cahiers de Ramanujan*) qui, encore aujourd'hui, continuent à être étudiés.

En 1987, les frères écossais Jonathan et Peter Borwein ont démontré un ensemble de formules que Ramanujan avait découvertes en 1910 et qui figuraient dans son premier article publié en Angleterre, mais sans aucune démonstration. La plus surprenante, et aussi la plus efficace, est la suivante.

« La suite (S_n), définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(4k)!}{(k!)^4}\times\frac{1\,103+26\,390k}{396^{4k}}\right]$$

tend vers $\frac{1}{\pi}$ lorsque n tend vers l'infini. »

On précise que $0! = 1$ et que, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$k! = 1\times 2\times \ldots \times k.$$

Cette formule fournit huit décimales supplémentaires de $\frac{1}{\pi}$ à chaque nouveau terme de la suite (S_n).

Calculer les termes S_0 et S_1 de la suite (S_n) donnée ci-dessus, puis déterminer la distance entre ces nombres et $\frac{1}{\pi}$ sous la forme d'une écriture scientifique.

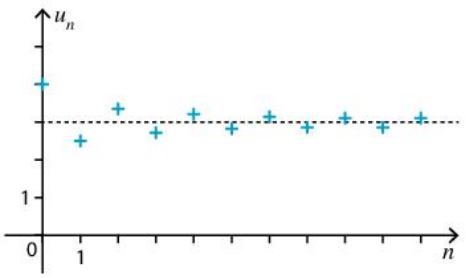
Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

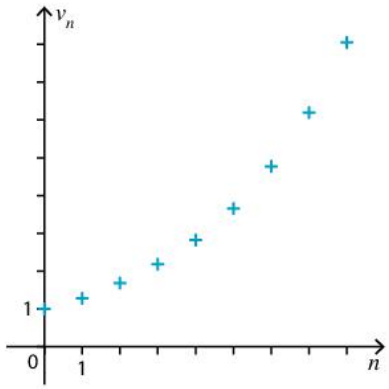
1 Notion intuitive de limite

Conjecturer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de chacune des deux suites représentées ci-dessous.

1.



2.



2 Suite définie par une relation de récurrence

On s'intéresse aux suites (u_n) telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_n^2.$$

• Recopier et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de la calculatrice.

u_0	−1	0,25	3
u_1			
u_2			
u_5			

3 Sens de variation d'une suite

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

a. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 3n$

b. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

c. $u_n = 5 - 2n^2$

d. $u_n = 1 - 2 \times 0{,}5^n$

4 Suite géométrique

1. Soit (v_n) la suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme v_0 égal à 1. Donner l'expression de son terme général v_n en fonction de n.

2. Déterminer la valeur de la variable n en fin d'exécution de l'algorithme ci-dessous.

$n \leftarrow 0$
Tant que $1{,}5^n \leqslant 1\,000$
$n \leftarrow n + 1$

3. Que renvoie cet algorithme pour la suite (v_n) ?

5 Suite arithmético-géométrique

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite. Cette suite est-elle géométrique ?

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n - 1.$$

a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En donner la raison et le premier terme.

c. Calculer la somme des 30 premiers termes de la suite (v_n).

6 Démonstration d'inégalités

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{3n+1}{2n+5}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Cette suite est minorée par 0.

2. Cette suite est minorée par $\frac{1}{5}$.

3. Cette suite est majorée par −2.

4. Cette suite est majorée par 2.

7 Raisonnement par récurrence

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

• Démontrer par récurrence que cette suite est constante.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Atteindre ou non une limite TABLEUR

Objectif Conjecturer la limite d'une suite à l'aide d'un tableur.

Une action d'entreprise vaut 15 € un jour zéro.
On suppose qu'à partir de ce jour zéro commence une période de fortes turbulences boursières et que la valeur de l'action perd 85 % de sa valeur par jour.
Afin de renflouer l'entreprise pendant la durée de la crise boursière, on injecte chaque jour des liquidités à hauteur de 8,5 € par action.
On note u_n la valeur en euro de l'action le jour n.
On a alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = 0{,}15u_n + 8{,}5 \end{cases}$$

Les premiers termes de cette suite ont été calculés à l'aide d'un tableur et figurent dans la copie d'écran ci-contre.

	A	B
1	**n**	**u_n**
2	0	15
3	1	10,75
4	2	10,1125
5	3	10,016875
6	4	10,0025313
7	5	10,0003797
8	6	10,000057
9	7	10,0000085
10	8	10,0000013
11	9	10,0000002
12	10	10

1. Quelle formule, saisie en B3 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les premiers termes de la suite (u_n) ?
2. On admet que la suite (u_n) a une limite finie quand n tend vers $+\infty$. À partir du tableau ci-contre, conjecturer la limite ℓ de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.
3. Dans chacun des trois cas suivants, donner le premier rang N tel que :
   a. la distance entre les réels u_N et ℓ soit inférieure à 0,5 ;
   b. $u_N \in]\ell - 0{,}01 ; \ell + 0{,}01[$;
   c. $|u_N - \ell| < 10^{-5}$.
4. D'après le tableur, $u_{10} = 10$. Que peut-on en penser ?

Situation 2 Des règles sur les limites

Objectifs Manipuler des inégalités et découvrir quelques règles pour les limites et opérations.

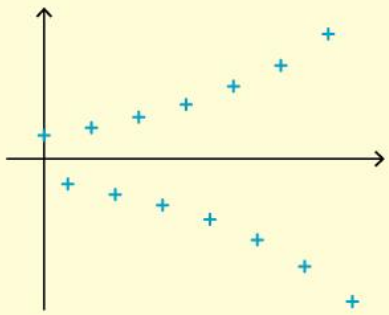
On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) telles que :
- $u_n \geqslant 150\,000$ dès que $n \geqslant 28$;
- $v_n \geqslant 200\,000$ dès que $n \geqslant 44$;
- $w_n \leqslant -175\,000$ dès que $n \geqslant 25$;
- $x_n \leqslant -180\,000$ dès que $n \geqslant 9$.

1. **a.** À partir des informations données dans l'énoncé, quelle inégalité peut-on écrire sur la somme $u_n + v_n$ lorsque $n \geqslant 44$?
   b. Si les suites (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$, conjecturer alors le comportement de la suite $(u_n + v_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. **a.** De même, quelle inégalité peut-on écrire sur la somme $w_n + x_n$ lorsque $n \geqslant 25$?
   b. Si les suites (w_n) et (x_n) divergent vers $-\infty$, conjecturer alors le comportement de la suite $(w_n + x_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Sous les mêmes hypothèses, conjecturer d'autres règles en travaillant avec les suites $(u_n \times v_n)$, $(u_n \times w_n)$, $(w_n \times x_n)$ et $(u_n + w_n)$.

Situation 3 Suites du type (q^n) LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Conjecturer le comportement asymptotique des suites du type (q^n) suivant les valeurs du réel q.

1. Ouvrir une fenêtre dans un logiciel de géométrie dynamique.
Dans la fenêtre graphique, créer un curseur q variant de –10 à 10.
2. Dans le tableur du logiciel, afficher dans une première colonne les valeurs de n pour n allant de 0 à 14.
Dans une seconde colonne, afficher les termes d'indice 0 à 14 de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.
3. Afficher les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ pour n allant de 0 à 14.
4. Rajesh a obtenu l'affichage ci-dessous mais les graduations des axes ont disparu.



a. Quelle inégalité sur q peut-on déduire du graphique ?

b. La suite semble-t-elle convergente ?

5. Faire varier le curseur et observer les effets sur le comportement de la suite.
Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre sur la convergence des suites du type (q^n) selon les valeurs prises par q, ainsi que sur leur éventuelle limite ?

Situation 4 Encadrer des suites

Objectif
Conjecturer le comportement d'une suite encadrée par deux suites qui convergent vers la même limite.

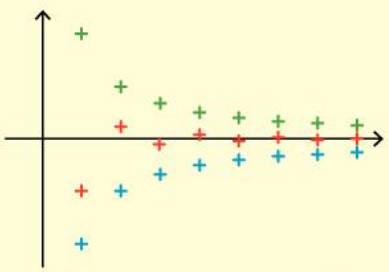
On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^2}$.

1. Donner un encadrement de $(-1)^n$ pour tout entier naturel n non nul.
2. En déduire un encadrement de v_n pour tout entier naturel n non nul.
3. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\dfrac{1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{1}{n^2}$.

a. Ordonner les termes u_n, v_n et w_n pour tout entier naturel n non nul.

b. Déterminer la limite des suites (u_n) et (w_n).

c. On a représenté graphiquement les trois suites dans un repère où les axes ne sont pas gradués. Identifier chacune d'elles.



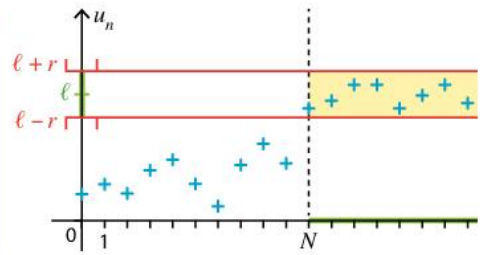
d. Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement à l'infini de la suite (v_n) ?

1. Définitions des limites

1. Limite finie et suites convergentes

Définitions

Soit ℓ un réel. Une suite (u_n) a pour **limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que (u_n) est **convergente** et converge vers ℓ.



Cette définition revient à dire que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque, pour tout $r > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < r$.

Remarque

$|u_n - \ell|$ représente la distance entre u_n et ℓ.

DÉMO p. 53

Propriété

La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Propriété (admise) : limites des suites usuelles

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$, où k est un entier naturel non nul.

2. Suites divergentes

Définition

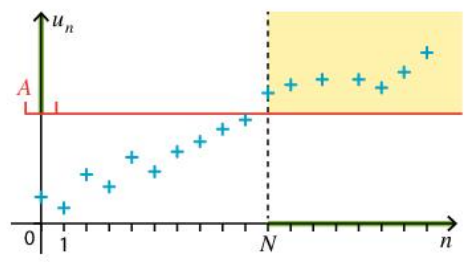
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Définitions

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) lorsque tout intervalle de la forme $[A\ ;\ +\infty[$ (respectivement de la forme $]-\infty\ ;\ A]$) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

On dit alors que (u_n) **diverge vers** $+\infty$ (respectivement **vers** $-\infty$).



Cette définition revient à dire que :
- (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$;
- (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant A$.

Remarque

Certaines suites divergent et n'ont pas de limite, par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.

Propriété (admise) : limites des suites usuelles

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$, où k est un entier naturel non nul.

Méthode 1 Déterminer une limite finie en utilisant la définition

On s'intéresse à la suite (u_n), définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 5 - \frac{1}{n}$.

1. Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

n	1	10	100	1 000
u_n				
$\lvert u_n - 5\rvert$				

2. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Solution commentée

1.

n	1	10	100	1 000
u_n	4	4,9	4,99	4,999
$\lvert u_n - 5\rvert$	1	0,1	0,01	0,001

2. D'après le tableau, il semblerait que la suite (u_n) converge vers 5.

Soit $r > 0$. On cherche un rang N à partir duquel $\left|5 - \frac{1}{n} - 5\right| < r$, ce qui revient à $\left|\frac{1}{n}\right| < r$, c'est-à-dire, comme $n > 0$, $\frac{1}{n} < r$ ou encore, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$, $n > \frac{1}{r}$.

Donc, si l'on prend un entier N supérieur à $\frac{1}{r}$, on a, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - 5| < r$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

EXERCICE 1 p. 60

Méthode 2 Déterminer une limite infinie en utilisant la définition

On s'intéresse à la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2 - 3n$.

1. Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

n	1	10	100	1 000
v_n				

2. Déterminer le plus petit rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant -1\,000$
3. Conjecturer le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Solution commentée

1.

n	1	10	100	1 000
v_n	−1	−28	−298	−2 998

2. $v_n \geqslant -1\,000$ équivaut à $2 - 3n \geqslant -1\,000$, ou encore $n \geqslant \frac{1\,002}{3}$, soit $n \geqslant 334$.

Ainsi $N = 334$.

3. D'après le tableau, il semblerait que la suite (v_n) diverge vers $-\infty$.

Soit A un réel. On cherche un rang N à partir duquel $2 - 3n \leqslant A$, ce qui revient à $n \geqslant \frac{2 - A}{3}$.

Donc, si l'on prend un entier N supérieur à $\frac{2 - A}{3}$, on a, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant A$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

EXERCICE 8 p. 60

2. Limites et opérations

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soient ℓ et ℓ' deux réels. Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$.

1. Somme

Propriété (admise)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ldots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Remarques

- Dans le cas où le calcul mène à une forme indéterminée, il peut être utile de transformer l'écriture de $u_n + v_n$.
- La limite de $(u_n + \alpha)$, où α est un réel, est la limite de $(u_n + v_n)$ dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général égal à α.

2. Produit

Propriété (admise)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ldots$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	**Forme indéterminée**

Remarques

- Quand le tableau indique $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \infty$, il faut utiliser la règle des signes pour conclure.
- La limite de (ku_n), où k est un réel non nul, est la limite de $(u_n \times v_n)$ dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général égal à k.

3. Quotient

Propriété (admise)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	$\ell' \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec v_n de signe constant	0	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ldots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

Remarque : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et si (u_n) a une limite, il faut qu'à partir d'un certain rang le signe de v_n soit constamment positif ou constamment négatif pour pouvoir appliquer la règle des signes et conclure sur la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Méthode 1 Déterminer une limite en utilisant les opérations

Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n par :

1 $u_n = n^2 + n - 6$ 2 $v_n = (2 - 5n)\sqrt{n}$

Solution commentée

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-6) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-6) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par produit et en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n) = -\infty$ puis, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2-5n) = -\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2-5n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc, par produit et en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

EXERCICE 13 p. 61

Méthode 2 Lever une indétermination

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2 - 10n + 5 \text{ et } v_n = \frac{2n-4}{3+n}.$$

1 Montrer que, pour chacune de ces suites, les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure sans transformer les expressions.

2 En transformant l'écriture des termes généraux de chacune d'entre elles, calculer leurs limites.

Solution commentée

1 • $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n) = -\infty$ puis, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n+5) = -\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n+5) = -\infty$: on ne peut donc pas conclure.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ puis, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-4) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+n) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+n) = +\infty$: on ne peut donc pas conclure.

2 • Pour tout entier $n \geqslant 1$, en factorisant par n^2, on obtient $u_n = n^2\left(1 - \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{10}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}$ et, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$, donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Pour tout entier $n \geqslant 1$, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$v_n = \frac{n\left(2 - \frac{4}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n} + 1\right)} = \frac{2 - \frac{4}{n}}{\frac{3}{n} + 1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{4}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}$ et, par somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{4}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n} + 1\right) = 1$, ce qui donne, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

EXERCICE 16 p. 61

3. Limites et comparaison

1. Limite infinie

Théorème

DÉMO p. 53

Soit N un entier naturel.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

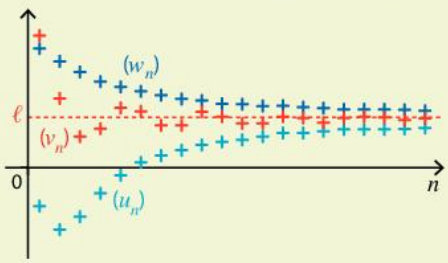
Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n + \cos(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $-1 \leqslant \cos(n) \Leftrightarrow n - 1 \leqslant n + \cos(n) \Leftrightarrow n - 1 \leqslant u_n$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Limite finie

Théorème des gendarmes (admis)

Soit N un entier naturel et soit ℓ un réel.
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.



Remarque

Ce théorème permet simultanément de prouver que la suite (v_n) converge et de déterminer la valeur de sa limite. Il est aussi connu sous les noms de théorème d'encadrement ou théorème « sandwich ».

Propriété

DÉMO en ligne

Soit N un entier naturel, soient ℓ et ℓ' deux réels.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.
Si (u_n) converge vers ℓ et si (v_n) converge vers ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.

Propriétés

DÉMO en ligne

Soient ℓ un réel et (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

- Si (u_n) est croissante et converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
- Si (u_n) est décroissante et converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

Méthode 1 Déterminer une limite par comparaison

Déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n^2 + (-1)^n$.

Solution commentée

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \geqslant 0$. En ajoutant n à chaque membre de l'inégalité, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \geqslant n$, ce qui équivaut à $u_n \geqslant n$.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leqslant 1$ donc, en ajoutant $-n^2$ à chaque membre de l'inégalité, on obtient $-n^2 + (-1)^n \leqslant -n^2 + 1$. Donc $u_n \leqslant -n^2 + 1$, pour tout entier naturel n.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2 + 1) = -\infty$.

   Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

EXERCICE 20 p. 62

Méthode 2 Déterminer la limite d'une suite avec le théorème des gendarmes

1. Déterminer la limite de la suite (w_n), définie pour tout entier naturel n tel que $n > 1$ par :
$$w_n = \frac{1}{n + \cos(n)}.$$
2. Étudier la convergence de la suite (z_n), définie pour tout entier naturel n par $z_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n tel que $n > 1$, on a $1 \geqslant \cos(n) \geqslant -1$, d'où $n + 1 \geqslant n + \cos(n) \geqslant n - 1$.

   Or, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n + \cos(n)} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$, soit $\dfrac{1}{n+1} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$. D'où, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n-1}$.

   D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   En ajoutant 2 à chaque membre de l'inégalité, on obtient $1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$.

   Puis en divisant par $n^2 + 1$, quantité positive, on a $\dfrac{1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \leqslant \dfrac{3}{n^2+1}$, d'où :

   $1 + \dfrac{1}{n^2+1} \leqslant z_n \leqslant 1 + \dfrac{3}{n^2+1}$ pour tout entier naturel n.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$ donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n^2+1} = 0$.

   Enfin, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right) = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n^2+1}\right)$.

   D'après le théorème des gendarmes, on a donc : la suite (z_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 1$.

EXERCICE 24 p. 62

4. Suites géométriques, suites monotones

1. Suites du type (q^n)

Propriétés

Soit q un réel.

DÉMO p. 52 et p. 53

- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exemples

- Soit $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $2 > 1$ donc, d'après la propriété, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- Soit $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc, d'après la propriété, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Remarque

Ce théorème permet en particulier de conclure sur la convergence ou la divergence d'une suite géométrique et d'en calculer la limite éventuelle.

2. Suites monotones

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Soient M et m deux réels.

Théorème (admis)

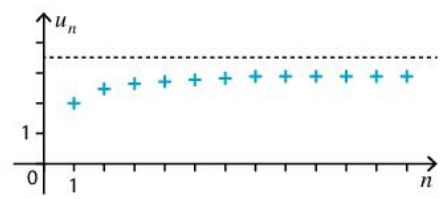
- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Corollaire

- Si (u_n) est croissante et majorée par M, alors (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant M$.
- Si (u_n) est décroissante et minorée par m, alors (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant m$.

Remarque

Le théorème assure de l'existence de la limite ℓ de la suite mais il ne donne pas la valeur de cette limite. Le corollaire précise que si la suite est majorée par M, alors $\ell \leqslant M$.
Par exemple, pour la suite représentée ci-contre, 3,5 est un majorant mais n'est pas la limite.



Théorème

DÉMO p. 53

- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Méthode 1 Déterminer la limite d'une suite du type (q^n)

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = \frac{1}{2^n}$ 2. $v_n = \frac{5^n}{3^n}$

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{5^n}{3^n} = \left(\frac{5}{3}\right)^n$. Or $\frac{5}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

EXERCICE 27 p. 62

Méthode 2 Étudier la convergence d'une suite géométrique

Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

1. (w_n), suite géométrique de raison $-\frac{5}{3}$ et de premier terme égal à 5.
2. (z_n), suite géométrique de raison e et de premier terme égal à –2.

Solution commentée

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 5 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^n$. Or $-\frac{5}{3} < -1$, donc, d'après le théorème du cours, $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$ n'admet pas de limite.
Donc la suite (w_n) diverge et n'admet pas de limite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = -2 \times e^n$. Or $e > 1$, donc, d'après le théorème du cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.
Et, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$. La suite (z_n) diverge donc vers $-\infty$.

EXERCICE 28 p. 62

Méthode 3 Prouver la convergence d'une suite monotone

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $P(n) : u_n \geqslant 2$. On raisonne par récurrence.
• **Initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ donc $P(0)$ est vraie.
• **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \geqslant 2$.
Alors $\frac{1}{2}u_k \geqslant 1$, donc $\frac{1}{2}u_k + 1 \geqslant 2$, soit $u_{k+1} \geqslant 2$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
• **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$. La suite (u_n) est minorée par 2.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$.
Or $u_n \geqslant 2$, donc $-\frac{1}{2}u_n \leqslant -1$, donc $-\frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est minorée et décroissante, donc elle est convergente, c'est-à-dire qu'elle admet une limite réelle que l'on note ℓ. Comme, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, on peut conclure que $\ell \geqslant 2$.

EXERCICE 38 p. 63

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soit q un réel.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.

Démonstration

- Soit a un réel positif. On commence par démontrer l'inégalité de Bernoulli :

pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $P(n)$: $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
On démontre par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
- **Initialisation.** $(1+a)^0 = 1+0a = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $(1+a)^k \geqslant 1+ka$. Comme $1+a > 0$, on a :
$(1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a)$, soit $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+ka+a+ka^2 \geqslant 1+(k+1)a$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n :
pour tout réel positif a et pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

- Si $q > 1$, alors il existe un réel $a > 0$ tel que $q = 1+a$ et donc, pour tout entier naturel n, $q^n \geqslant 1+na$ (d'après l'inégalité de Bernoulli).
$a > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$ et donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. (1)

- Si $q = 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $q^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

- Si $0 < q < 1$, alors $\dfrac{1}{q} > 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$, d'après la démonstration dans le cas $q > 1$.

Donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

- Si $-1 < q < 0$, alors, pour tout entier naturel n, $-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$.

Or $0 < |q| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = \lim\limits_{n\to+\infty} -|q|^n = 0$ et, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

1. Quel type de raisonnement a été utilisé pour démontrer la limite dans le cas $-1 < q < 1$?
2. À la ligne (1), pourquoi faut-il rappeler que $a > 0$ avant de conclure $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$?
3. Dans le cas $0 < q < 1$, détailler les étapes qui permettent de passer de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$ à $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
4. Dans le cas $-1 < q < 0$, justifier que, pour tout entier naturel n, $-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$.

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer le théorème suivant.

> Soit N un entier naturel.
> Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.
> Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de ce théorème.

- Traduire le fait que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ en complétant la proposition suivante avec les quantificateurs « pour tout » et « il existe ».

« … réel A, … un rang N_1 tel que … $n \geqslant N_1$, $u_n \in [A\,;+\infty[$. »

- Les rangs notés N dans le théorème et N_1 dans la proposition ci-dessus sont-ils nécessairement égaux ?
- À partir de quel rang a-t-on $u_n \leqslant v_n$ **et** $u_n \in [A\,;+\infty[$?
- Conclure.

2 On souhaite démontrer le théorème suivant.

> Si (u_n) est une suite croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de ce théorème.
Soit (u_n) une suite et soit M un réel.

- Traduire mathématiquement la proposition « (u_n) est majorée par M ».
- En déduire la traduction mathématique de la proposition « (u_n) n'est pas majorée », négation de la précédente.
- Traduire mathématiquement le fait que la suite est croissante.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 Prouver que la limite d'une suite convergente est unique.

2 Soit q un réel strictement inférieur à -1.
Prouver que la suite (q^n) diverge.

3 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

a. Prouver par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.
b. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
c. En déduire le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$.

Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver qu'une affirmation est vraie en prouvant que l'affirmation contraire est fausse. Pour cela, on suppose que l'affirmation contraire est vraie et on aboutit, par un raisonnement déductif, à une contradiction ou une conséquence absurde.

Raisonnement déductif

Le raisonnement déductif consiste, à partir de résultats reconnus ou établis comme vrais, de déduire par enchaînement logique une propriété ou un résultat.

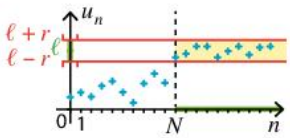
Répéter en solo

Carte mentale

Suite convergente

Soit ℓ un réel. (u_n) **converge vers** ℓ lorsque, pour tout $r > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < r$.

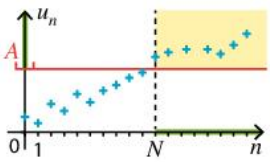
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$



Suite divergente

- (u_n) **diverge vers** $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$



- (u_n) **diverge vers** $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant A$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- Certaines suites n'admettent pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Étudier le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$

Déterminer la limite d'une suite avec les opérations

Si…					
$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	∞
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	0
alors…					
$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$+\infty$	$-\infty$	FI*	∞	∞
$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	FI	FI	FI	0	∞**

* forme indéterminée

** (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang pour conclure.

Étudier la convergence de suites de référence

- Soit un entier $k \geqslant 1$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

- Soit q un réel.

$q \leqslant -1$	(q^n) n'a pas de limite.
$-1 < q < 1$	$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
$q = 1$	$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
$q > 1$	$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Limites de suites

Comparer pour étudier la convergence d'une suite

- Soit N un entier naturel. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.
- **Théorème des gendarmes :**

si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors (v_n) converge vers ℓ.

- Si (u_n) est une suite croissante qui converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
- Si (u_n) est une suite décroissante qui converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.
- Si (u_n) est **croissante et majorée** par M, alors (u_n) **converge** et sa limite ℓ est telle que $\ell \leqslant M$.
- Si (u_n) est **décroissante et minorée** par m, alors (u_n) **converge** et sa limite ℓ est telle que $\ell \geqslant m$.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n > 0$ par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.
Il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$:
(a) $u_n = 2$ (b) $u_n < 2$ (c) $1{,}999 < u_n < 2{,}001$

2 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = (2 - 5n)(-n^2 + 3)$.
(a) La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
(b) La suite (v_n) diverge vers $-\infty$.
(c) La suite (v_n) n'a pas de limite.

3 Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel $n > 0$ par $w_n = 3 - \frac{1}{n}$.
(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{w_n - 3} = +\infty$
(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(w_n - 3)^2} = +\infty$
(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(w_n - 3)^3} = +\infty$

4 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$u_n = (-1)^n$.
(a) (u_n) n'est pas minorée.
(b) (u_n) converge.
(c) La suite de terme général $\frac{u_n}{n^2}$, où $n \geqslant 1$, est convergente.

5 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{n^2 - 3}{n + 1}$. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$. Alors :
(a) (u_n) converge.
(b) (u_n) diverge vers $+\infty$.
(c) on ne peut pas conclure sur le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

6 La suite (w_n), définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $w_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$:
(a) converge vers 0.
(b) diverge.
(c) converge vers 5.

7 La suite (w_n), définie pour tout entier naturel n par $w_n = -2 + 4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$:
(a) converge vers -2.
(b) diverge vers $+\infty$.
(c) converge vers 0.

8 Soient a un réel et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \left(\frac{a}{8}\right)^n$. Si $a \leqslant -8$, alors :
(a) la suite (u_n) converge vers 0.
(b) la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
(c) la suite diverge et n'a pas de limite.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

1 Si une suite (u_n) converge vers ℓ et que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, alors $\ell > 0$.

2 La suite (w_n), définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$, où (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes, converge.

3 Toute suite croissante à termes strictement positifs diverge vers $+\infty$.

4 La suite (u_n), définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}3u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 5.

5 Si une suite est croissante et majorée par 3, alors elle converge vers 3.

6 Il existe au moins une suite bornée qui ne converge pas.

7 Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle n'admet pas de limite.

8 La suite de terme général -3^n, pour $n \in \mathbb{N}$, diverge vers $-\infty$.

9 Toute suite à termes strictement négatifs et croissante converge.

TP 1

Objectif
Étudier le comportement d'une suite définie avec un paramètre.

Évolution d'une population de cigognes

ALGO PYTHON

L'évolution annuelle d'une population de cigognes, en millier d'individus, est modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n(1-u_n)$, où a est un réel positif dont la valeur dépend des conditions environnementales de la population étudiée.

Partie A. Calcul de termes

1. La fonction pop_cigognes ci-dessous renvoie la population de cigognes, en millier, au bout de n années. Recopier et compléter le programme de la fonction, puis l'exécuter dans l'éditeur Python.

```
1 def pop_cigognes(a,n):
2     u=...
3     for i in range(n):
4         u=...
5     return u
```

2. **a.** Dans la console, saisir les instructions :

round(pop_cigognes(1,5),3) et round(pop_cigognes(3,10),3)

b. À quoi sert la fonction round ?

c. Interpréter les valeurs obtenues en termes de population de cigognes.

d. À partir de la fonction pop_cigognes, compléter le tableau de valeurs ci-dessous après l'avoir recopié, en arrondissant la population de cigognes à l'unité près.

Valeur de a	Population au bout de 5 ans	Population au bout de 8 ans	Population au bout de 10 ans	Population au bout de 15 ans
1				
3				

Partie B. Représentations graphiques

1. Compléter le script précédent avec les lignes 8 à 13 écrites ci-dessous, puis l'exécuter. Qu'obtient-on ?

```
8  import matplotlib.pyplot as plt
9  for a in range(1,5):
10     x=[n for n in range(50)]
11     y=[pop_cigognes(a,n) for n in range(50)]
12     plt.scatter(x,y)
13     plt.show()
```

2. Pour chacune des valeurs de a étudiées, conjecturer le comportement en $+\infty$ de la suite correspondante.

3. Interpréter les résultats précédents en termes d'évolution à long terme des populations de cigognes en fonction de la valeur de a.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- L'instruction round(a,k) renvoie l'arrondi du nombre a à 10^{-k} près.
- Pour désigner une liste de nombres, on utilise des crochets en début et fin de liste. Les listes peuvent être définies en compréhension : L=[n**2 for n in range(4)] est la liste [0,1,4,9].
- L'instruction scatter(L1,L2) trace les points dont la liste des abscisses est L1 et dont la liste des ordonnées est L2.
- L'instruction show( ) permet l'affichage de la représentation graphique.

TP 2 Comprendre le problème de Bâle TABLEUR

Objectifs
Calculer des sommes et déterminer des seuils avec le tableur.

Le mathématicien Jacques Bernoulli, né à Bâle en Suisse, a étudié à la fin du XVII^e siècle la suite (S_n), définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

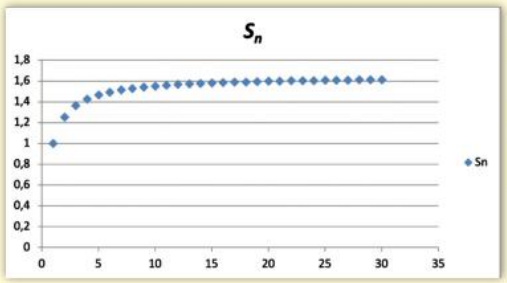
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (S_n).

2. **a.** Reproduire la feuille de calcul ci-contre.

b. Quelle formule peut-on saisir en B3 qui, par recopie vers le bas, permet d'obtenir les premiers termes de la suite (S_n) ?
Vérifier alors les résultats obtenus à la question 1.

	A	B
1	n	S_n
2	1	1
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
10	9	
11	10	
12	11	
13	12	
14	13	
15	14	
16	15	

3. **a.** Faire apparaître sur la feuille de calcul un graphique comme celui ci-dessous.



b. Conjecturer graphiquement le comportement en $+\infty$ de la suite (S_n).

4. On admet dorénavant que cette suite (S_n) converge vers un réel ℓ.
La valeur exacte de cette limite ℓ a longtemps résisté aux mathématiciens contemporains de Bernoulli à cause de la lenteur de convergence de (S_n). Le Suisse Leonhard Euler, lui aussi né à Bâle, a été le premier à conjecturer la valeur exacte de ℓ, conjecture qu'il a démontrée en 1741.

a. Écrire la formule `=RACINE(6*B2)` en C2, puis recopier cette formule vers le bas.

b. On admet que les valeurs de la colonne C convergent lentement vers un nombre remarquable.
À partir de ce résultat admis, déterminer la valeur exacte de ℓ.

5. **a.** Écrire la formule `=ABS(B2-PI()^2/6)` en D2, puis recopier cette formule vers le bas.

b. Que représentent les nombres de la colonne D ?

6. **a.** En déduire le premier rang N tel que $|S_N - \ell| < 10^{-1}$.

b. En déduire le premier rang N tel que $|S_N - \ell| < 10^{-2}$.

c. À partir des résultats précédents, conjecturer le premier rang N tel que $|S_N - \ell| < 10^{-3}$, puis vérifier la conjecture avec le tableur.

Boîte à outils

Tableur

- Pour tracer un graphique, sélectionner les cellules contenant les données à représenter, puis, dans l'onglet « Insertion », choisir le type de graphique souhaité.
- La fonction `ABS` permet de calculer la valeur absolue d'un nombre.
- `PI()` représente la constante π.

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Calculer :

a. 2^6 b. 3^4 c. -10^5 d. $\left(\frac{5}{4}\right)^2$

2 Écrire les nombres suivants sans valeur absolue.

a. $|4-2\sqrt{2}|$

b. $|e-2|$

c. $|(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})|$

3 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $|x-2|=1$ 2. $|x+5|=2$

3. $|x-3| \leqslant 0{,}1$ 4. $|x+1| \leqslant 0{,}01$

4 Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = 3n^4 - 5n^2 + 1$

2. $v_n = \dfrac{3n^2-1}{6n^2+2}$

3. $w_n = \dfrac{0{,}5n^5}{10n^4+100n^3+1\,000n^2+10\,000}$

5 (u_n) est une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant 3 \text{ et } u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2.$$

• La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante ?

6 Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

2. $v_n = 5\left(-\frac{5}{6}\right)^n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

3. $w_n = -2\dfrac{\left(\frac{2\,019}{2\,020}\right)^n + 2}{\left(\frac{-2\,019}{2\,020}\right)^n + 1}$

7 On pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{2\,019}{2\,020}\right)^n + \left(\frac{2\,018}{2\,019}\right)^n + \left(\frac{2\,017}{2\,018}\right)^n + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

• Quelle est, si elle existe, la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

8 VRAI OU FAUX

Indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier.

1. La suite de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$ converge.

2. La suite de terme général $v_n = -5n + 2\,020$ converge.

3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 - 5$ et $v_n = -2n + 3$.

a. Les deux suites divergent.

b. La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

9 Soit (u_n) la suite telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

1. Prouver par récurrence que $u_n \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

10 La suite (u_n) est telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -2$.

• Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

11 On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 5 + \dfrac{(-0{,}5)^n}{3n^3}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$5 - \frac{1}{3n^3} \leqslant v_n \leqslant 5 + \frac{1}{3n^3}.$$

2. En déduire que la suite (v_n) converge et préciser la valeur de sa limite.

12 On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul, dont on donne quelques termes : $u_1 = 0{,}1$; $u_2 = 0{,}12$; $u_3 = 0{,}123$ et $u_{11} = 0{,}1234567891011$

1. Donner la valeur de u_5 et u_{12}.

2. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

La limite de cette suite s'appelle la **constante de Champernowne** (du nom d'un mathématicien anglais du XX^e siècle). Son écriture décimale a la particularité de contenir toute séquence finie de chiffres une infinité de fois.

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, alors il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$: $u_n > 0$.
2. Une suite qui tend vers $-\infty$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Joseph fait des ricochets sur une rivière. Il lance son caillou et le premier impact sur l'eau se fait à 50 cm de lui. La distance parcourue par le caillou à chaque nouvel impact est égale à $\frac{2}{5}$ de la distance parcourue avant l'impact précédent.

- Le caillou parcourra-t-il plus de 1,5 mètre ?

Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

On considère une suite dite de Syracuse, définie par récurrence de la manière suivante pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. a. Calculer les 25 premiers termes de cette suite.
b. Que se passe-t-il à partir de u_{17} ?
2. Faire des recherches sur les suites de Syracuse et la conjecture dite de Collatz. Préciser notamment ce que l'on nomme le « temps de vol » et l'« altitude ».

Définitions de la limite d'une suite

1 On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{4}{n}$.

1. Déterminer le premier rang n tel que $|u_n| < 0{,}01$.

2. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture.

2 On s'intéresse à la suite (w_n), définie pour tout entier naturel n par $w_n = 5n - 18$.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	10	100	1 000	10 000
w_n				

2. Conjecturer le comportement de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture.

3 Soit (u_n) une suite telle qu'il existe un entier naturel N pour lequel on a $u_n \in]1{,}999 ; 2{,}001[$ pour tout $n \geqslant N$.

• Peut-on alors conclure que la suite (u_n) converge vers 2 ? Expliquer.

4 Soit (v_n) une suite telle qu'il existe un entier naturel N pour lequel on a $v_n \leqslant -10\ 000\ 000$ pour tout $n \geqslant N$.

• Peut-on alors conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$? Expliquer.

5 Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = -n^2 + 1\,000n$.

1. CALCULATRICE TABLEUR À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, afficher les 100 premiers termes de cette suite. Conjecturer le comportement de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$.

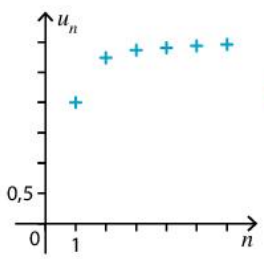
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 1\,000x$.

3. Que penser de la conjecture établie à la question 1 ? Expliquer.

6 **Représenter, raisonner**

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$.

On donne ci-contre la représentation graphique des premiers termes de cette suite.



1. À l'aide de cette représentation graphique, conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. a. Soit un réel $r > 0$. Montrer que pour tout entier naturel $n > \frac{1}{\sqrt{r}}$, on a $|u_n - 3| < r$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.

7 **Chercher, communiquer**

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$w_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. CALCULATRICE Déterminer à la calculatrice le premier entier N tel que $w_N \in]0{,}9 ; 1{,}1[$.

2. Justifier que $|w_n - 1| < 0{,}1$ si et seulement si w_n appartient à $]0{,}9 ; 1{,}1[$, puis résoudre, pour n entier naturel non nul, l'inéquation $|w_n - 1| < 0{,}1$.

3. Soit r un réel strictement positif.

a. Montrer qu'il existe un entier N tel que $|w_N - 1| < r$.

b. Justifier alors que, pour tout $n \geqslant N$:

$$|w_n - 1| < r.$$

c. Que vient-on de démontrer ?

8 Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{5n - 10}{3}.$$

1. Soit A un réel.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que :

$$t_N \geqslant A.$$

b. Prouver que, pour tout $n \geqslant N$, $t_n \geqslant A$.

2. En déduire le comportement de la suite (t_n) quand n tend vers $+\infty$.

9 ALGO **Raisonner, communiquer**

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
n ← 0
u ← 1
Tant que u ⩽ 10^6
        n ← n + 1
        u ← 2u + 1
```

Dans cet algorithme, les valeurs affectées à la variable u sont les termes d'une suite (u_n).

1. a. Quelle est la valeur de u_0 ?

b. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (u_n) ?

2. Que représente, pour la suite (u_n), la valeur de la variable n en fin d'exécution de cet algorithme ?

10 ALGO

On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 7}{n^2 + 1} = 1$ et on considère l'algorithme ci-dessous.

```
n ← 0
Tant que |(n^2 − 7)/(n^2 + 1) − 1| ⩾ 0,1
        n ← n + 1
```

1. Quelle est la valeur de la variable n en fin d'exécution de cet algorithme ?

2. Si l'on remplace le nombre 0,1 de la deuxième ligne par un réel $r > 0$, existera-t-il une valeur de n qui permettra de sortir de la boucle « Tant que » ? Expliquer.

11 ALGO **Population de bactéries**
Modéliser, raisonner

Dans un laboratoire, on étudie une variété de bactéries dont la population augmente de 2 % toutes les heures. Au début de l'étude, le nombre de bactéries est de 5 000.
On note u_n le nombre de bactéries après n heures d'expérience. Ainsi, $u_0 = 5\ 000$.
1. Calculer le nombre de bactéries après 2 heures d'expérience.
2. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous permettant de connaître le nombre d'heures nécessaires pour que la population de bactéries dépasse 10 000.

```
n ← 0
u ← ...
Tant que u ⩽ 10 000
        n ← ...
        u ← ...
```

4. Que doit-on changer dans l'algorithme de la question précédente si l'on veut connaître le nombre d'heures nécessaires pour que la population de bactéries dépasse 20 000 ?

12 ALGO PYTHON
On considère la fonction Python suivante.

```
def seuil(p):
    n=1
    while 1/n**3>=10**(-p):
        n=n+1
    return n
```

1. Qu'obtient-on si l'on saisit dans la console :
a. seuil(1) ?
b. seuil(2) ?
c. seuil(3) ?
2. Que renvoie cette fonction ?
3. Est-on certain que le nombre d'itérations de la boucle « while » sera fini quelle que soit la valeur de l'entier naturel p entré en argument ? Expliquer.

Limites et opérations

13 **Chercher, calculer**
Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes.
1. $u_n = -n^2 - 3n + 5$
2. $v_n = n^3\left(2 + \dfrac{3}{n^2}\right)$
3. $w_n = (3 - 5n)\left(n^3 - 4\right)$
4. $x_n = \sqrt{n}\left(n^2 + 2n\right)$

14 Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions suivantes.
1. $u_n = \dfrac{2n+4}{\dfrac{1}{n} - 5}$
2. $v_n = \dfrac{-3}{2n^2 + n + 1}$
3. $w_n = \dfrac{2 - \dfrac{1}{n^2}}{7 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}}$
4. $x_n = \dfrac{-4}{\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n}}$

15 1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, peut-on en déduire :
a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$?
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$?
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$?
Justifier les réponses.
2. Mêmes questions si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $v_n < 0$ pour tout entier naturel n.

16 **Raisonner, calculer**
On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - 8n + 2$.
1. a. Sans transformer u_n, expliquer pourquoi le calcul de la limite de (u_n) donne une forme indéterminée.
b. Factoriser $3n^2 - 8n + 2$ par son terme de plus haut degré, c'est-à-dire $3n^2$. En déduire la limite de (u_n).
2. En utilisant la même méthode, calculer les limites des suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :
a. $v_n = -2n^2 + 4n - 5$;
b. $w_n = 5n^3 - 3n^2 - 7n + 9$;
c. $x_n = 10n^2 - 5n^4 + 7$.

17 On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2n-4}{n^2+1}$.

1. a. Sans transformer u_n, expliquer pourquoi le calcul de la limite de (u_n) donne une forme indéterminée.

b. En factorisant le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n = \dfrac{2\left(1-\dfrac{4}{2n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}$.

c. En déduire la limite de (u_n).

2. En utilisant la même méthode, calculer les limites des suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

a. $v_n = \dfrac{2-5n}{4n+7}$ b. $w_n = \dfrac{-n^3-10n+4}{2n^2+3n+1}$

18 VRAI OU FAUX

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant chaque réponse.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

2. Si (u_n) diverge, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (ℓ réel) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.

19 **Chercher, calculer**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n+2}{u_n-1}$.

Limites et comparaison

20 **Raisonner, calculer**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$ et, pour tout $n \geqslant 10$, $v_n < -5n^3$.

• Déterminer la limite de chacune de ces deux suites. Justifier.

21 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n - 4\sin(n).$$

1. CALCULATRICE Afficher les 30 premiers termes de la suite sur le tableur de la calculatrice. Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Justifier que $u_n \geqslant 3n-4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

22 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = -n^3 - \sqrt{n^2+5}.$$

1. Justifier que $v_n \leqslant -n^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la limite de la suite (v_n).

23 Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = n^2 + 2n + (-1)^n n.$$

1. Justifier que $w_n \geqslant n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n).

24 **Raisonner, calculer**

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

1. Justifier que $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel n non nul.

2. En utilisant le théorème des gendarmes, justifier que la suite (u_n) converge et préciser la valeur de sa limite.

25 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 5 - \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire que la suite (v_n) converge et préciser la valeur de sa limite.

Suites du type (q^n)

26 ALGO PYTHON

Ella a écrit une fonction Python qui renvoie, selon la valeur de q, la nature de la suite (q^n).

```
def nature_suite(q):
    if ... :
        return("la suite converge vers 0")
    elif ... :
        return ("la suite est constante et tend vers ...")
    elif ... :
        return("....................")
    else :
        return("la suite n'admet pas de limite")
```

• Recopier et compléter ce programme.

27 Calculer les limites des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = 0{,}5^n$ 2. $v_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$ 3. $w_n = \dfrac{1}{3^n}$ 4. $z_n = \dfrac{9^n}{4^n}$

28 Calculer les limites des suites ci-dessous.

1. (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = 12$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.

2. (t_n) est la suite définie par $t_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = 2t_n$.

29 Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2. $v_n = 1 + 2 \times 0{,}99^n$
3. $w_n = 5 \times 1{,}99^n + 12$
4. $z_n = 8 + \sqrt{3}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$

30 Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$
2. $v_n = 1 + \dfrac{1 - \left(\sqrt{2}\right)^n}{1 - \sqrt{2}}$
3. $w_n = -3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n + \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$

31 **Calculer, raisonner**

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1{,}001^n$.

• Quelle est sa limite ?

32 On considère une suite (v_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{221}{222}\right)^n \geqslant u_n \geqslant \left(\frac{123}{222}\right)^n$.

• Quelle est sa limite ?

33 Soit (u_n) la suite géométrique de raison –5 et de premier terme u_0 égal à 1.

1. Exprimer la somme S_n des $n+1$ premiers termes de cette suite en fonction de n.
2. Que dire du comportement de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

34 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1. Exprimer la somme S_n en fonction de n.
2. Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

Suites monotones

35 **Chercher, communiquer**

On considère une suite de réels.

1. Associer une phrase de chaque colonne de manière à obtenir une proposition vraie.

Si…	et si…	alors…
• la suite est majorée • la suite est minorée • la suite n'est pas majorée • la suite n'est pas minorée	• la suite est croissante • la suite est décroissante	• la suite diverge. • la suite converge.

2. Combien de propositions vraies peut-on ainsi former au maximum ?

36 VRAI OU FAUX

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La suite (u_n) est monotone.
2. La suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) admet un majorant.
4. La suite (u_n) est minorée.
5. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

37 On sait que les termes d'une suite (u_n) sont strictement positifs. Parmi les propriétés suivantes, la ou lesquelles permettent de conclure que (u_n) converge ?

1. (u_n) est croissante.
2. (u_n) est décroissante.
3. (u_n) est bornée.

38 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 10 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6.$$

1. CALCULATRICE Conjecturer à la calculatrice le sens de variation de la suite (u_n).
2. Prouver par récurrence que $u_n \geqslant 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 6.$$

4. Conclure sur le sens de variation de la suite.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ?

39 **Raisonner, calculer**

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 5 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

1. Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geqslant 4.$$

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2.$$

3. Conclure sur le sens de variation de la suite.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

40 **Raisonner, communiquer**

Dans chacun des cas suivants, indiquer si les informations données sur la suite (v_n) permettent de conclure sur :

• l'existence d'une limite ;

• l'existence et la valeur de la limite.

1. La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{5}$ et de premier terme égal à 2.
2. La suite (v_n) est croissante et majorée.
3. Pour tout $n \geqslant 101$:

$$u_n \geqslant v_n \geqslant w_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = 5.$$

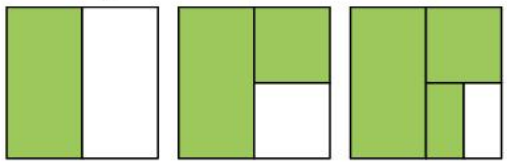
4. La suite (v_n) est décroissante et non minorée.

Exercices

41 1. Montrer que, pour tout réel A, si $n \geqslant \sqrt{\frac{|A|}{5}}$, alors $5n^2 \geqslant A$.
2. En utilisant la définition de la limite d'une suite qui tend vers $+\infty$, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2 = +\infty$.

42 **Raisonner**
On s'intéresse à la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = n(-1)^n$.
1. Montrer que :
a. $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = +\infty$;
b. $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1} = -\infty$.
2. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

43 ALGO PYTHON
On considère un carré de côté 1. On colorie la moitié de la surface du carré le premier jour, puis la moitié de la surface non coloriée le deuxième jour. On procède de même les jours suivants.



1. On souhaite déterminer le nombre n de jours nécessaires pour que le carré soit colorié à plus de 90 %. Melissa a commencé à écrire un algorithme pour répondre à cette question. Recopier puis compléter les instructions manquantes.

$n \leftarrow$ ...
$u \leftarrow 1$
Tant que u ... 0,1
  $n \leftarrow$ ...
  $u \leftarrow$ ...

2. Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument le réel a et qui renvoie le nombre n de jours nécessaires pour que le carré soit colorié à plus de a %.
3. Recopier puis compléter le tableau suivant.

a	95	99	99,9
n			

44 Calculer les limites suivantes.
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3n}{2e^{-n}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}(3n-4)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n^3}{n^2+5n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n-n^2}{2n^4-6n^2}$

45 Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n non nul, par les expressions suivantes.
1. $u_n = 3 + \frac{1}{n^2}$
2. $v_n = nu_n$
3. $w_n = \frac{u_n}{n}$
4. $z_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 3}$

46 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3n - 5$.
1. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).
2. En déduire les limites des suites :
a. $(u_n + v_n)$; b. $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$; c. $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$.

47 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser
Le premier jour, une urne contient 100 boules blanches et une boule noire. Chacun des jours suivants, on ajoute dans cette urne deux boules blanches et trois boules noires. Puis, on tire une boule au hasard dans l'urne, que l'on remet ensuite.
On note p_n la probabilité de tirer une boule noire le n-ième jour.
• Déterminer le comportement de la suite (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

48 En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
1. $u_n = 5n^2 - 2(-1)^n$
2. $u_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1}$
3. $u_n = (-1)^n \times \frac{\sqrt{n}}{n}$

49 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}.$$

1. Encadrer le terme général de la suite par les termes généraux de deux suites convergentes.
2. En déduire que la suite (v_n) converge et préciser la valeur de sa limite.

50 On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge et donner la valeur de sa limite.

51 Matteo observe un nénuphar sur une mare. Chaque jour, le nénuphar perd la moitié de sa surface, mangée par un poisson carpe.
1. Au bout de combien de jours la surface du nénuphar sera-t-elle inférieure ou égale à 1 % de sa surface de départ ?
2. Le nénuphar disparaîtra-t-il un jour ?

52 Afin de conserver un parc en bon état, un loueur de vélos vend chaque hiver 20 % de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.
On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1er juillet de l'année $(2020 + n)$. Au 1er juillet 2020, le loueur possède 150 vélos. Ainsi, $u_0 = 150$.

1. a. Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1er juillet 2021.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 35.$$

2. On a calculé les premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur.

	A	B
1	**rang n**	**terme u_n**
2	0	150
3	1	155
4	2	159
5	3	162,2

a. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les termes successifs de la suite (u_n) ?

b. Pour les termes de rangs 36 à 40, on obtient les résultats suivants (arrondis à 10^{-6} près).

38	36	174,991887
39	37	174,99351
40	38	174,994808
41	39	174,995846
42	40	174,996677

Conjecturer la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on cherche à démontrer la conjecture émise à la question précédente.
Pour cela, on pose pour tout entier naturel n :
$$v_n = u_n - 175.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = -25 \times 0{,}8^n + 175.$$

c. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

d. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

53 Déterminer la limite des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = 6^n - 10^n$ 2. $v_n = \dfrac{5^n - 1}{3^n}$ 3. $w_n = \dfrac{5^n - 2^n}{8^n}$

54 PRISE D'INITIATIVE

Chercher, communiquer

On considère une suite (u_n) et a un réel tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \geqslant u_n \geqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

• Quelle(s) valeur(s) de a assure(nt) la convergence de la suite (u_n) ?

55 **Population d'éléphants**

Modéliser, communiquer

L'Union Internationale pour la Conservation de la Nature (UICN) rapporte que la population des éléphants d'Afrique a énormément baissé depuis une vingtaine d'années. L'effectif total sur le continent africain serait d'environ 415 000 éléphants en 2016. La vente d'ivoire et la destruction des forêts sont identifiées comme étant les principales causes du risque d'extinction de cette espèce. On estime que la population totale des éléphants baisse de 4 % chaque année, malgré les campagnes de prévention et de sauvegarde.
Soit u_n le nombre d'éléphants en $(2016 + n)$, où n est un entier naturel. On a ainsi $u_0 = 415\ 000$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer la forme explicite du terme général de la suite.

3. Quelle est la limite de cette suite ? Interpréter le résultat.

4. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui renvoie la première année où le nombre d'éléphants sera inférieur au seuil de 100 000.

56 ALGO PYTHON

On dépose une tasse de café dans une pièce dont la température est de 21 °C.
En s'appuyant sur la loi de Newton, on peut démontrer que la température du café (en °C), en fonction du nombre n de minutes écoulées, peut être modélisée par une suite (T_n) vérifiant la relation $T_{n+1} = 0{,}97T_n + 0{,}63$ pour tout entier naturel n.

1. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 21$. Montrer que la suite (U_n) est géométrique.

2. Justifier que, quelle que soit la valeur de T_0, la suite (T_n) converge vers un réel que l'on précisera. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Écrire, en langage Python, une fonction tiede ayant pour argument I, la température initiale du café (supérieure à 30 °C), et qui renvoie le nombre de minutes à attendre pour que la température du café soit en dessous de 30 °C.

57 ALGO PYTHON Centrales géothermiques

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds. Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage d'un puits par la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = 2\ 000 \times 1{,}008^{n-1}$, où u_n représente le coût en euro du forage de la n-ième dizaine de mètres.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
3. Combien coûte le forage d'un puits de 30 m ?
4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. Que représente S_n dans le contexte de l'exercice ?

b. Quelle est la limite de la suite (S_n) ? Justifier.

5. Le budget consenti pour le forage d'un puits est de 125 000 €. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut creuser avec ce budget. Recopier et compléter la fonction Python nommée profondeur ci-dessous permettant de répondre au problème posé, puis donner la solution obtenue.

```
def profondeur():
    u=2000
    S=2000
    n=1
    while ...:
        u=...
        S=...
        n=...
    return ...
```

58 VRAI OU FAUX

Raisonner

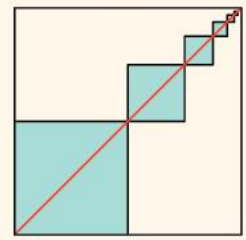
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant chaque réponse.

1. Une suite qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$.
2. Si une suite converge vers 0, alors tous les termes de cette suite sont positifs à partir d'un certain rang.
3. Si une suite est monotone et bornée, alors elle converge.

59 PRISE D'INITIATIVE

Chercher

On considère un carré de côté 1. On colorie successivement les carrés sur la diagonale du carré de côté 1, de façon à ce que la diagonale de chaque carré soit égale à la moitié de la diagonale du carré précédent.



Pour tout entier naturel n non nul, on note (u_n) l'aire de la surface coloriée de l'étape 1 à l'étape n.

- Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

60

On considère une suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{-5n}{3^n(3n+1)}$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \dfrac{-5n}{3n+1}$. Justifier que la suite (w_n) est minorée par $-\dfrac{5}{3}$ et majorée par 0.
2. En déduire que la suite (v_n) converge.
3. Proposer une autre méthode pour conclure sur la convergence de la suite (v_n) et la valeur de sa limite.

61

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\ 020$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).

62

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 4$ et $u_0 = 9$.

Partie A

1. Prouver que cette suite est minorée par 9.
2. En déduire son sens de variation.
3. Peut-on conclure sur le comportement de cette suite en $+\infty$ avec les informations obtenues aux questions précédentes ?
4. CALCULATRICE Conjecturer ce comportement à l'aide de la calculatrice.

Partie B

On pose $v_n = u_n - 4$.

1. Prouver que la suite (v_n) est géométrique. En donner le premier terme et la raison.
2. Prouver que $u_n = 5 \times 2^n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

63 **Écriture décimale**

On considère le nombre X, dont l'écriture décimale est 4,969696... On admettra que ce nombre appartient à l'ensemble des nombres rationnels. Les points de suspension après le 6 indiquent que la séquence des chiffres « 96 » se répète à l'infini dans cette même écriture décimale.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'écriture de X sous la forme d'une fraction irréductible.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 4 + \frac{96}{100} + \frac{96}{100^2} + \ldots + \frac{96}{100^n}.$$

1. Quel est le lien entre X et la suite (u_n) ?

2. Exprimer la somme suivante en fonction de n.

$$S_n = \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^n}$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a. Calculer la limite de la suite (u_n).

b. En déduire l'écriture fractionnaire et irréductible du nombre X.

64 QCM

Pour chaque proposition, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Indiquer laquelle, en justifiant.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{-n+1}{0,1^n}$:

(a) converge vers 0.

(b) diverge vers $+\infty$.

(c) diverge vers $-\infty$.

(d) n'a pas de limite.

2. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n(-2)^n$:

(a) converge vers 0.

(b) diverge vers $+\infty$.

(c) diverge vers $-\infty$.

(d) n'a pas de limite.

65 ALGO PYTHON **Convergence vers e**

1. Soit n un entier naturel. On appelle « factorielle n », que l'on note $n!$, le nombre égal au produit des n premiers entiers non nuls. Par convention, on pose de plus que $0! = 1$

a. Calculer 1!, 2! et 3!, puis écrire $n!$ en fonction de n.

b. Esteban a écrit la fonction ci-dessous en langage Python. Elle prend en argument la valeur d'un entier naturel n et renvoie la valeur de $n!$.

Recopier et compléter cette fonction.

```
def factorielle(n):
    f=1
    for i in range(...):
        f=...
    return f
```

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

a. Prouver que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

d. Justifier alors que la suite converge.

3. Dans cette question, on cherche une approximation de la limite de cette suite.

Cette limite est le nombre e, dont les origines remontent à 1614 lorsqu'un mathématicien du nom de John Napier (ou Neper en français) introduisit la notion de logarithme népérien pour faciliter les calculs avec de grands nombres (voir chapitre 6). C'est toutefois Leonhard Euler qui lui donna le nom de e, première lettre du mot « exponentielle ».

On considère l'algorithme suivant.

$u \leftarrow 1$
$n \leftarrow 0$
Tant que $|u - \mathrm{e}| \geqslant 0,01$
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow u + \frac{1}{n!}$

a. Quelles sont les valeurs des variables n et u en fin d'exécution de cet algorithme ?

b. Écrire une fonction en langage Python ayant pour argument un entier naturel p et qui renvoie le rang du premier terme de la suite (u_n) dont la distance à e est inférieure à 10^{-p}.

Depuis 2019, date du dernier record, on connaît 8 000 milliards de décimales du nombre e.

66 **Suite de Fibonacci et nombre d'or**

Le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'appelle le nombre d'or.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+1}\right)$.

1. a. Calculer les termes u_0 et u_1.

b. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, afficher les 10 premiers termes de cette suite. Que remarque-t-on sur le type des nombres obtenus ?

c. Conjecturer une relation entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.

2. La suite de Fibonacci est la suite (F_n), définie par $F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On admettra que pour tout entier naturel n, $F_n = u_n$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

67 ALGO PYTHON Bassins

Modéliser

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes. On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante.

- Au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau.
- Tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A.
- Tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation totale d'eau dans le circuit ?
2. Donner une expression de a_{n+1} en fonction de a_n.
3. Écrire une fonction Python donnant la plus petite valeur de n à partir de laquelle le bassin A contient plus d'eau que le bassin B.
Quelle est la valeur affichée par cette fonction ?
4. Le bassin A contiendra-t-il un jour 1 320 m^3 d'eau ? Justifier.
5. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 1\,320$.
a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
b. En déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).
Interpréter les résultats obtenus.

68 Méthode de Héron Approfondissement

Représenter, communiquer

On s'intéresse à une suite de rectangles (R_n). On note L_n la longueur du rectangle R_n et ℓ_n sa largeur.
On pose $L_0 = 2\,020$ et $\ell_0 = 1$.
Tous les rectangles R_n ont la même aire et l'une des dimensions de R_{n+1} est la moyenne arithmétique des dimensions du rectangle R_n.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :
$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2} \text{ et } \ell_{n+1} = \frac{4\,040}{L_n + \ell_n}$$
On justifiera en particulier que c'est la longueur du rectangle R_{n+1} qui est égale à la moyenne arithmétique des dimensions du rectangle R_n.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$$\ell_n \leqslant \sqrt{2\,020} \leqslant L_n.$$
3. Justifier que la suite (L_n) est décroissante.
En déduire son comportement lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Justifier que la suite (ℓ_n) est croissante.
En déduire son comportement lorsque n tend vers $+\infty$.
5. a. En utilisant le fait que $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$ pour tout entier naturel n, montrer que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent vers la même limite.
b. Que vaut cette limite commune ? Justifier.
6. Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.

Cette méthode d'extraction d'une racine carrée d'un nombre porte le nom de Héron d'Alexandrie, mathématicien grec du I^{er} siècle après J.-C.

69 TABLEUR

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, et la suite (v_n), définie pour tout entier naturel non nul par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. a. À l'aide du tableur, calculer les 20 premiers termes de la suite (u_n).
b. Quelle semble être sa limite ?
2. a. À l'aide du tableur, calculer les premiers termes de la suite (v_n).
b. Conjecturer la limite de la suite (v_n).
c. Démontrer cette dernière conjecture.
d. Résoudre l'inéquation $v_n \leqslant \frac{4}{5}$ dans $\mathbb{N}$ et en déduire qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5} u_n$. Préciser la valeur de N.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n) et vérifier la cohérence du résultat avec la conjecture émise à la question 1.

70 PRISE D'INITIATIVE

Chercher

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
On note pour tout entier naturel n :
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$
- La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?
« Si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (S_n) converge. » Justifier.

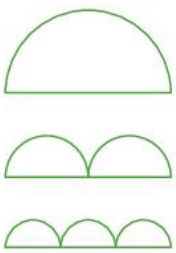
71 PRISE D'INITIATIVE

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$ pour tout entier naturel n non nul.
On pose par ailleurs $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$ pour tout entier naturel n non nul.

• Déterminer la nature de la suite (v_n) et utiliser les résultats pour en déduire le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

72 **Calculer, communiquer**

Asma a tracé des demi-cercles sur un segment de longueur 1.
À la première étape, elle trace un demi-cercle ; à la seconde, elle divise le segment en deux segments de même longueur et trace deux demi-cercles ; à la troisième, elle divise le segment en trois segments de même longueur et trace trois demi-cercles, etc.



1. Quel serait le périmètre total de la figure si elle répétait ces étapes un nombre infini de fois ?
2. Quelle serait l'aire totale de la figure si elle répétait ces étapes un nombre infini de fois ?

73 Soient a et b deux nombres réels.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{an + b}{2n + 1} \text{ et } v_n = n(2u_n - 1).$$

1. La suite (u_n) peut-elle être divergente ?
2. Existe-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers $\frac{1}{2}$?

74 ALGO PYTHON **Le nombre d'or**

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et tels que $a > b$.
Le nombre d'or est défini comme l'unique rapport des deux longueurs a et b tel que $\dfrac{a + b}{a} = \dfrac{a}{b}$.
On note ce nombre d'or φ.

Partie A. Quelques propriétés algébriques

1. a. Démontrer que φ est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
b. En déduire la valeur exacte de φ, puis une valeur approchée de φ à 10^{-2} près.
2. Vérifier que :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \text{ et } \varphi = \sqrt{1 + \varphi}.$$

Partie B. Une première suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Démontrer que cette suite est croissante et majorée.
2. Que peut-on en déduire ?
3. On admet que la suite (u_n) converge vers φ. Écrire un algorithme qui affiche la plus petite valeur de n pour laquelle $|u_n - \varphi| < 10^{-7}$. Programmer cet algorithme sur Python, puis indiquer la valeur trouvée.
4. Combien de décimales du nombre d'or obtient-on ?

Partie C. Une seconde suite

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et :

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Prouver que $v_n \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi}|v_n - \varphi|.$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n |v_0 - \varphi|.$$

4. Que peut-on dire de la suite (v_n) lorsque n tend vers l'infini ?
5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $|v_n - \varphi| < 10^{-7}$.
6. Combien de décimales du nombre d'or obtient-on ?

75 **Récurrence double** Approfondissement **Chercher**

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence double suivante :

$$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Existe-t-il des suites constantes non nulles qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}$?
2. Existe-t-il des suites arithmétiques non nulles qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}$?
3. Existe-t-il des suites géométriques non nulles qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}$?
4. Soient a et b deux réels donnés.
a. Vérifier que la suite de terme général :

$$u_n = a\left(\frac{2}{7}\right)^n + b\left(\frac{-1}{5}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$.
b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

76 On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel k compris entre 0 et n, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. En déduire que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.
3. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 100$.

ZOOM SUR... les conjectures

Avant de démontrer un résultat, il peut être demandé de conjecturer ce résultat à l'aide d'un tableau de valeurs ou d'un graphique. Émettre une conjecture signifie que l'on formule un résultat que l'on pense être vrai, mais que l'on n'a pas encore démontré.

77 60 min ALGO

Une biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2020. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A. Un premier modèle

Dans une première approche, la biologiste estime que la population croît de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n), où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en millier, l'année $(2020+n)$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B. Un second modèle

La biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{-1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{-1,1}{605}x^2 + 1,1x$. On a ainsi : $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Justifier que g est croissante sur $[0 ; 60]$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
d. En déduire la convergence de la suite (u_n).
e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. La biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous afin que la variable n contienne la réponse au problème donné en fin d'exécution.

```
n ← 0
u ← 12
Tant que ...
    u ← ...
    n ← ...
```

78 60 min

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre, exprimé en dizaine de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année.
Ainsi, on a :
- $u_0 = 1$;
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.

Partie A

On suppose, dans cette partie seulement, que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = 5 - 4 \times 0,8^n.$$
3. En justifiant la réponse, vérifier les deux conjectures établies à la question 1. Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = u_n - 5c.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.
4. On pose $c = 2$.
Déterminer le nombre minimal d'années à partir duquel la population atteindra le seuil de 75 000 abeilles.

79 60 min

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. On considère la suite (p_n), définie pour tout entier naturel n par $p_n = n^2 - 42n + 4$.

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{{u_n}^2 + 8}$.
- $v_n = {u_n}^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est géométrique.

3. On considère la suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$.

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B ALGO

On considère la suite (U_n), définie par :

- $U_0 = \frac{1}{2}$;
- pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$.

1. Calculer U_1 et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

3. En déduire la limite de la suite (U_n).

4. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont des flottants. Pour un seul de ces trois algorithmes, la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Déterminer lequel en justifiant.

(a)

$u \leftarrow \frac{1}{2}$
$i \leftarrow 0$
Tant que $i < n$
  $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$
  $i \leftarrow i+1$

(b)

$u \leftarrow \frac{1}{2}$
Pour i allant de 0 à n
  $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$

(c)

$p \leftarrow 2^n$
$u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

80 60 min

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A. Conjectures

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur. On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

On donnera les valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B. Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

- $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$;
- $w_n = u_n - 7$.

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}.$$

2. a. En utilisant le résultat de la question 1.b, montrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < u_{n+1} < 7.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Consolider ses acquis

81 Étude d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n + 1.$$

Questions Va piano

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
2. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0, $u_n \geqslant 0$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 0 :

$$u_n \geqslant \frac{2}{3}n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite (u_n) ?

Questions Moderato

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 1 \text{ et } v_n = u_n - n.$$

1. Prouver que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + n$.
3. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui détermine le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 2\,020$.

Questions Allegro

1. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + n.$$

2. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n .$$

a. Pour tout entier naturel n, exprimer S_n en fonction de n.
b. Calculer la limite de la suite de terme général $\frac{S_n}{n^2}$.

Se préparer aux études supérieures

82 Suites adjacentes Approfondissement

Partie A

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et la suite de terme général $v_n - u_n$ converge vers 0.

1. On considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n).
Vérifier que la suite (t_n), définie pour tout entier naturel n par $t_n = v_n - u_n$, est décroissante.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n \geqslant u_n.$$

2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et justifier qu'elles ont la même limite.

Partie B

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent donc vers la même limite.

Ces deux suites convergent vers la valeur $\frac{\pi^2}{6}$.
La recherche d'une preuve de la convergence de la suite (u_n) vers cette valeur est connue sous le nom de problème de Bâle (voir TP 2 p. 59).

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = -1$, $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.
b. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

83 Série convergente

On considère une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n.
On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que la série (S_n) est convergente lorsque S_n tend vers un réel lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Dans cette question, on pose $u_n = 0{,}8^n$.
a. Calculer S_n pour tout entier naturel n.
b. Montrer que la série (S_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. (u_n) est une suite quelconque.
a. Calculer $S_n - S_{n-1}$.
b. En déduire que si la série (S_n) est convergente, alors (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

No problem!

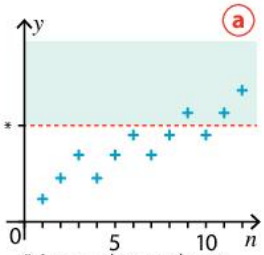
1 Divergent sequences

We say a sequence tends to plus infinity if, however large a number we choose, the sequence becomes greater than that number, and stays greater.

1. Give the definition of a sequence that tends to minus infinity

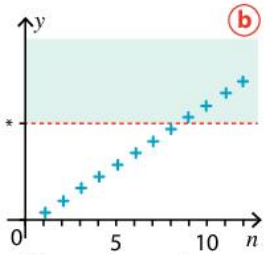
2. Among those graphs, one sequence does not tend to infinity. Choose which one and explain your choice.

a



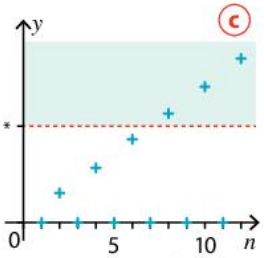
* Any number we choose

b



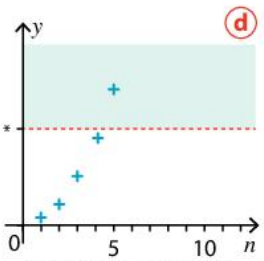
* Any number we choose

c



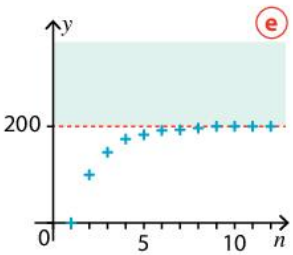
* Any number we choose. The sequence is 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5…

d



* Any number we choose

e



2 Sequences to forecast

In a school, statistics have shown that its population decreases each year by 10%. This year, there are 800 pupils in the school. It is decided to enrol 50 pupils each year.

What can you foresee about the population in this school through the future years?

1. Conjecture with your calculator.

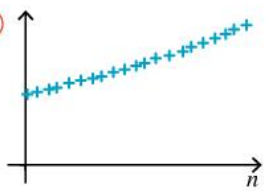
2. Prove it.

3 Pictures to describe

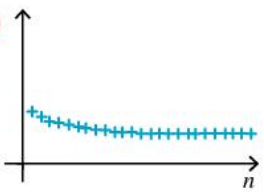
PAIR WORK

Using words or expressions like *sequence*, *limit*, *to be close to*, *to settle*, *behaviour*, *to get to*, *finite*, *infinite*, *convergent*, *divergent*, *increase*, *decrease*, *bound*…, describe the following graphs.

a



b



c

d

Final exam Past papers

Let $S_N = \sum_{r=1}^{N}(3r+1)(3r+4)$ and $T_N = \sum_{r=1}^{N}\frac{1}{(3r+1)(3r+4)}$.

1. Use standard results from the List below to show that $S_N = N(3N^2+12N+13)$.

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1);\ \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

2. Use the method of differences to show that $T_N = \frac{1}{12} - \frac{1}{3(3N+4)}$.

3. Deduce that $\frac{S_N}{T_N}$ is an integer.

4. Find $\lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{N^3 T_N}$.

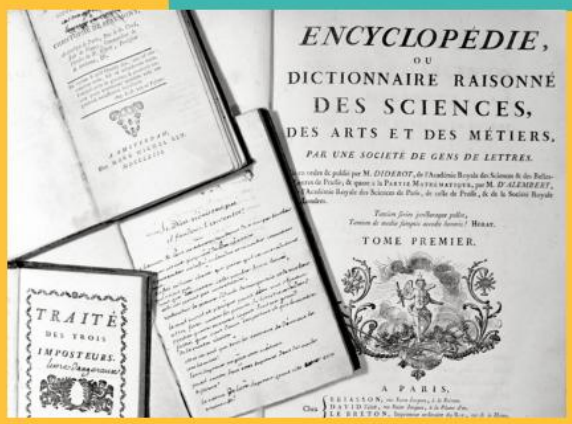
CHAPITRE

3

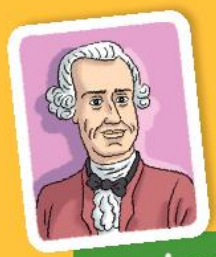
Limites de fonctions

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe



Ne pas repousser les limites



Jean Le Rond d'Alembert

Jean Le Rond d'Alembert est un savant et philosophe du XVIII^e siècle qui participe grandement à ce « siècle des Lumières » en signant de nombreux articles de la phénoménale *Encyclopédie* dirigée par Denis Diderot. Membre de l'Académie française, il est un ardent défenseur des idées philosophiques dans une société religieuse qu'il rejette. Ses travaux mathématiques sont variés et portent tant sur l'algèbre que sur l'analyse ou les probabilités. On lui doit également de nombreuses avancées en mécanique et en dynamique des fluides.

Voici la définition que d'Alembert donne du mot « limite » dans le tome 9 de l'*Encyclopédie*.

LIMITE (*Mathémat.*)
On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable.

En notant A la première grandeur et a la seconde, puis ε la « grandeur donnée », traduire ce texte à l'aide d'inégalités.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Calculs d'images

Dans chaque cas, donner la valeur de l'image du réel a par la fonction f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$; $a = 25\,000$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$; $a = -25\,000$.
3. f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = -0{,}0001$.
4. f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = -30\,000$.
5. f est définie pour tout réel $x \neq 1$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$; $a = 1{,}00001$.

2 À la limite

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse

1. Le carré d'un « très grand nombre » est un « très grand nombre ».
2. L'inverse d'un « très grand nombre » est un « très grand nombre ».
3. On peut tracer la courbe d'une fonction strictement croissante dont l'ordonnée des points ne dépasse pas 5.

3 Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $x^2 \geqslant 90\,000$; $I = [0 ; +\infty[$.
2. $x^2 \geqslant 90\,000$; $I =]-\infty ; 0]$.
3. $\frac{1}{x} \geqslant 500\,000$; $I =]0 ; +\infty[$.
4. $\frac{1}{x} \leqslant 0{,}00001$; $I =]0 ; +\infty[$.
5. $\frac{1}{x} \leqslant 0{,}00001$; $I =]-\infty ; 0[$.
6. $\frac{1}{x-2} \leqslant 0{,}00001$; $I =]2 ; +\infty[$.

4 Détermination d'un seuil

À partir de quelle valeur du réel x tous les nombres $\sqrt{x}$ appartiennent-ils à l'intervalle $]10^6 ; +\infty[$?

5 Table de valeurs

f est la fonction définie pour tout réel $x \neq 3$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

- Sans utiliser de calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs ci-contre.

x	$f(x)$
2,9	
2,99	
2,999	
2,9999	

6 Détermination d'un signe

Déterminer le signe des expressions suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $(x-2)(x+1)$; $I =]2 ; +\infty[$.
2. $\frac{2x-3}{x+2}$; $I =]-\infty ; -2[$.
3. $\frac{-x-5}{(x-1)^2}$; $I =]1 ; +\infty[$.
4. $\frac{(-x-1)e^x}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

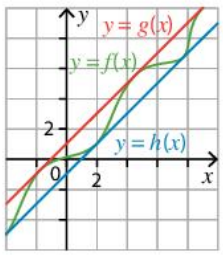
7 Étude de signe

Soit x un réel. Dans chaque cas, donner, lorsqu'il est constant, le signe du réel donné.

1. Le réel $-x^2$.
2. Le réel $(-x)^2$.
3. Le réel $(x-2)(x-3)$.
4. Le réel $\frac{2x+\sqrt{x}}{x-1}$.

8 Résolution graphique d'inéquations

f, g et h sont trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et représentées ci-dessous.



Résoudre par lecture graphique les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) \leqslant g(x)$
2. $f(x) \leqslant h(x)$

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Antécédents et conditions sur les images

Objectif Introduire la définition de la limite d'une fonction.

Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
a. Traduire à l'aide d'une inégalité la phrase suivante.
« Toutes les valeurs de $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]10\,000 ; +\infty[$. »
b. Est-il possible de trouver un intervalle pour x sur lequel toutes les valeurs de $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]10\,000 ; +\infty[$?
c. On suppose que A est un réel quelconque positif. Est-il possible de trouver un intervalle pour x sur lequel toutes les valeurs de $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]A ; +\infty[$?

2. On considère la fonction g définie sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.
a. CALCULATRICE Afficher à la calculatrice le tableau de valeurs de la fonction g pour $x \geqslant 100$ avec un pas de 1. Quelles sont les images affichées ? À partir de quelle valeur de x les images $g(x)$ semblent-elles appartenir à l'intervalle $[1{,}93 ; 2{,}07[$?
b. En utilisant la table de la calculatrice, déterminer à partir de quelle valeur de x les images $f(x)$ semblent appartenir à l'intervalle $[1{,}97 ; 2{,}03[$.

X	Y1
.98	-148
.981	-155.9
.982	-164.7
.983	-174.5
.984	-185.5
.985	-198
.986	-212.3
.987	-228.8
.988	-248
.989	-270.7
.99	-298

3. On considère la fonction h définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$.
On a obtenu, à l'aide d'une calculatrice, le tableau de valeurs ci-contre de la fonction h pour certaines valeurs de x.
Que semble indiquer cette table de valeurs lorsque x prend des valeurs proches de 1 et inférieures à 1 ?

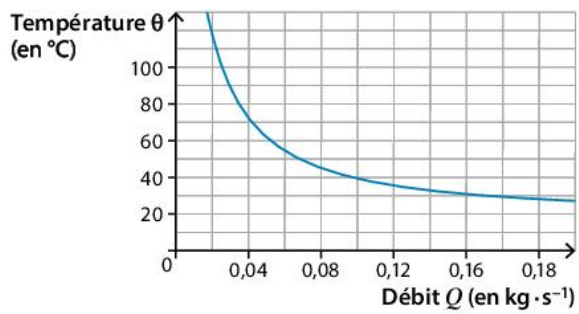
Situation 2 Réglage d'un chauffe-eau

Objectif Introduire la notion d'asymptote.

Un chauffe-eau d'une maison de taille moyenne a une puissance de 9 000 watts (W). L'eau froide arrive dans le chauffe-eau à une température de 18 °C. Le débit fourni par le chauffe-eau, noté Q (en $kg \cdot s^{-1}$), est réglable et permet d'obtenir une température d'eau en sortie du chauffe-eau de θ °C.
θ est donc une fonction de la variable Q. La relation entre Q et θ est :

$$\theta(Q) = 18 + \frac{9\,000}{4\,200Q}.$$

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction θ.



1. Quel débit doit-on régler pour obtenir une eau à 50° C en sortie de chauffe-eau ?
2. Comment semble évoluer la température de l'eau lorsque le chauffe-eau est réglé pour délivrer des grands débits ?
3. CALCULATRICE Reproduire, à la calculatrice, la représentation graphique de la fonction θ et tracer la droite d'équation $y = 18$. Quelle interprétation physique peut-on donner de cette droite ?

Situation 3 Trouver le dominant dans un produit ou un quotient

Objectif
Introduire la notion de « forme indéterminée ».

1 On considère les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x$; $g_1(x) = \frac{x}{2}$; $g_2(x) = x - 1$ et $g_3(x) = 2x$.

a. Lorsqu'on soustrait un nombre très grand à un nombre très grand, peut-on conjecturer un ordre de grandeur de la différence ?

b. Donner les limites en $+\infty$ des fonctions f, g_1, g_2 et g_3.

c. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

d. Que peut-on en conclure ?

	Expression littérale	Limite en $+\infty$
$f - g_1$		
$f - g_2$		
$f - g_3$		

2 On considère les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2$; $g_1(x) = x$; $g_2(x) = 2x^2$ et $g_3(x) = x^3$.

a. Lorsqu'on divise un nombre très grand par un nombre très grand, peut-on conjecturer un ordre de grandeur du quotient ?

b. Donner les limites en $+\infty$ des fonctions f, g_1, g_2 et g_3.

c. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

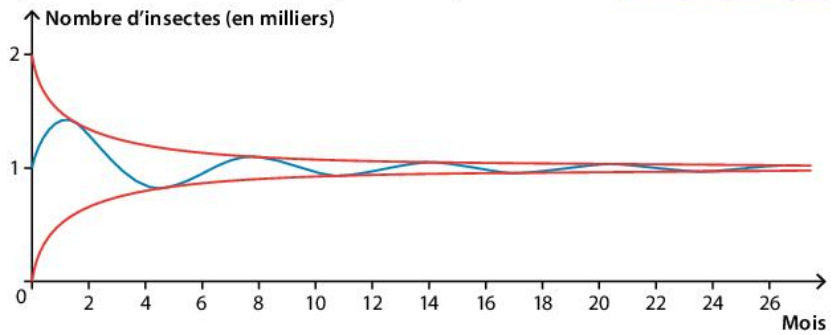
d. Que peut-on en conclure ?

	Expression littérale	Limite en $+\infty$
$\frac{f}{g_1}$		
$\frac{f}{g_2}$		
$\frac{f}{g_3}$		

Situation 4 Évolution d'une population d'insectes

Objectif
Introduire les théorèmes de comparaison de limites.

Dans un parc régional, des entomologistes recensent chaque mois la population de scarabées. On modélise le nombre d'insectes par mois par une fonction f définie par des relevés réguliers et dont la courbe est représentée ci-dessous en bleu. $f(x)$ est exprimé en milliers d'individus (en milliers).



Les entomologistes ne connaissent pas l'expression de la fonction f, mais ils connaissent les expressions des deux fonctions dont les courbes sont tracées en rouge : ce sont les fonctions g et h définies pour tout réel $x \geqslant 0$ par $g(x) = \frac{x}{x+1}$ et $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

1 Identifier la courbe représentative de g et celle de h. Justifier.

2 Peut-on conjecturer l'évolution du nombre d'insectes à long terme ?

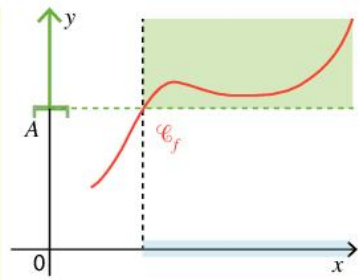
3 CALCULATRICE À l'aide d'une calculatrice, déterminer la limite des fonctions g et h. En déduire vers quel nombre semble tendre la population de scarabées.

1. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

1. Limite infinie

Définitions

- Une fonction f **a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Une fonction f **a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.



Propriétés

DÉMO p. 87

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a :

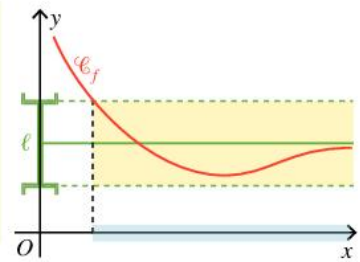
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}-\infty \text{ si } n \text{ est impair}\\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$

2. Limite finie

Définition

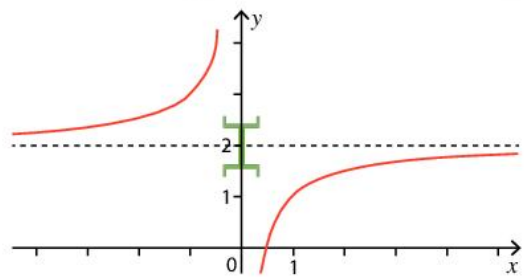
Soit ℓ un réel.

- Une fonction f **a pour limite ℓ en $+\infty$** lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- On définit de façon analogue la limite finie de f en $-\infty$.



Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$. Soit I n'importe quel intervalle ouvert contenant 2. Pour x suffisamment grand, $\dfrac{1}{x}$ sera suffisamment petit pour que toutes les valeurs de $f(x)$ appartiennent à I. La fonction f a donc pour limite 2 en $+\infty$. De même, f a pour limite 2 en $-\infty$.



Définition

- Lorsqu'une fonction f a pour limite un réel ℓ en $+\infty$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote horizontale** en $+\infty$ la droite d'équation $y=\ell$.
- On définit de façon analogue une asymptote horizontale en $-\infty$.

Propriétés

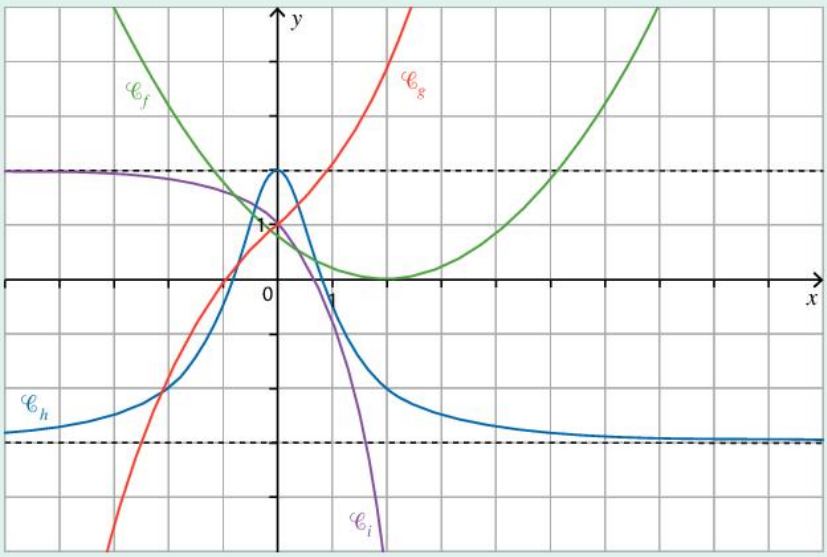
DÉMO p. 87

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

Méthode 1 Conjecturer graphiquement une limite en $+\infty$ et en $-\infty$

1 Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-dessous.



2 Certaines courbes représentatives semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ? Si oui, donner leurs équations.

Solution commentée

1 On peut conjecturer que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -3$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$.

2 D'après la question précédente, on peut conjecturer que :
- la courbe $\mathscr{C}_h$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -3$ en $+\infty$ et en $-\infty$;
- la courbe $\mathscr{C}_i$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 2$ en $-\infty$.

EXERCICE 1 p. 94

Méthode 2 Inscrire les limites dans un tableau de variation

Par lecture graphique, dresser le tableau de variation des fonctions définies dans la méthode 1 en y portant les limites conjecturées.

Solution commentée

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

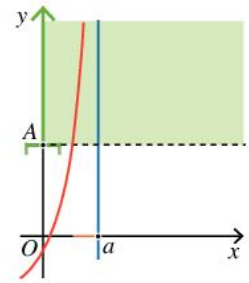
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$	-3	↗	2	↘	-3

x	$-\infty$		$+\infty$
$i(x)$	2	↘	$-\infty$

EXERCICE 1 p. 94

2. Limite en un réel a

1. Limite en un réel a



Définition

Soit a un réel.

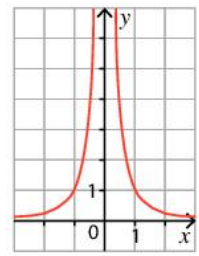
- Une fonction f **a pour limite $+\infty$ en a** si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- Une fonction f **a pour limite $-\infty$ en a** si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Soit ℓ un réel. Une fonction f **a pour limite ℓ en a** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Quel que soit l'intervalle I de la forme $I =]A\,;+\infty[$, si x est suffisamment proche de 0, $\dfrac{1}{x^2}$ sera supérieur à A et toutes les valeurs de $f(x)$ seront dans I.

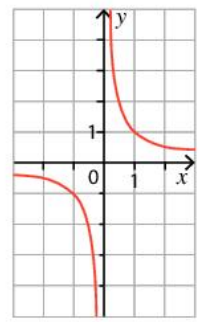
Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



Remarque

Une fonction peut avoir une **limite « à droite »** et une **limite « à gauche »** qui sont différentes.

Dans l'exemple ci-contre, on note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



2. Interprétation graphique

Définition

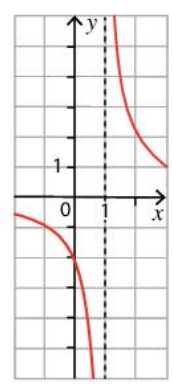
Soit a un réel. Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (à gauche ou à droite), on dit que sa courbe représentative admet la droite d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale**.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

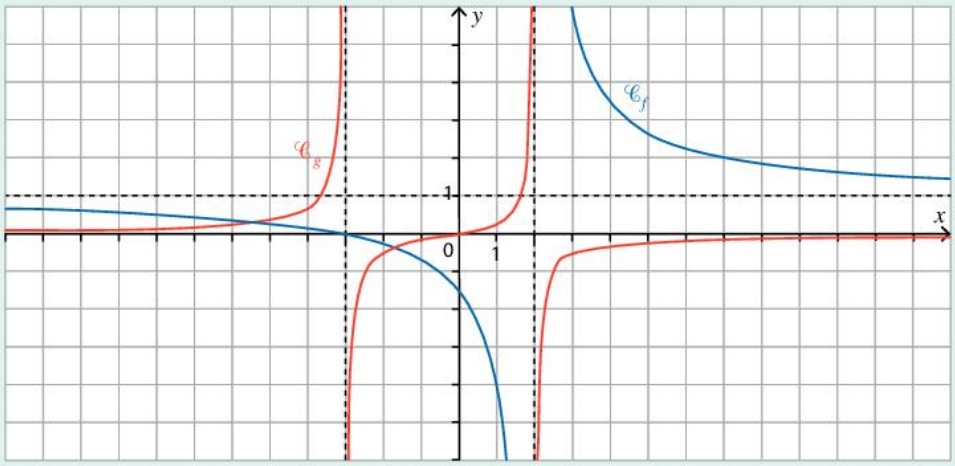
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.



Méthode 1 Conjecturer les limites d'une fonction en un réel

1 Conjecturer graphiquement les limites aux bornes de leur ensemble de définition des deux fonctions f et g représentées ci-dessous.



2 Par lecture graphique, dresser le tableau de variation des fonctions f et g en y portant les limites conjecturées.

Solution commentée

1 • La fonction f est définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.
On peut conjecturer que :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

• La fonction g est définie sur $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.
On peut conjecturer que :
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

EXERCICE 2 p. 94

Méthode 2 Conjecturer les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction

Certaines des courbes représentées dans la méthode 1 semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ou verticales ? Si oui, donner leurs équations.

Solution commentée

• La courbe $\mathscr{C}_f$ semble admettre pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 2$ et pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$.
• La courbe $\mathscr{C}_g$ semble admettre pour asymptotes verticales les droites d'équations $x = -3$ et $x = 2$ et pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$.

EXERCICE 3 p. 94

3. Limites et opérations

Dans toute cette page, f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$. Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

1. Somme, produit et quotient

Propriété (admise) : limite de la somme de deux fonctions

Si $\lim f = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim g = \ldots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim (f+g) = \ldots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Propriété (admise) : limite du produit de deux fonctions

Si $\lim f = \ldots$	ℓ	ℓ	∞	0
et $\lim g = \ldots$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim (f \times g) = \ldots$	$\ell\ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

Propriété (admise) : limite du quotient de deux fonctions

Si $\lim f = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
et $\lim g = \ldots$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim \left(\frac{f}{g}\right) = \ldots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarques

- Quand le tableau indique « forme indéterminée », on ne peut pas conclure grâce aux propriétés. Il peut être nécessaire de transformer l'écriture de la fonction pour trouver sa limite éventuelle.
- Quand le tableau indique ∞, il faut utiliser la règle des signes pour conclure.

2. Composition

a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Propriété (admise)

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X \to b} g(X) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Remarque

Le nombre $g(f(x))$ est l'image par g du nombre $X = f(x)$, lui-même image de x par f.

Propriétés (admises)

- Soient f une fonction et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
- Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes appartiennent à I. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Méthode 1 Déterminer une limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Étudier les limites des fonctions définies par les expressions suivantes quand x tend vers a.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 2$; $a = +\infty$.
2. $g(x) = (\sqrt{x} + 1)(7 - 2x)$; $a = +\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; $a = -\infty$.

Solution commentée

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 2) = +\infty$. Donc, par **somme**, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 2x) = -\infty$. Donc, par **produit**, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (on utilise la règle des signes).

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$. Donc, par **passage à l'inverse**, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0$.

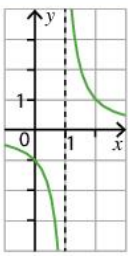
EXERCICE 10 p. 95

Méthode 2 Déterminer une limite en un réel a

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

• Déterminer la limite de f quand x tend vers 1.

Solution commentée



$\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$ donc, par passage à l'inverse, quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$). Pour conclure, il faut utiliser la règle des signes et donc connaître le signe de $f(x)$.

• 1er cas : quand x tend vers 1 et $x > 1$ (**limite à droite**).
$x > 1$, donc $x - 1 > 0$, soit $f(x) > 0$; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

• 2e cas : quand x tend vers 1 et $x < 1$ (**limite à gauche**).
$x < 1$ donc $x - 1 < 0$, soit $f(x) < 0$; donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 18 p. 95

Méthode 3 Lever une forme indéterminée

Déterminer les limites des fonctions définies par les expressions suivantes quand x tend vers $+\infty$.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $g(x) = \dfrac{2x - 7}{1 - x^2}$.

Solution commentée

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ donc, par somme, on rencontre une forme indéterminée.
Dans le cas d'une fonction polynôme, on factorise par la puissance de x de plus haut degré.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$. Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et $1 - \dfrac{1}{x}$ tend vers 1.
Par produit, on a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 7) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x^2) = -\infty$ donc, par quotient, on rencontre une forme indéterminée.
Dans le cas d'une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes), on factorise par la puissance de x de plus haut degré.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 7}{1 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \dfrac{7}{x}\right)}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \dfrac{7}{x}}{x\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, le numérateur a pour limite 2 et le dénominateur tend vers $-\infty$, par produit.
Ainsi, le quotient a pour limite 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

EXERCICE 15 p. 95

4. Limites et comparaison

1. Limite infinie

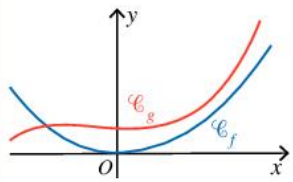
Théorème

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle du type $[A ; +\infty[$, où A est un réel.

DÉMO p. 87

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Par analogie, on peut écrire le même théorème lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1}$.

Pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$, $\dfrac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1} \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant x^2$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. On peut donc en conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

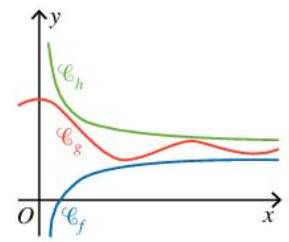
2. Limite finie

Théorème des gendarmes (admis)

Soient ℓ un réel et trois fonctions f, g et h telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ sur un intervalle du type $[A ; +\infty[$, où A est un réel.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Par analogie, on peut écrire le même théorème lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a.



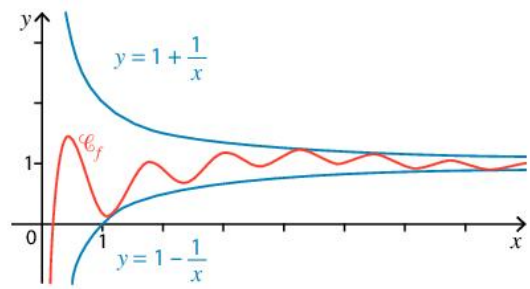
Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre et telle que,

pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.



3. Croissances comparées

Théorème des croissances comparées

DÉMO p. 86

Pour tout entier naturel n, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Remarque

Ce théorème illustre le fait que la fonction exponentielle croît en $+\infty$ bien plus vite que toute fonction puissance.

Méthode 1 Déterminer une limite infinie par comparaison

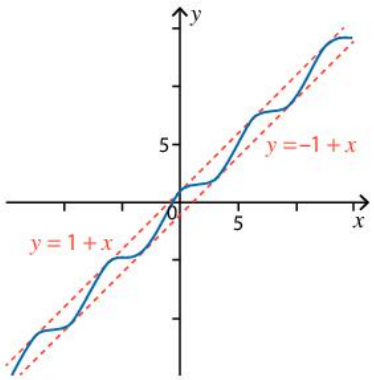
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f et conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. À l'aide d'un encadrement de $\cos(x)$, déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Solution commentée

1. La courbe est tracée ci-contre. Graphiquement, on peut conjecturer que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



2. Pour tout réel x, on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Donc $-1 + x \leqslant x + \cos(x) \leqslant 1 + x$.

- Limite en $-\infty$: on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x) = -\infty$ et $f(x) \leqslant 1 + x$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- Limite en $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + x) = +\infty$ et $f(x) \geqslant -1 + x$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 44 p. 97

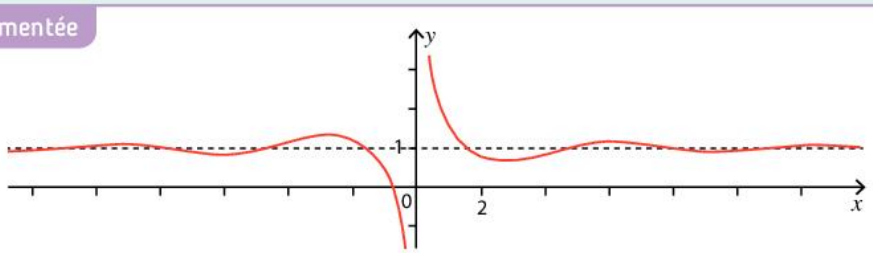
Méthode 2 Utiliser le théorème des gendarmes

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x} + 1$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f et conjecturer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. En utilisant un encadrement de $\cos(x)$, donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire les limites conjecturées.

Solution commentée

1.



On conjecture que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

2. On sait que, pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

- **1er cas :** $x > 0$ (pour la limite en $+\infty$).

On peut alors multiplier chaque membre de cette double inégalité par $\dfrac{1}{x}$: $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} + 1 \leqslant \dfrac{1}{x} + 1$,

donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x} + 1$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.

Donc, en appliquant le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

- **2e cas :** $x < 0$ (pour la limite en $-\infty$).

On peut alors multiplier chaque membre de cette double inégalité par $\dfrac{1}{x}$, mais les inégalités changent de sens : $-\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$.

Donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \geqslant \dfrac{\cos(x)}{x} + 1 \geqslant \dfrac{1}{x} + 1$,

donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \geqslant f(x) \geqslant \dfrac{1}{x} + 1$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.

Donc, en appliquant le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

EXERCICE 45 p. 97

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration du théorème suivant. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Pour tout entier naturel n, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration

- On montre dans un premier temps que $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$ sur un intervalle du type $[A\,;+\infty[$, où A est un réel.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$. On la dérive deux fois de suite et on note f'' la dérivée de f'.
On a : $f'(x) = e^x - x$, puis $f''(x) = e^x - 1$.
On sait que f'' ne s'annule qu'en 0. (1)
Sur $]-\infty\,;0]$, la fonction f'' est négative, donc f' est décroissante.
Sur $[0\,;+\infty[$, f'' est positive, donc f' est croissante.
f' admet donc un minimum égal à $f'(0) = 1 - 0 = 1$.
Ainsi, f' est positive sur $\mathbb{R}$ et, donc, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $f(0) = 1$, on en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$e^x \geqslant \frac{x^2}{2}. \quad (2)$$

- Il vient alors, pour tout $x > 0$, l'inégalité $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

D'après le théorème de comparaison, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans l'égalité $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)^n$, on reconnaît la formule précédente : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$. (3)

Cette formule permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$. (4)

- En posant $X = -x$, on écrit $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X}$.

Par inverse de la formule établie précédemment, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$. (5)

1. En s'appuyant sur la courbe de la fonction exponentielle, justifier que l'équation $e^x - 1 = 0$ n'a qu'une seule solution.
2. Résumer par un tableau faisant intervenir signes et variations des fonctions f, f' et f'', le raisonnement des lignes (1) à (2).
3. Démontrer l'égalité mentionnée à la ligne (3).
4. Détailler les opérations mentionnées dans l'affirmation de la ligne (4), puis dans celle de la ligne (5).

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de cette propriété.
- Soit A un réel strictement positif. Montrer que si $x > A^2$, alors $\sqrt{x} \in]A ; +\infty[$.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de cette propriété.
- En étudiant les variations et le signe sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$, montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant x$.
- Conclure quant à la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.
- En écrivant $X = -x$, montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^X}$.
- Conclure quant à la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.

3 On souhaite démontrer le théorème suivant.

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle du type $[A ; +\infty[$, où A est un réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de cette propriété.
- Rappeler la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- En utilisant l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$, conclure quant à la limite de g en $+\infty$.

Utiliser différents raisonnements

1 L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = 0$. »

2 Démontrer le résultat suivant.
« Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, alors f n'est pas une fonction paire. »

Raisonner par contre-exemple
Pour démontrer qu'un résultat est faux, il suffit de trouver un contre-exemple.

Raisonner par contraposée
Pour démontrer une implication $A \Rightarrow B$, on peut aussi démontrer non$B \Rightarrow$ non$A$.

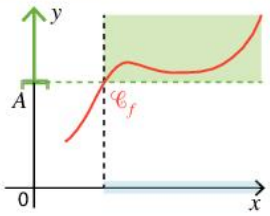
Carte mentale

Limites de fonctions

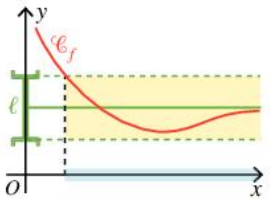
Définir les limites et les asymptotes

Limites en $+\infty$ et $-\infty$

• **Limite infinie** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. La définition est analogue pour la limite de f en $-\infty$.



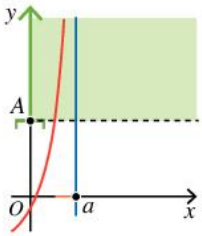
• **Limite finie** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. La définition est analogue pour la limite de f en $-\infty$. La droite d'équation $y = \ell$ est alors une **asymptote horizontale** à la courbe de f.



Limite infinie en a

• $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. La définition est analogue pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

• La droite d'équation $x = a$ est alors une **asymptote verticale** à la courbe de f.



Calculer une limite

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Limites, opérations et formes indéterminées (FI)

Si :					
lim f = …	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	∞
lim g = …	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	0
alors :					
lim $(f+g)$ = …	$+\infty$	$-\infty$	FI	∞	∞
lim (fg) = …	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$ = …	FI	FI	FI	0	∞

Comparer pour déterminer une limite

• Soient f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[A\,;+\infty[$.

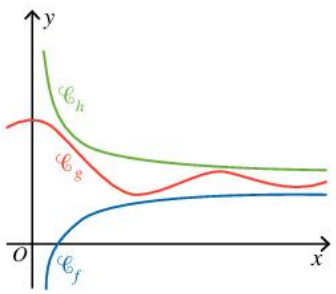
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

• **Théorème des gendarmes** : soient f, g et h telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ sur $[A\,;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell.$$



Par analogie, on peut écrire les mêmes propriétés en $-\infty$ et en un réel a.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x}$ est :
(a) 1.
(b) une forme indéterminée.
(c) 0.

2 La limite de $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à :
(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0

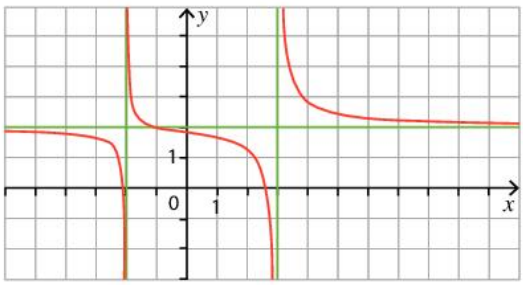
3 Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ est :
(a) $+\infty$.
(b) une forme indéterminée.
(c) 0.

4 Lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est :
(a) 1.
(b) $+\infty$.
(c) une forme indéterminée.

5 Lorsque x tend vers -1 avec $x < -1$, la limite de $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ est :
(a) 2 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$

6 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Lorsque h tend vers 0, la limite de $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ est :
(a) $f(5)$
(b) $f'(5)$
(c) 0

7 La fonction f est donnée par la courbe rouge ci-dessous.



(a) La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.
(b) La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f.
(c) La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Affirmation : Si, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant f(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2 Soit a un nombre réel. Soient g une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ et h une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$.
Affirmation : On a $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$.

3 Affirmation : Une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

4 Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{1}{n^2} + 1$.
Affirmation : On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$.

5 La fonction f, définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = -5 + \frac{1}{x} + \cos(x)$$
est encadrée par les fonctions $g(x) = -6 + \frac{1}{x}$ et $h(x) = -4 + \frac{1}{x}$.
Affirmation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$

TP 1 Taux d'équipement en enceintes connectées ALGO PYTHON

Objectif
Étudier un seuil à l'aide d'une fonction Python.

La proportion d'individus qui possèdent une enceinte connectée dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0 ; +\infty[$ par $p(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-0,2x}}$.

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2020.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

1. **a.** Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie les valeurs de la fonction p.

```
from math import exp

def p(x):
    return  .............
```

b. Utiliser cette fonction pour calculer dans la console les valeurs de $p(0)$, $p(2)$ et $p(3,5)$, puis interpréter les résultats obtenus dans le contexte de ce TP.

2. **a.** CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction p et conjecturer la valeur de la limite de cette fonction en $+\infty$.

b. Démontrer le résultat.

c. Démontrer que la fonction p est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3. On considère la fonction suivante.

```
def seuil(f,N,pas):
    x=0
    y=f(0)
    while y<N:
        x=x+pas
        y=f(x)
    return(x,y)
```

a. Que renvoie cette fonction et que représente chacune des variables f, N et pas ?

b. Dans la console, on a obtenu le résultat suivant.

```
>>> seuil(p,0.7,0.1)
(4.300000000000001, 0.7026606543447316)
```

Interpréter le résultat dans le contexte de ce TP.

c. Dans la console, le programme ne fonctionne plus lorsqu'on demande seuil(p,3,0.1).

Expliquer pourquoi.

d. On considère que le marché est saturé lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %. Expliquer pourquoi, selon cette modélisation, cela se produira un jour, puis déterminer l'année au cours de laquelle cela arrivera.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- La boucle Tant que s'écrit de la manière suivante :

```
while condition:
    instruction
```

TP 2 Limites de fonctions CALCULATRICE

Objectif Conjecturer la limite d'une fonction à l'aide de la calculatrice

On souhaite conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la limite en a des fonctions suivantes (a étant soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$).

- f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x^2+1}-x}{2x-\sqrt{x^2+2}}$ et $a=+\infty$.
- g, définie sur $[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{2x^2-\sqrt{x}-1}$ et $a=1$.

1. Écrire l'expression des fonctions f et g dans l'éditeur de fonctions de la calculatrice.
2. On peut ensuite calculer des images en utilisant l'expression algébrique.

a. Calculer des images par f pour de grandes valeurs de x, par exemple 10 000.
Que peut-on conjecturer pour la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

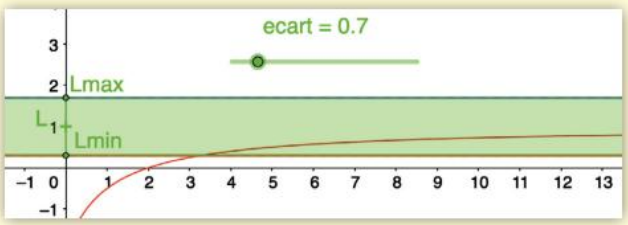
b. Calculer des images par g de valeurs de x proches de 1 par valeurs inférieures et de valeurs de x proches de 1 par valeurs supérieures, par exemple 0,9999 et 1,0001.
Que peut-on conjecturer pour les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x)$?

TP 3 Définition de la limite LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Illustrer la définition de la limite à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On considère la fonction définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$.

1. **a.** Représenter la courbe de la fonction f à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
b. Graphiquement, quelle conjecture peut-on faire sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
c. Démontrer le résultat.
2. Rappeler la définition de la limite finie d'une fonction en $+\infty$.
3. On a souhaité illustrer cette définition à l'aide d'un logiciel de géométrie et on a obtenu la capture ci-dessous.



a. Que représente la valeur 0,7 du curseur ? À quoi sert le curseur que l'on a créé ?
b. Que représente L ?
c. Quelles sont les coordonnées des points Lmin et Lmax ?
d. Reproduire la figure sur le logiciel.

4. En réduisant l'écart, observer la cohérence entre la définition donnée à la question **2** et le résultat trouvé à la question **1.c**.
5. La courbe admet-elle une asymptote ? Si oui, la tracer sur le logiciel.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Pour créer un curseur, utiliser a=2 puis définir les valeurs du maximum et du minimum, ainsi que le pas que l'on souhaite.
- Pour colorier un domaine, on utilise les inéquations : a(x)<=y<=b(x) représente les points compris entre les courbes des fonctions a et b.

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Dans chacun des cas suivants, on s'intéresse à la limite en a de la fonction donnée.
Indiquer mentalement s'il s'agit d'une forme indéterminée ou non. On ne demande pas de déterminer la limite.

1. $x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x}}$; $a = 0$.
2. $x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x^2-2}$; $a = +\infty$.
3. $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$; $a = 2$.
4. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $a = 1$.
5. $x \mapsto x^3 - \dfrac{1}{x}$; $a = -\infty$.
6. $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$; $a = +\infty$.
7. $x \mapsto 5x^2\mathrm{e}^x$; $a = -\infty$.
8. $x \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^x}{3x^2+1}$; $a = +\infty$.
9. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}}$; $a = +\infty$.

2 Déterminer mentalement les limites en a des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $a = +\infty$.
2. $g(x) = \sqrt{x} + x$; $a = +\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$; $a = 1$.
4. $i(x) = \dfrac{3}{x} - 2x$; $a = 0$.
5. $j(x) = \sqrt{x^2+1}$; $a = +\infty$.

3 Donner le signe des expressions suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ sur $]1\,;1{,}2]$.
2. $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ sur $[0{,}8\,;1[$.
3. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-2}$ sur $]\sqrt{2}\,;1{,}5]$.
4. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-2}$ sur $[1{,}3\,;\sqrt{2}[$.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

4 Étudier les limites des fonctions définies par les expressions suivantes quand x tend vers a.

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$; $a = +\infty$.
2. $g(x) = (1-x^2)(1-\sqrt{x})$; $a = +\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{1}{-x^2+x-1}$; $a = -\infty$.
4. $k(x) = 2x^4 + x - 3$; $a = -\infty$.

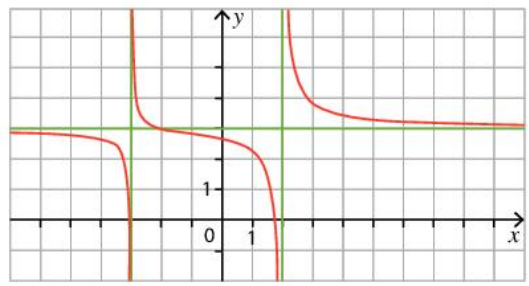
5 VRAI OU FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$, alors :
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
2. Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$, alors :
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
3. Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$, alors :
$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$
4. Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$, alors :
$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

6 1. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.
Étudier les limites de f lorsque x tend vers 2 (distinguer les cas $x < 2$ et $x > 2$).
2. Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+2}{-x-1}$.
Étudier les limites de g lorsque x tend vers -1 (distinguer les cas $x < -1$ et $x > -1$).

7 On considère la fonction f dont la courbe représentative est représentée ci-dessous en rouge.

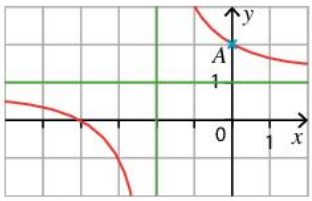


À l'aide du graphique :
1. conjecturer l'ensemble de définition de f ;
2. conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si la proposition est vraie ou fausse.

Soit f la fonction définie par $f(x) = a + \dfrac{b}{x + c}$, où a, b et c sont trois réels. Sa courbe représentative, tracée ci-dessous, admet deux asymptotes et passe par le point $A(0\,;2)$.



• On a $a = 1$; $b = 2$ et $c = 2$.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Le tableau suivant donne l'évolution d'une population de lièvres (en milliers) dans une région selon les années.

Année	1985	1990	1995	2020
Rang x de l'année	0	1	2	7
Population $f(x)$ en milliers	3	5,4	7	10

• En modélisant cette évolution de population par une fonction f dont l'expression est de la forme $f(x) = a + \dfrac{k}{x + 3}$, où a et k sont des constantes réelles, étudier l'évolution à très long terme de cette population.

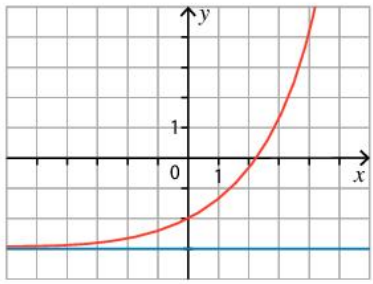
Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Dans ce chapitre, on va vu que les courbes représentatives de certaines fonctions pouvaient admettre des asymptotes horizontales ou verticales. Il existe aussi des fonctions dont les courbes représentatives admettent une asymptote oblique.
• Présenter cette notion à l'aide de quelques exemples. On pourra s'appuyer sur des représentations graphiques.

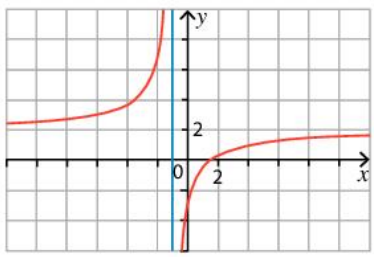
Limites de fonctions et asymptotes

1 On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



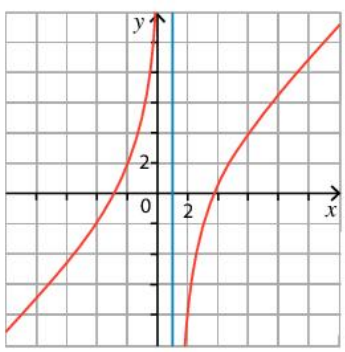
1. Conjecturer les limites de la fonction f en $+\infty$, puis en $-\infty$.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2 On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$.



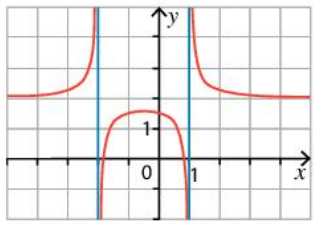
1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3 On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4 On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5 **Représenter**

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f.

6 Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	2

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles de la courbe de la fonction f.
3. Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f.

7 CALCULATRICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$.

1. À l'aide d'une calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f.
2. a. Conjecturer graphiquement la limite de f en $+\infty$.
b. Déterminer graphiquement un réel A tel que, pour tout $x > A$, $f(x) \in]0{,}99 ; 1{,}01[$.
3. a. Donner graphiquement la limite de f en $-\infty$.
b. Déterminer graphiquement un réel B tel que, pour tout $x < B$, $f(x) \in]0{,}999 ; 1{,}001[$.

8 ALGO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x + 1.$$

1. CALCULATRICE À l'aide d'une calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f.

2. a. Conjecturer graphiquement la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Quel est le rôle de l'algorithme suivant ?

$A \leftarrow 0$
Tant que $A^3 - A + 1 < 10\,000$
$A \leftarrow A + 1$

3. a. Conjecturer graphiquement la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Modifier l'algorithme précédent pour obtenir un réel x tel que $f(x) < -10\,000$.

9 Tracer l'allure de la courbe d'une fonction f qui vérifie simultanément les conditions suivantes.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$;
- $f(0) = -2$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$;
- la courbe de la fonction f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

Opérations sur les limites

10 **Calculer**

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto 3x^2 - 1$
2. $x \mapsto 5 - 2x$
3. $x \mapsto 2x^3 + x + 1$
4. $x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$

11 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto (x^2 + 1)(3 - 4x)$
2. $x \mapsto -2e^x + 3 + \dfrac{5}{x}$
3. $x \mapsto (2x + 1)(5 - 4x)$
4. $x \mapsto -x + \dfrac{2}{3x^2}$

12 On s'intéresse aux limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes. Dans chaque cas, indiquer s'il s'agit ou non d'une forme indéterminée, sans chercher à déterminer les limites.

1. $x \mapsto x^2 + x - 1$
2. $x \mapsto 2x^3 + x^2 - x - 1$
3. $x \mapsto (2x + 1)x^2$
4. $x \mapsto \dfrac{-2}{x + 1}$
5. $x \mapsto \dfrac{2x + 1}{e^x}$
6. $x \mapsto e^x + 1 + \dfrac{1}{x}$

13 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes.

1. $x \mapsto x^2 + x - 1$
2. $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$
3. $x \mapsto -2x^2 + 4x + 1$
4. $x \mapsto 2x^3 - 7x^2 + x - 2$

14 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes.

1. $x \mapsto 7x^2 - 2x + 4$
2. $x \mapsto -2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x$
3. $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x - 1$
4. $x \mapsto -2x^4 - 7x + 5$

15 **Calculer**

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes, appelées fonctions rationnelles (le numérateur et le dénominateur sont des fonctions polynômes).

1. $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x - 1}$
2. $x \mapsto \dfrac{4x + 3}{-2x + 1}$
3. $x \mapsto \dfrac{-3x - 1}{6 - x}$
4. $x \mapsto \dfrac{-3 - 8x}{5 - x}$

16 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{1 - x}$
2. $x \mapsto \dfrac{x + 3}{-2x^2 + 1}$
3. $x \mapsto \dfrac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2}$
4. $x \mapsto \dfrac{4x^3 - 3x - 1}{-x^2 + x + 1}$

17 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto xe^x\sqrt{x}$.
2. $x \mapsto x - \sqrt{x}$. On factorisera par $\sqrt{x}$.
3. $x \mapsto \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x}}$. On factorisera le numérateur par $\sqrt{x}$.
4. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$. On factorisera le dénominateur par $\sqrt{x}$.

18 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{1}{x - 3}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{1}{x - 3}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{2}{1 - x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{2}{1 - x}$

19 **Calculer**

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{-3x}{2x - 4}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{-3x}{2x - 4}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{x^2 - 10}{6 - 2x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{x^2 - 10}{6 - 2x}$

20 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^2}$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{-2x}{(4x - 2)^2}$

21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. CALCULATRICE Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement à l'aide de la calculatrice les résultats trouvés.

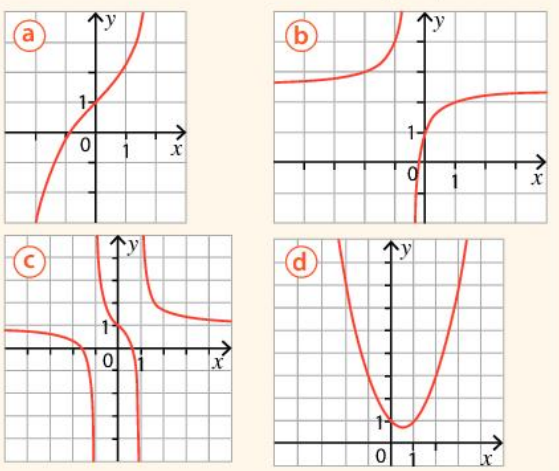
22 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1.$$
1. Étudier le sens de variation de la fonction g.
2. Étudier les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. CALCULATRICE Dresser le tableau de variation de la fonction g et vérifier graphiquement, à l'aide de la calculatrice, les résultats trouvés.

23 Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{-2}{x-1}.$$
1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.
3. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 1 (on distinguera les cas $x < 1$ et $x > 1$).
En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.

24 Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x}{4-2x}.$$
1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.
3. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 (on distinguera les cas $x < 2$ et $x > 2$).
En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.

25 PRISE D'INITIATIVE
Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

- $f(x) = \frac{x-1}{2x+1} + 2$
- $g(x) = x^2 - x + 1$
- $h(x) = \frac{1}{4}x^3 + x + 1$
- $k(x) = 1 + \frac{x}{x^2-1}$



26 **Chercher**
Dans chaque cas, déterminer une expression possible de deux fonctions f et g qui vérifient, d'une part :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty ;$$
et d'autre part :
a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$.
c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$.

27 Dans chaque cas, déterminer les expressions possibles de deux fonctions f et g qui vérifient d'une part :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty ;$$
et d'autre part :
a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = 0$.
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$.
c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) \times g(x)) = 5$.

28 **Chercher**
Trouver la valeur du réel a tel que :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(5-2x)(2+ax)}{3x^2+5} = 8.$$

29 Démontrer que la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{5-2x}{2x-3}$, définie sur l'ensemble $]-\infty ; 1{,}5[\cup]1{,}5 ; +\infty[$, admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

30 ALGO PYTHON
On considère le programme suivant.

```
x=0
for i in range (1,150):
    F=(3+2*x)/(x**2+1)
    x=x+100
```

Choisir la bonne réponse. Après l'exécution de ce programme, la variable F contient un nombre :
(a) très grand ; (b) proche de zéro ;
(c) proche de 1 ; (d) proche de 7.

Composition de limites

31 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 5 - 3x \text{ et } g(x) = e^x.$$
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{5-3x}$.

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
- Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

33 Soit g la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}.$$

• Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

34 Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,;3[$ par :

$$h(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{3-x}}.$$

• Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

35 Soit r la fonction définie sur $]-\infty\,;3[$ par :

$$r(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{3-x}}.$$

• Déterminer la limite de la fonction r en $-\infty$.

36 Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(x)=\mathrm{e}^{x^2-3x+2}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction s en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de la fonction s en $-\infty$.

37 Soit t la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$t(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

• Déterminer la limite de la fonction t en $+\infty$.

38 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(3-x^2\right)^3.$$

• Sans développer $f(x)$, déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

39 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+\sqrt{x+1}.$$

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Montrer que $f(x)=\dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$.
3. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

40 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\sqrt{\frac{n^2+1}{n+2}}.$$

• Déterminer la limite de la suite (u_n).

41 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

42 En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer la limite de la suite de terme général :

$$v_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}.$$

Comparaison de limites et croissances comparées

43 Dans chacun des cas suivants, dire si la (ou les) inégalité(s) proposée(s) permet(tent) de conclure sur la limite éventuelle de la fonction f en $+\infty$.

1. Pour tout réel x, $f(x)\geqslant\dfrac{x^2}{6}$.
2. Pour tout $x>0$, $1-\dfrac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant 1+\dfrac{1}{x}$.
3. Pour tout $x>1$, $\dfrac{x}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{x-1}$.
4. Pour tout $x>1$, $\dfrac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x+2}{x+1}$.

44 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-\cos(x).$$

• Donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

45 Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{\sin(x)}{x^2}.$$

• Donner un encadrement de $h(x)$ et en déduire les limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$.

46 Soit m la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$m(x)=\sin(x)\times\mathrm{e}^x.$$

• À l'aide d'un encadrement bien choisi, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} m(x)=0$.

47 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$
2. $x\mapsto\mathrm{e}^x-x$
3. $x\mapsto x\mathrm{e}^{-x}$
4. $x\mapsto\mathrm{e}^x-1\,000x$

48 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x-4x}{\mathrm{e}^x+7}$. On factorisera par e^x le numérateur et le dénominateur.
2. $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x-4x}{x}$. On factorisera par e^x le numérateur.

49 ALGO PYTHON On considère le programme suivant.

```
from math import exp
x=100
for i in range (1,150):
    F=exp(x)/x
    x=x+100
```

Choisir la bonne réponse.
Après l'exécution de ce programme, la variable F contient un nombre :

(a) très grand ; (b) proche de zéro ;
(c) proche de 1 ; (d) proche de 7.

50 **Représenter**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x - 2}{1 - x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

51 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{5 - 2x}{-x - 3}$ sur $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

52 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

53 On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

54 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x + 1 + \frac{1}{x}}.$$

• Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

55 **Calculer**

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \frac{3e^x + 1}{1 + e^x}$
2. $g : x \mapsto \frac{e^x + 3}{e^{2x}}$
3. $h : x \mapsto \frac{(e^x + 5)(x - 2)}{x + 3}$
4. $i : x \mapsto \frac{7e^x + 1}{(e^x + 3)^2}$
5. $j : x \mapsto \frac{e^x + 3}{x}$
6. $k : x \mapsto (e^x - 5)(x + 700)$

56 **Asymptote oblique** Approfondissement

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}.$$

1. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x + 3$. Que constate-t-on ?
4. Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (x + 3).$$

Montrer que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

*On dit que la droite d'équation $y = x + 3$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f.*

57 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 3}$ sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

1. Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 3. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
4. Déterminer les trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}.$$

5. Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (ax + b).$$

Montrer que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

58 PRISE D'INITIATIVE

Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe représentative d'une fonction f vérifiant les conditions données.

1. f est une fonction positive qui ne possède pas de maximum et qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ qui ne possède ni maximum ni minimum et n'ayant pas de limite en $+\infty$.

59 VRAI OU FAUX

Raisonner

Dire, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier la réponse ; si elle est fausse, donner un contre-exemple sous forme de graphique.

1. Si une fonction f est telle que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Si une fonction f est telle que, pour tout réel x, $f(x) > x^2$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. Si une fonction f est strictement croissante, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Si une fonction f est strictement décroissante, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

60 VRAI OU FAUX

Dire, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier la réponse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple sous forme de graphique.

1. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors f est une fonction positive.

2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, alors il existe un réel A tel que, pour tout $x>A$, $f(x)>0$.

3. Si une fonction f est telle que, pour tout réel x strictement négatif, $\frac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

4. Si une fonction f est bornée (c'est-à-dire si elle admet un maximum et un minimum), alors elle admet une limite réelle en $+\infty$.

61 ALGO PYTHON

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^2-x-1.$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Quel est le rôle de l'algorithme suivant, qui renvoie le réel x ?

```
x ← 0
A ← 100
Tant que x² − x − 1 < A
        x ← x + 1
```

c. Programmer cet algorithme en Python, puis l'exécuter avec $A=100$, $A=1\,000$ puis $A=10\,000$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x-25}{\sqrt{x}+5}.$$

a. Tracer la courbe représentative de la fonction g.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

c. Adapter l'algorithme précédent à cette fonction.

d. Tester l'algorithme avec $A=10$, $A=100$ puis $A=1\,000$. Comment expliquer ces résultats ?

e. Proposer une modification de l'algorithme pour qu'il donne la valeur attendue avec $A=1\,000$, puis avec $A=100\,000$.

62 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie pour tout réel $x\neq 0$ par $f(x)=\dfrac{\left(50+x^{30}\right)^2-2\,500}{x^{30}}$.

1. Développer $\left(50+x^{30}\right)^2$ et déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. On a obtenu avec une calculatrice la table de valeurs ci-contre. Est-ce conforme au résultat de la question 1 ?

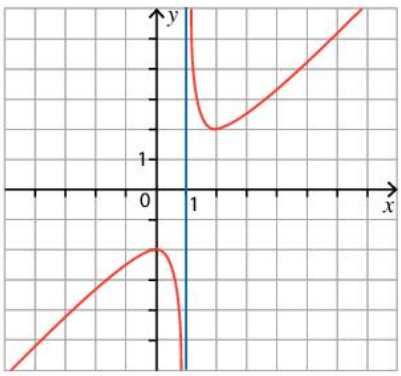
3. Écrire, à l'aide de la calculatrice, la table de valeurs de la fonction f à partir de la valeur $x=0{,}3$ et un pas de 0,01. Trouve-t-on la même chose ? Comment expliquer le résultat ?

X	Y1
.1	0
.2	0
.3	0
.4	0
.5	99.965
.6	100
.7	100
.8	100
.9	100.04
1	101
1.1	117.45

63 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



a. Démontrer que, pour tout réel $x\neq 1$:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}.$$

b. Déterminer la limite de $f(x)-(x-1)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Reproduire le graphique et construire la courbe d de la fonction $x\mapsto x-1$.

Que constate-t-on ?

4. Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d.

64 **Avec le taux d'accroissement**

Déterminer les limites suivantes à l'aide du taux d'accroissement.

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$ 2. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^3-8}{t-2}$ 3. $\lim\limits_{t\to 25}\dfrac{\sqrt{t}-5}{t-25}$

65 1. Déterminer $\lim\limits_{h\to-\infty}\left(-5h^3+2h-1\right)$.

2. En déduire $\lim\limits_{h\to-\infty} e^{-5h^3+2h-1}$.

3. Procéder de même en $+\infty$.

66 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{7}{x}-3x+x^2}$; $a=+\infty$

2. $f(x)=\sqrt{4+5e^x}$; $a=-\infty$

3. $f(x)=e^{-x^2}+3x+1$; $a=-\infty$

4. $f(x)=e^{-\frac{7}{x}}$; $a=-\infty$

67 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

• Déterminer la limite de f en $+\infty$

68 CALCULATRICE

Pour chacune des fonctions suivantes, conjecturer à la calculatrice sa limite en a (a infini) puis démontrer cette conjecture.

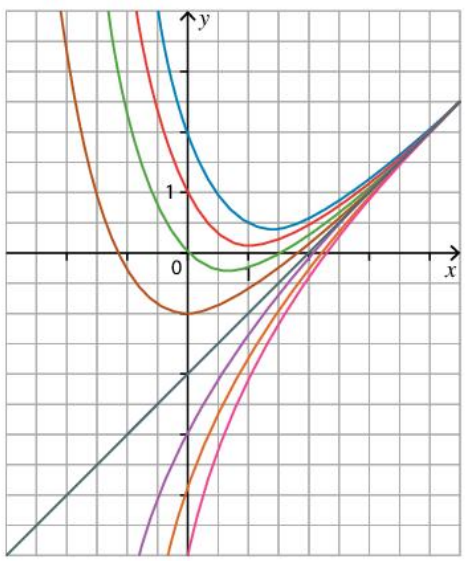
1. f est la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :
$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \ ;$$
$a = +\infty$.
On s'aidera de l'égalité $\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \dfrac{X - Y}{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}$.

2. g est la fonction définie pour tout réel $x \neq 1$ par :
$$g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(1-x)^3} ;$$
$a = -\infty$.

69 Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$
1. Montrer que pour tout $x < -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{-1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$.
2. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
3. La courbe de f admet-elle des asymptotes ? Si oui, donner leurs équations.

70 **Une famille de fonctions**

Soit k un entier relatif quelconque.
On pose, pour tout réel x, $f_k(x) = x - 2 + ke^{-x}$.
On a tracé les courbes $\mathscr{C}_k$ de f_k pour certaines valeurs de k ci-dessous.



1. Calculer $f_k(0)$ et identifier chaque courbe avec la valeur de k correspondante.
2. a. Discuter selon la valeur de k la limite de f_k en $-\infty$.
b. Déterminer la limite de f_k en $+\infty$.
3. a. Dresser selon la valeur de k le tableau de variation de f_k.
b. Lorsque k est strictement positif, on appelle A_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ correspondant au minimum de f_k. Montrer que les points A_k sont tous alignés entre eux.

71 **Fonctions logistiques**

Pierre Verhulst (mathématicien belge du XIX^{e} siècle) présente les fonctions définies sur le modèle :
$$f(t) = \frac{a}{1 + e^{c-bt}}$$
où a, b et c sont des constantes prédéfinies.
Elles permettent de décrire une évolution de population vivant dans un milieu clos. Ce type de fonction est aussi utile en économie pour modéliser la demande d'un produit.
Ici, on choisit $a = 10$, $b = 0{,}5$ et $c = 2$.
1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(t)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. PRISE D'INITIATIVE
Tracer la courbe de f et montrer que le point M de coordonnées (4 ; 5) est son centre de symétrie.

72 ALGO PYTHON **Population de grenouilles**

Modéliser

Un groupe de biologistes étudie la population de grenouilles autour d'un étang. Au 1er janvier 2020, ils ont comptabilisé 250 individus.
Le modèle de Verhulst, usuel en biologie (voir exercice 71), conduit à modéliser le nombre de grenouilles par la fonction P définie par $P(t) = \dfrac{a}{0{,}4 + 3{,}6e^{-0{,}5t}}$ où a est un réel et t désigne le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2020.
1. Déterminer la valeur du réel a grâce aux données de l'énoncé.
2. Déterminer la limite de P en $+\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Dresser le tableau de variation de P.
4. Recopier et compléter le programme suivant, écrit en Python, pour déterminer en quelle année la population de grenouilles dépassera pour la première fois 2 000 individus.

```
from math import exp

def P(t):
    return ...

def seuil(P):
    t=0
    while ... :
        t=t+1
    return t
```

73 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

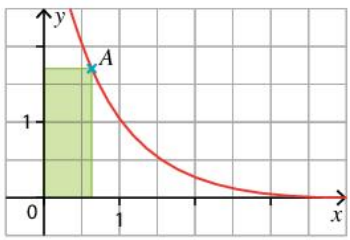
1. Démontrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et si, pour tout réel x, on a $f(x) \times f'(x) = 1$, alors :
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$
2. Donner la formule donnant la dérivée de u^2 lorsque u est une fonction dérivable, puis proposer une fonction f qui répond aux conditions de la question précédente.

74 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{e}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{e^x}$ pour $x \neq 0$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.
5. CALCULATRICE Vérifier les résultats précédents grâce à la calculatrice.

75 **Raisonner**

On considère la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (-x+4)e^{-x}$ dont la courbe est représentée ci-dessous en rouge.



On considère le rectangle tracé sur la figure ci-dessus et on note $g(x)$ son aire.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$:
$$g(x) = \left(-x^2 + 4x\right)e^{-x}$$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Étudier les variations de f.
4. L'expression de g donnée à la question 1 est-elle correcte pour tout x de $[0 ; +\infty[$?

76 On définit, pour tout réel x positif, la fonction f par :
$$f(x) = \frac{2x+3}{\cos(x)-2}.$$
1. Montrer que, pour tout réel x positif, on a :
$$\frac{2x+3}{-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+3}{-3}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

77 On définit, pour tout réel x négatif, la fonction f par :
$$f(x) = \frac{2x+3\cos(5x)}{3-2x}.$$
1. Montrer que, pour tout réel x positif, on a :
$$\frac{2x-3}{3-2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+3}{3-2x}.$$
2. En déduire la limite de f en $-\infty$.

78 **Avec une fonction auxiliaire**

Partie A

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :
$$g(x) = e^x - x.$$
1. Calculer, pour tout réel x, $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de g, en justifiant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Justifier que, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$? En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. On déduit des questions précédentes que la courbe de f admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2. Donner une équation de chacune d'elles.
5. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{\left(e^x - x\right)^2}$.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. CALCULATRICE Vérifier les résultats des questions 4 et 6 avec la calculatrice.

79 VRAI OU FAUX

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}.$$
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$
4. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{\left(e^x - 1\right)^2}$.
5. f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

80 **Calculer**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{ax+b}$, où a et b sont deux constantes réelles.

Les points $B(100 ; 100)$ et $C\left(50 ; \dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ appartiennent à la courbe de f.

1. Expliquer pourquoi le couple $(a ; b)$ est solution du système $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -0{,}5 \end{cases}$.
2. Résoudre le système et en déduire que, pour tout réel x, $f(x) = xe^{0{,}01x-1}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout réel x, on a :
$$f(x) = \frac{100}{e} \times 0{,}01xe^{0{,}01x}.$$
5. En déduire la limite de f en $-\infty$.
6. Dresser le tableau de variation de f.

81 VRAI OU FAUX

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x et y.
Indiquer, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. En donnant à x et y des valeurs numériques bien choisies, il est possible de trouver la valeur de $f(0)$.
2. Pour tout entier naturel n, $f(n)$ et n sont des grandeurs proportionnelles et, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, alors $f(1)=0$.
3. Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$ est un nombre fini, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

82 **Famille de fonctions**

Pour tout réel k, on considère la fonction f_k définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f_k(x)=\dfrac{x^2+kx-1}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative.

1. **Étude du cas $k=0$**

Montrer que, si $k=0$, les points de la courbe $\mathscr{C}_k$ sont alignés.
Dans la suite du problème, on suppose que $k\neq 0$.

2. **Étude des limites de f_k**

a. Déterminer les limites de la fonction f_k en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Déterminer les limites de la fonction f_k quand x tend vers 1, en fonction du signe de k.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_k$?

3. **Étude des variations de f_k**

a. Montrer que, pour tout $x\in]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$:

$$f_k'(x)=\frac{x^2-2x+1-k}{(x-1)^2}.$$

b. En distinguant les cas $k<0$ et $k>0$, en déduire les variations de la fonction f_k.
c. Dresser le tableau de variation de f_k (distinguer les cas $k<0$ et $k>0$).

4. **Étude des courbes $\mathscr{C}_k$**

a. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur k puis tracer la courbe $\mathscr{C}_k$.
b. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point A dont on donnera les coordonnées.
c. Trouver une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ en A.
On notera $\mathscr{T}_k$ cette tangente.
d. Montrer que, pour tout $x\in]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$:

$$f_k(x)-((1-k)x+1)=\frac{kx^2}{x-1}.$$

e. En déduire, en fonction du signe de k, la position relative de la courbe $\mathscr{C}_k$ et de la tangente $\mathscr{T}_k$.

83 PRISE D'INITIATIVE

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle du type $[A\,;+\infty[$, où A est un réel.
Établir si la proposition suivante est vraie ou fausse, en justifiant.
« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq+\infty$. »

84 VRAI OU FAUX

Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$, alors les fonctions f et g ont la même limite en $+\infty$.
4. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, alors les fonctions f et g ont la même limite en $+\infty$.

85 **Position relative de deux courbes**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+3}{x^2-1}$$

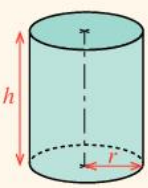
et la fonction g définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{x^2+2}{x+1}.$$

1. Étudier les limites des fonctions f et g aux bornes de leurs ensembles de définition.
2. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE CALCULATRICE Tracer leurs courbes représentatives à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice. Quelle remarque peut-on faire sur ces deux courbes quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$?
3. a. Montrer que, pour tout réel x distinct de –1 et 1, on a : $f(x)-g(x)=\dfrac{-2x+5}{x^2-1}$.
b. En déduire la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.
c. Déterminer les limites de $f(x)-g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Cela confirme-t-il la remarque faite à la question 2 ?

86 PRISE D'INITIATIVE

Pour un cylindre de volume $\mathscr{V}$ constant, on note r son rayon de base, $h(r)$ sa hauteur et $S(r)$ son aire latérale.
• Quel est le comportement de la hauteur et de l'aire latérale du cylindre lorsque r tend vers 0 ? vers $+\infty$?



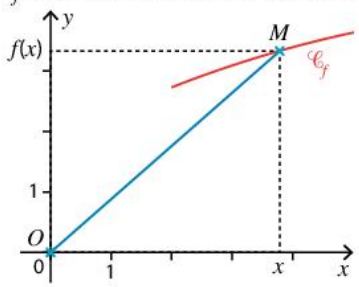
87 On note f la fonction exponentielle et on définit, pour tout entier naturel n non nul, les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=f(f(\ldots(f(f(x)))\ (n \text{ fois}).$$

On que l'on compose n fois la fonction exponentielle avec elle-même.
On a donc $f_1(x)=\mathrm{e}^x$, $f_2(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$, etc.

1. Discuter selon les valeurs de n la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
2. Même question avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$.

88 Soit f une fonction et M un point de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé.



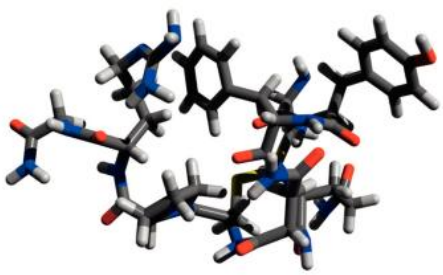
1. Quelle est la pente de la droite (OM) ?
2. Calculer cette pente lorsque f est la fonction racine carrée. Quelle est la limite de cette pente lorsque x tend vers $+\infty$? Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?
3. Calculer cette pente lorsque f est la fonction carré. Quelle est la limite de cette pente lorsque x tend vers $+\infty$? Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

89 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2 + 2}.$$

• Déterminer la limite de f en $+\infty$ par comparaison avec une fonction simple.

90 **Vasopressine**



La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme. Son taux dans le sang est considéré comme normal lorsqu'il est inférieur à 2,5 $\mu g \cdot mL^{-1}$.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. Par exemple, il y a production de vasopressine en cas d'hémorragie et, dans ce cas, le taux de vasopressine dans le sang dépend du temps écoulé, en seconde, depuis le début de l'hémorragie selon la fonction $f(t) = 3te^{-0,25t} + 2$ pour $t > 0$. Ce taux est exprimé en $\mu g \cdot mL^{-1}$.
1. a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang au début de l'hémorragie ?
b. Justifier que, 12 secondes après le début de l'hémorragie, le taux de vasopressine n'est pas normal.
c. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ? Combien vaut-il alors ?

91 ALGO PYTHON **C'est pas du gâteau !**

Dans un four chauffé à 180 °C, on place un gâteau à température ambiante (20 °C) à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en minute).
La température du gâteau, en °C, est donnée par la fonction f définie par $f(t) = 180 - ke^{-\alpha t}$, où k et α sont deux constantes réelles.
1. Déterminer la valeur de k en utilisant la température initiale du gâteau.
2. CALCULATRICE On constate qu'au bout de 20 minutes, la température du gâteau a doublé. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.
3. Quelle est la température limite du gâteau ?
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. a. Écrire en langage naturel un algorithme qui permet de déterminer quelle durée il faut attendre pour que le gâteau atteigne la température de 179 °C.
b. Programmer cet algorithme en Python et donner cette durée.

92 Soit x un réel. On note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.
1. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$x - 1 \leqslant E(x) \leqslant x.$$

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$.
3. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

93 **Des limites et des paramètres**
Soient α, β, γ trois réels distincts et a, b, c trois réels. f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax^3}{x + \alpha} + \frac{bx^3}{x + \beta} + \frac{cx^3}{x + \gamma}$$

pour tout réel x différent de $-\alpha$, $-\beta$ et $-\gamma$.
1. Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

$$a + b + c = 0 \text{ et } a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ si et seulement si :

$$a = b = c = 0.$$

3. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{\beta - \gamma}{x + \alpha} + \frac{\gamma - \alpha}{x + \beta} + \frac{\alpha - \beta}{x + \gamma}\right).$$

ZOOM SUR... les tableaux de variation

Lorsqu'on dresse le tableau de variation d'une fonction, il ne faut pas oublier de mentionner les valeurs des limites. Ces valeurs doivent par ailleurs être justifiées, même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé.

94 40 min

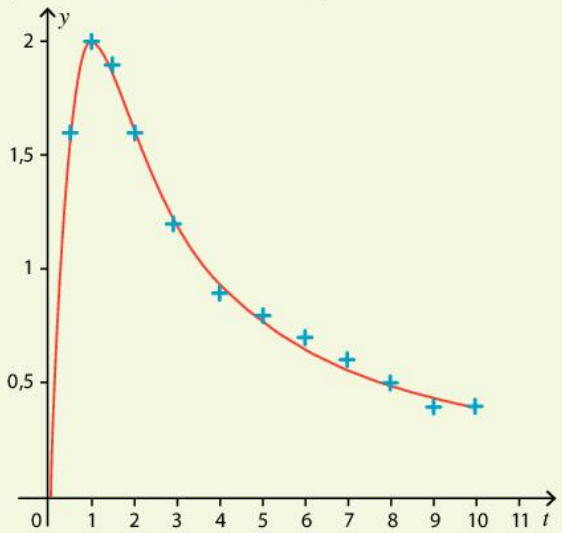
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation. Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en h	0,5	1	1,5	2	3	4
Concentration en mg·L^{-1}	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9

Temps en h	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg·L^{-1}	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g, définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $g(t) = \dfrac{4t}{t+1}$.

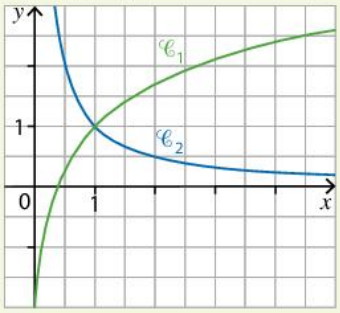
Lorsque t représente le temps écoulé, en heure, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg·L^{-1} de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique, donner sans justification :
a. les variations de la fonction g sur [0 ; 10] ;
b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg·L^{-1}.
2. a. Déterminer la dérivée $g'(t)$ de la fonction g.
b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?
4. On définit la CMI (concentration minimale inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au-dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier. La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg·L^{-1}. Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile, c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.
5. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui détermine le nombre d'heures nécessaires pour que la concentration de l'antibiotique étudié soit inférieure à 0,01 mg·L^{-1}.

95 15 min QCM

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle]0 ; +∞[.



On sait que :
• l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$;
• l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$;
• la fonction f_2 est strictement décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞[;
• la fonction f_1 est strictement croissante sur l'intervalle]0 ; +∞[;
• la limite, quand x tend vers +∞, de $f_1(x)$ est +∞.
Pour chacune des questions suivantes, donner la seule réponse exacte sans justifier.

1. La limite, quand x tend vers 0, de $f_2(x)$ est :
(a) 0 (b) +∞ (c) on ne peut pas conclure.

2. La limite, quand x tend vers +∞, de $f_2(x)$ est :
(a) 0 (b) 0,2 (c) on ne peut pas conclure.

3. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

(a)

x	0		+∞
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	+	

(b)

x	0		+∞
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	−	

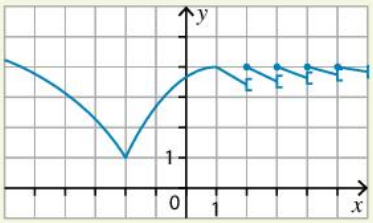
(c)

x	0		1		+∞
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	+	0	−	

96 25 min VRAI OU FAUX

Indiquer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ci-dessous.



On a $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

2. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
On suppose que, quel que soit le réel x, on a :
- $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$.

Alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5.

3. Si, pour tout réel x, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant 1$, alors :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - e^x - 2x\right) = +\infty$

5. La courbe de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote.

97 15 min

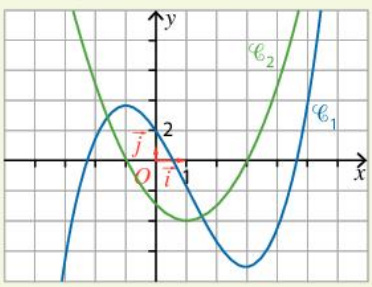
On définit la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

1. Dresser le tableau de signes de la fonction tangente.
2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x)$.
3. Même question avec $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$.

98 25 min

Partie A. Étude graphique

Les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée f' sont données ci-dessous.



• Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ à la fonction qu'elle représente. Justifier.

Partie B. Constructions

Dans cette partie, chacun des tracés sera brièvement expliqué.

1. Construire une courbe pouvant représenter une fonction g vérifiant toutes les conditions suivantes :
• g est dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 3]$;
• l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3 ; 3]$;
• les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ sont différentes.

2. Construire une courbe pouvant représenter une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions indiquées dans le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-h(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

99 40 min

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$.
Dresser son tableau de variation.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.

c. Montrer que, si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
De même, montrer que, si x appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Représenter graphiquement les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Consolider ses acquis

100 Limite d'une fonction

On considère la fonction définie sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 3}$.

Questions Va piano

On donne le tableau de signes de f.

x	$-\infty$	-2		3		5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

1. a. Retrouver dans le tableau que, pour x proche de 3 par valeur inférieure, $f(x)$ est positif.

b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$.

2. Procéder de même pour $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x)$.

3. Que peut-on dire de la droite d'équation $x = 3$?

Questions Moderato

1. Étudier le signe de :

$$n(x) = x^2 - 3x - 10,$$

puis celui de :

$$d(x) = x - 3.$$

2. En déduire l'étude du signe de la fonction f.

3. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty$.

4. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = -\infty$.

5. Conclure quant à la présence d'une asymptote verticale.

Questions Allegro

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 3.

b. Que peut-on en conclure graphiquement pour la courbe de la fonction f ?

2. Dresser le tableau de variation de f.

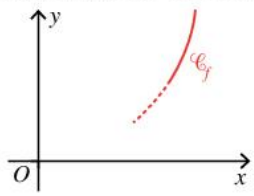
3. Écrire $f(x)$ sous la forme $x - 3 + \dfrac{cx + d}{x - 3}$, où c et d sont des constantes réelles.

4. La droite d'équation $y = x - 3$ est-elle asymptote oblique à la courbe de f ?

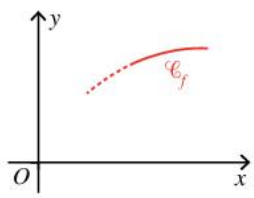
Se préparer aux études supérieures

101 Branche infinie Approfondissement

Lorsqu'une fonction f vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, on dit que la courbe de f présente une branche parabolique de direction (Oy).



Lorsqu'une fonction f vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe de f présente une branche parabolique de direction (Ox).



Préciser si les courbes des fonctions suivantes présentent une branche parabolique de direction (Ox) ou (Oy).

1. $x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{2}{x}$

2. $x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3}$

3. $x \mapsto x^2 + \cos(x)$

4. $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

102 Développement limité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la limite, lorsque x tend vers 0, de la fonction ε_n définie, pour tout réel $x \neq 0$, par :

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x} - \left(1 + x + \ldots + x^n\right)\right].$$

2. Montrer que, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n \varepsilon_n(x).$$

$1 + x + \ldots + x^n$ s'appelle le développement limité à l'ordre n de $\dfrac{1}{1-x}$ pour x proche de 0.

De façon générale, un développement limité d'une fonction f en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point.

3. a. Écrire le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ pour x proche de 0 à l'ordre 3.

b. CALCULATRICE En utilisant ce développement limité, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{0{,}9}$ et vérifier avec la valeur de $\dfrac{1}{0{,}9}$ obtenue avec la calculatrice.

4. Reprendre la question **3** en travaillant avec un développement limité à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.

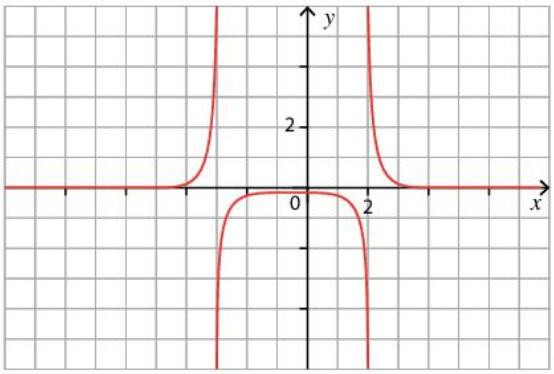
Les développements limités sont très utilisés en sciences physiques, où l'on assimile certaines fonctions à leur approximation polynomiale, l'erreur commise étant prise en compte dans les calculs.

No problem!

1 Describing a graph

Describe the graph on the right using vocabulary like:

- domain
- range
- input
- output
- x approaches
- is close to
- the limit from the left/right



2 Electronics

In a capacitive circuit, the instantaneous voltage across the capacitor at time t (in seconds) is given by:

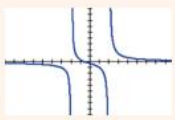
$$v(t) = a\left(1 - e^{-bt}\right).$$

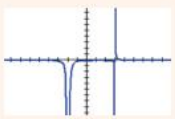
where a and b are positive constant numbers. v tends to 5 volts as t tends to infinity. The derivative of v at time 0 is 2.

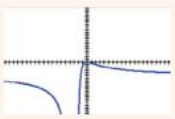
1. Find $v(t)$ only in terms of t (find a and b) and prove that v is increasing.
2. Compute after how much time the voltage is greater than 4.5 volts.

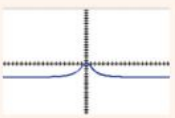
3 Dominoes GROUP WORK

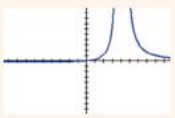
Make a chain of dominoes placing them end to end. Then create your own game.

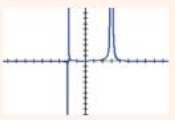
$g(x) = \dfrac{2x+1}{(x-4)^2}$ 

$h(x) = \dfrac{-5x^2+1}{(x+3)^2}$ 

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ 

$l(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2(x-3)}$ 

$k(x) = \dfrac{-5x^2+1}{x^2+3}$ 

$m(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2(x-3)}$ 

Final exam Past papers

The curve $\mathscr{C}$ has equation $y = \dfrac{5x^2+5x+1}{x^2+x+1}$.

1. Find the equation of the asymptote of $\mathscr{C}$.
2. Show that, for all real values of x, $-\dfrac{1}{3} \leqslant y < 5$.
3. Find the coordinates of any stationary points of $\mathscr{C}$.
4. Sketch $\mathscr{C}$, stating the coordinates of any intersections with the y-axis.

CHAPITRE

4

Dérivation, convexité et continuité

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Une nouvelle propriété pour certaines fonctions

Johan Jensen

Johan Jensen (1859-1925) est un mathématicien danois, en partie autodidacte. Ingénieur dans une société de télécommunications, il réalise presque tous ses travaux mathématiques hors du cadre professionnel. Il est surtout connu pour ses travaux d'analyse, entre autres sur les fonctions dites convexes.

Une fonction convexe sur un intervalle est une fonction dont la courbe représentative se situe en dessous de tout segment joignant deux de ses points.
Dans un article datant de 1906, Jensen met en avant l'intérêt de telles fonctions pour démontrer de nombreuses inégalités. Avant lui, déjà, d'autres mathématiciens avaient utilisé des inégalités « de convexité » pour certaines démonstrations, mais sans avoir formalisé cette notion.
En pratique, les fonctions convexes, même d'expressions compliquées, permettent des résolutions aisées de problèmes d'optimisation.

À l'aide des informations du texte ci-dessus, représenter graphiquement une fonction convexe et citer une fonction de référence convexe sur $\mathbb{R}$.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

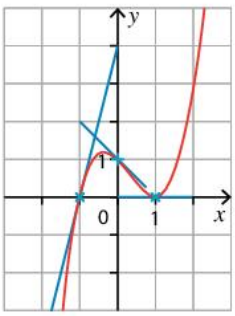
1 Enchaînement de fonctions

Dans chacun des cas suivants, quand cela est possible, calculer l'image par g de $f(a)$, puis l'image par f de $g(a)$.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}$; $g : x \mapsto 3 - x$; $a = 0$
2. $f : x \mapsto \sqrt{x}$; $g : x \mapsto 3 - x$; $a = 4$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$; $a = 0$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$; $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$; $a = 1$

2 Lectures graphiques (1)

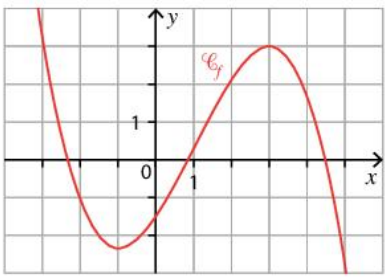
On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et quelques-unes de ses tangentes.



1. Lire graphiquement $f(1)$, $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Lire graphiquement $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(-1)$.

3 Lectures graphiques (2)

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, représentée graphiquement par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



Déterminer graphiquement :

a. le tableau de variation de f ;
b. l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
c. le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f.

4 Dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et simplifier au maximum leurs expressions.

1. $f : x \mapsto x + 2\sqrt{x}$
2. $g : x \mapsto 3x^4 - 5x^2 + x - 7$
3. $h : x \mapsto \dfrac{7x^2}{3-x}$
4. $k : x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^x$

5 Variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1.$$

- Déterminer les variations de f sur $[-3 ; 3]$.

6 Tangente à une courbe

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 5x^2 - 2x + 3.$$

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

7 Nombre dérivé (1)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. On suppose que f est dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausse, en justifiant.

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a) - f(a+h)}{h} = f'(a)$
3. $f'(a) \neq 0$ quel que soit le réel a de I.
4. Le nombre dérivé de f en a est l'ordonnée à l'origine de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

8 Nombre dérivé (2)

On considère la fonction en Python suivante, où f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

```
1 def nombre_dérivé(f,a):
2     h=1e-10
3     return ...
```

- Recopier et compléter la ligne 3 afin qu'elle renvoie une approximation du nombre dérivé de f en un réel a de I.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Composition de fonctions

Objectif Introduire la composition des fonctions.

On considère la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 1$, et la fonction v, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $v(x) = 2\sqrt{x}$.

1. On a obtenu le tableau ci-contre avec un tableur.

	A	B	C
1	x	$u(x)$	$v(u(x))$
2	-3	8	5,65685425
3	-2	3	3,46410162
4	-1	0	0
5	0	-1	#NOMBRE!
6	1	0	0
7	2	3	3,46410162
8	3	8	5,65685425

a. Quelle formule a été saisie en B2 pour que la colonne B puisse être complétée en recopiant cette formule vers le bas ?

b. Quelle formule a été saisie en C2 pour que la colonne C puisse être complétée par recopie vers le bas ?

c. Calculer les valeurs exactes de $v(u(2))$, puis de $v(u(3))$.

d. La cellule C5 du tableau n'a pas pu être complétée. Expliquer pourquoi.

2. La fonction qui, à x, associe $v(u(x))$ est appelée fonction composée de u par v et elle est notée $v \circ u$. Préciser son ensemble de définition et son expression algébrique.

3. **a.** La fonction qui, à x, associe $u(v(x))$ est appelée fonction composée de v par u et elle est notée $u \circ v$. Préciser son ensemble de définition et son expression algébrique.

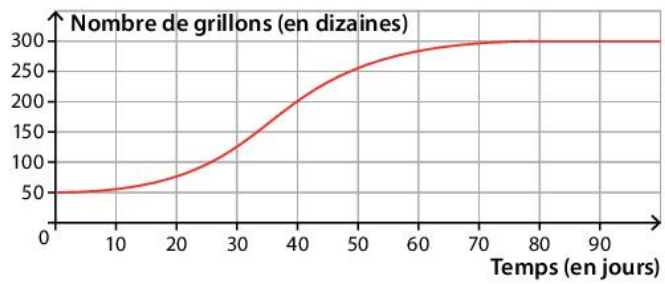
b. Les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ sont-elles égales ? Justifier.

4. La fonction f qui, à tout réel x, associe e^{x^2+1} peut être considérée comme la composée de deux fonctions. Déterminer deux fonctions g et h telles que $f = g \circ h$.

Situation 2 Élevage d'insectes comestibles

Objectif Introduire la notion de convexité.

Soucieux des problèmes d'écologie, Louis décide d'élever des grillons comestibles. Pour cela, il décide de mettre au point un écosystème miniature dans des vivariums à l'intérieur desquels ses grillons peuvent croître et se multiplier. Il étudie les populations de grillons dans plusieurs vivariums et en tire une modélisation par une fonction f dont le graphe, ci-dessous, donne le nombre de dizaines de grillons en fonction du temps. On admet que cette fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.



1. En écologie, on appelle capacité porteuse d'un écosystème relative à une espèce la taille maximale que peut atteindre la population de cette espèce dans cet écosystème.
Quelle semble être la capacité porteuse relative aux grillons dans les vivariums de Louis ?

2. Déterminer graphiquement sur quelle période la croissance de la population est accélérée et sur quelle période elle est ralentie. Justifier brièvement et conjecturer une explication de ce phénomène.

3. Avec la précision permise par le graphique, dresser le tableau de variation de f, puis celui de f'.

4. En admettant de plus que f est deux fois dérivables sur $[0 ; +\infty[$, dresser le tableau de signes de f'', fonction dérivée de f'.

Situation 3 Périmètre et aire

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Introduire la notion de continuité et le théorème des valeurs intermédiaires.

Soient A, B et C trois points alignés tels que $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm.
On construit deux rectangles $ABFG$ et $BCDE$, de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.
Soit M un point quelconque du segment $[AC]$.
Lorsque M appartient à $[AB]$, on note M' le projeté orthogonal de M sur $[GF]$ (figure 1).
Lorsque M appartient à $[BC]$ en étant distinct de B, on note M' le projeté orthogonal de M sur $[ED]$ (figure 2).

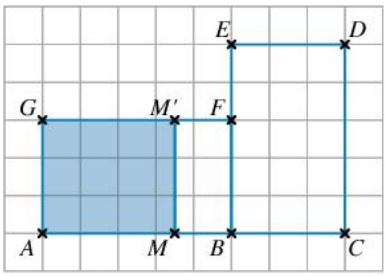


Figure 1

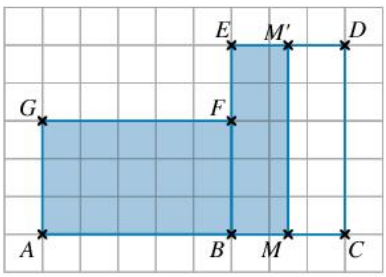


Figure 2

On note :
• x la distance AM ;
• f la fonction qui, à chaque valeur de x, associe soit l'aire du rectangle $AMM'G$ quand M est un point de $[AB]$, soit l'aire de l'hexagone $AMM'EFG$ quand M est un point de $[BC]$ distinct de B ;
• g la fonction qui, à chaque valeur de x, associe soit le périmètre du rectangle $AMM'G$ quand M est un point de $[AB]$, soit le périmètre de l'hexagone $AMM'EFG$ quand M est un point de $[BC]$ distinct de B.

1 **a.** Exprimer $f(x)$ en fonction des valeurs de x.

b. Tracer la courbe représentative de f dans un repère à l'aide d'un logiciel de géométrie.

c. Existe-t-il une valeur de x telle que l'aire de la figure coloriée soit égale à 12 cm^2 ? Si oui, laquelle ? Même question pour 20 cm^2 et 32 cm^2.

d. Déterminer graphiquement l'ensemble des réels k tels que l'équation $f(x) = k$ admette au moins une solution.

2 **a.** Exprimer $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

b. Tracer la courbe représentative de g dans un repère à l'aide d'un logiciel de géométrie.

c. Existe-t-il une valeur de x telle que le périmètre de la figure coloriée soit égal à 10 cm ? Si oui, laquelle ? Même question pour 24 cm et 18 cm.

d. Déterminer graphiquement l'ensemble des réels k tels que l'équation $g(x) = k$ admette au moins une solution.

1. Compléments de dérivation

1. Fonctions composées

Définition

Soient u et v deux fonctions dont les ensembles de définition respectifs sont notés $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$.
La **fonction composée de u par v**, notée $v \circ u$, est la fonction définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
L'ensemble de définition de $v \circ u$ est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathscr{D}_u$ dont l'image par u appartient à $\mathscr{D}_v$.

Exemple

Soit $u : x \mapsto 2x + 6$, définie sur $\mathbb{R}$, et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0 ; +\infty[$.
$v(u(x))$ existe si et seulement si $u(x)$ existe et est positif. Or $2x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$, donc la fonction composée $v \circ u$ est définie sur $[-3 ; +\infty[$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x + 6) = \sqrt{2x + 6}$.
La fonction composée $u \circ v$ est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 6$.

Remarque

En général, $v \circ u \neq u \circ v$.

2. Dérivée d'une fonction composée

Propriété

DÉMO p. 123

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Cas particuliers

- La fonction f, définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
- Si, pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et

DÉMO en ligne

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

- Soit n un entier relatif non nul et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
Si $n \geqslant 1$, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.
Si $n \leqslant -1$ et si u ne s'annule pas sur I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

3. Dérivée seconde

Définitions

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I.
On note f'' la dérivée de f'. Elle est appelée **dérivée seconde** de f.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x + \mathrm{e}^x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2 + 5 + \mathrm{e}^x$.
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $(f')'(x) = 6x + \mathrm{e}^x$.
f est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x + \mathrm{e}^x$.

Méthode 1 Composer des fonctions

Soient u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$, v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3x - 1$ et w la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $w(x) = \sqrt{x}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $u \circ v$, puis déterminer explicitement $(u \circ v)(x)$.
2. Préciser l'ensemble de définition de $v \circ u$, puis déterminer explicitement $(v \circ u)(x)$.
3. Préciser l'ensemble de définition de $v \circ w$, puis déterminer explicitement $(v \circ w)(x)$.
4. Préciser l'ensemble de définition de $w \circ v$, puis déterminer explicitement $(w \circ v)(x)$.

Solution commentée

1. La fonction $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(3x - 1) = (3x - 1)^2$$

2. La fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v\left(x^2\right) = 3x^2 - 1$$
On remarque que $v \circ u \neq u \circ v$.

3. La fonction v est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction w est définie sur $[0 ; +\infty[$, donc $v \circ w$ est définie sur $[0 ; +\infty[$.
$$(v \circ w)(x) = v(w(x)) = v\left(\sqrt{x}\right) = 3\sqrt{x} - 1$$

4. La fonction v est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction w est définie sur $[0 ; +\infty[$, donc $w \circ v$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $3x - 1 \in [0 ; +\infty[$, c'est-à-dire sur $\left[\frac{1}{3} ; +\infty\right[$.
$$(w \circ v)(x) = w(v(x)) = w(3x - 1) = \sqrt{3x - 1}$$

EXERCICE 1 p. 130

Méthode 2 Dériver une fonction composée

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g sur l'intervalle I donné.

1. g est la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{2x - 4}$; $I =]2 ; +\infty[$.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2 - 1\right)^4$; $I = \mathbb{R}$.
3. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 3}$; $I = \mathbb{R}$.

Solution commentée

1. $g(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 2x - 4$. $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x - 4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 4}}$.

2. $g(x) = (u(x))^4$, avec $u(x) = x^2 - 1$.
$g'(x) = 4 \times u'(x) \times (u(x))^{4-1} = 4 \times 2x \times \left(x^2 - 1\right)^3 = 8x\left(x^2 - 1\right)^3$

3. $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = x^2 - 3$.
$g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2x\mathrm{e}^{x^2 - 3}$

EXERCICE 5 p. 130

Méthode 3 Calculer une dérivée seconde

On admet que $f : x \mapsto x^2 + x - 2$ est deux fois dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

- Calculer sa dérivée seconde f''.

Solution commentée

On calcule d'abord la dérivée de f : $f'(x) = 2x + 1$, puis la dérivée de f' : $f''(x) = 2$.

EXERCICE 15 p. 131

2. Convexité : approche graphique

1. Fonctions convexes et concaves

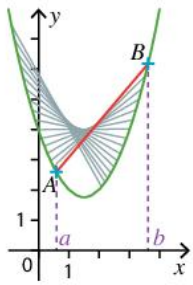
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

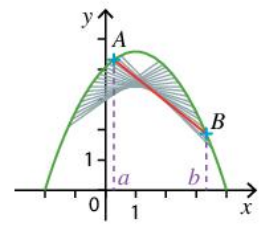
- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est **en dessous** de la sécante (AB).
- f est **concave** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est **au-dessus** de la sécante (AB).

Exemples

- La fonction représentée ci-dessous est convexe.



- La fonction représentée ci-dessous est concave.



- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

Remarque

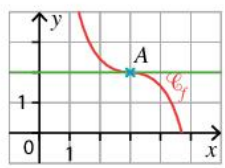
Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

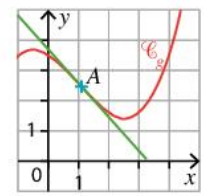
2. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$.
A est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}$ traverse cette tangente en A.

Exemples



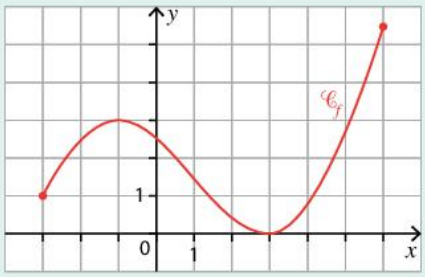


Remarque

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de f, la fonction f change de convexité.

Méthode 1 Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f sur $[-3 ; 6]$.
2. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe et celui (ou ceux) où f est concave.

Solution commentée

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		-1		3		6
$f(x)$	1	↗	3	↘	0	↗	$5{,}5$

2. La fonction f semble concave sur l'intervalle $[-3 ; 1]$, car toute sécante formée par des points de la courbe semble être en dessous de la courbe.
La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[1 ; 6]$, car toute sécante formée par des points de la courbe semble être au-dessus de la courbe.

EXERCICE 17 p. 131

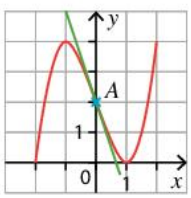
Méthode 2 Déterminer graphiquement l'existence d'un point d'inflexion

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[-2 ; 2]$.
2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracer $\mathscr{T}_0$.
3. En déduire graphiquement l'abscisse d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Solution commentée

1. Voir le graphique ci-contre.



2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3$.
On a donc $f'(0) = -3$. De plus, $f(0) = 2$.
Au point A d'abscisse 0, l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ est :
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$
La tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = -3x + 2$.

3. Au point A d'abscisse 0, on observe que la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse la tangente $\mathscr{T}_0$. Le point A semble donc être un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 17 p. 131

3. Convexité des fonctions dérivables

1. Caractérisations de la convexité

Propriétés (admises)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur l'intervalle I.
- f'' est positive sur l'intervalle I.
- f' est croissante sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est concave sur l'intervalle I.
- f'' est négative sur l'intervalle I.
- f' est décroissante sur I.

Exemple

On considère la fonction polynôme f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f''(x) = 6$.
La fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Convexité et tangentes

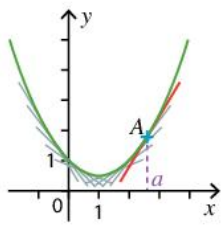
Propriétés

DÉMO p. 122

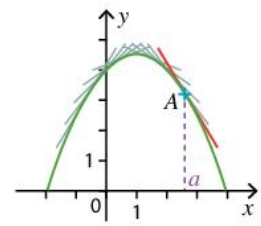
Soient f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.
- Sur l'intervalle I, f est convexe si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
- Sur l'intervalle I, f est concave si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

Exemples

- La fonction f représentée ci-dessous est convexe.



- La fonction g représentée ci-dessous est concave.



Remarque

Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît « de plus en plus vite » sur I. Si elle est dérivable sur I, les pentes des tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.
Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît « de moins en moins vite ».

3. Point d'inflexion

Propriétés (admises)

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel appartenant à I.
- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

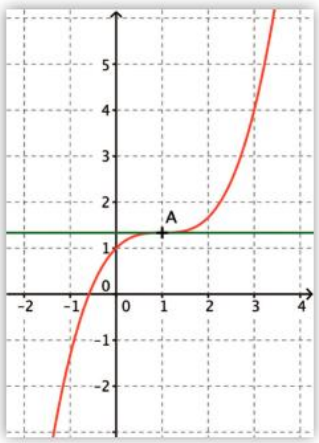
Méthode 1 Utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité d'une fonction

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de géométrie, conjecturer la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
2. Calculer la dérivée seconde de f.
3. En déduire la convexité de f.
4. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, que l'on précisera.

Solution commentée

1. On conjecture sur la figure ci-contre, obtenue avec un logiciel de géométrie, que f est concave sur $]-\infty;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$ et que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1, noté A sur la figure.



2. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, et $f'(x)=x^2-2x+1$. Donc $f''(x)=2x-2$.

3. $f''(x)=2x-2=2(x-1)$
Pour tout réel x appartenant à $]-\infty;1]$, $f''(x)\leqslant 0$, donc f est concave sur $]-\infty;1]$.
Pour tout réel x appartenant à $[1;+\infty[$, $f''(x)\geqslant 0$, donc f est convexe sur $[1;+\infty[$.

4. En $x=1$, f'' s'annule en changeant de signe, donc $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1.

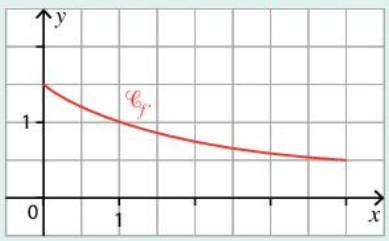
EXERCICE 29 p. 132

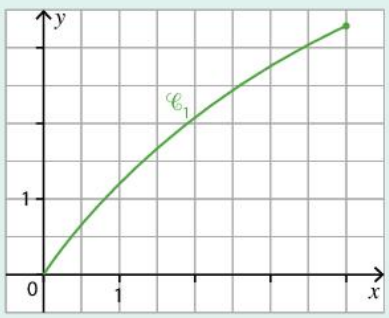
Méthode 2 Relier convexité d'une fonction et sens de variation de sa dérivée

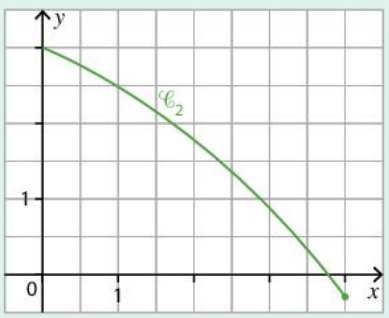
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;4]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de sa fonction dérivée f', représentée ci-contre.

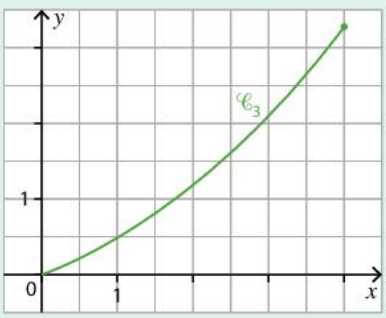
- $\mathscr{C}_f$ est l'une des trois courbes ci-dessous.

Préciser laquelle en justifiant clairement la réponse.









Solution commentée

$\mathscr{C}_{f'}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, donc f' est positive, donc f est une fonction croissante, ce qui élimine la courbe $\mathscr{C}_2$.
De plus, l'allure de $\mathscr{C}_{f'}$ indique que f' est décroissante et donc que f est concave : la courbe représentative de f est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

EXERCICE 27 p. 132

4. Fonctions continues

1. Fonction continue sur un intervalle

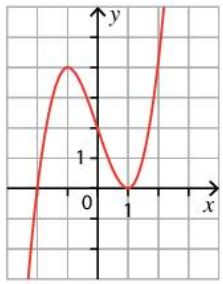
Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \in I$. On dit que f est **continue en a** lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur I** si, pour tout réel a appartenant à I, f est continue en a.

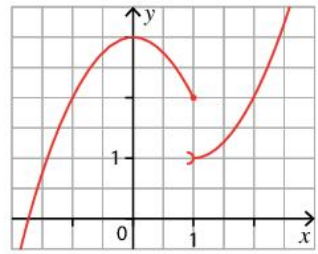
Exemples

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.



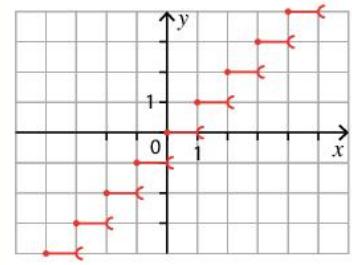
f est continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 \text{ si } \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$



f n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.



Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Propriétés

Propriétés (admises) : continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple

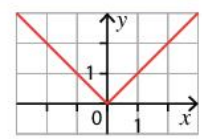
La fonction f, définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$, est continue sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynômes.

Propriété (admise) : continuité et dérivabilité

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0.



Propriété (admise) : continuité et suites convergentes

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et (u_n) une suite à valeurs dans I.
Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

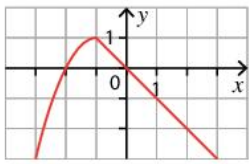
Méthode 1 Étudier une fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & \text{si } x\leqslant -1\\ -x & \text{si } x>-1\end{cases}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
2. Étudier la continuité de la fonction f :
   a. sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$; **b.** sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$; **c.** en -1.
3. Que peut-on en conclure ?

Solution commentée

1. Voir le graphique ci-contre.



2. **a.** La fonction $x\mapsto -x^2-2x$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty\,;-1]$.
   b. La fonction $x\mapsto -x$ est une fonction affine, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-1\,;+\infty[$.
   c. D'une part, f est continue sur $]-\infty\,;-1]$, avec $f(-1)=1$. On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=f(-1)=1$.
   D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (-x)=1$.
   Finalement : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=1=f(-1)$. La fonction f est donc continue en -1.
3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 32 p. 133

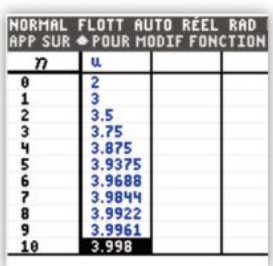
Méthode 2 Calculer la limite d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+2$.
On admet que (u_n) converge et on note ℓ la limite de (u_n).

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, conjecturer la valeur de ℓ.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$.
4. Démontrer la conjecture de la question 2 en utilisant la continuité de f.

Solution commentée

1. La fonction f est affine, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

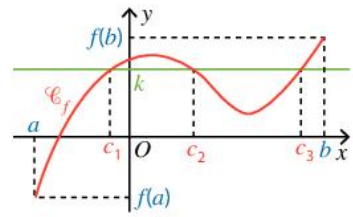


2. À l'aide d'une calculatrice (voir ci-contre), on conjecture que la limite de la suite (u_n) est 4.
3. On résout l'équation $f(x)=x$. $f(x)=x\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+2=x\Leftrightarrow x=4$.
   Le nombre 4 est donc l'unique réel égal à sa propre image par f.
4. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc, puisque (u_n) converge vers ℓ, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Or la suite $(f(u_n))$ est la suite (u_{n+1}), qui a la même limite que (u_n), donc la limite ℓ vérifie $\ell=f(\ell)$. D'après la question 3, l'unique solution de cette équation est 4. La suite (u_n) converge donc vers 4.

EXERCICE 34 p. 133

5. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Cas d'un intervalle fermé



Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

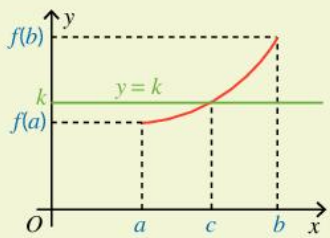
Remarque

Cela signifie que, quand x varie de a à b, $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires (admis)

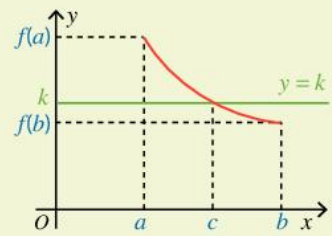
Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

- Cas où f est strictement croissante :



x	a		c		b
$f(x)$	$f(a)$	↗	k	↗	$f(b)$

- Cas où f est strictement décroissante :



x	a		c		b
$f(x)$	$f(a)$	↘	k	↘	$f(b)$

Remarque

Dans un tableau de variation, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

2. Extension à d'autres intervalles

Théorème (admis)

a désigne soit un réel, soit $-\infty$; b désigne soit un réel, soit $+\infty$.
Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $]a\,;\,b[$.

- Pour tout réel k strictement compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $]a\,;\,b[$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur $]a\,;\,b[$, alors cette solution est unique.

Remarque

On peut étendre ce théorème à un intervalle semi-ouvert $[a\,;\,b[$ ou $]a\,;\,b]$.

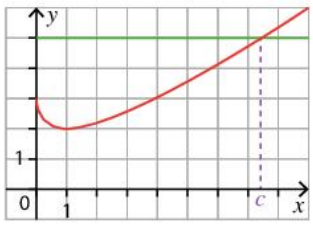
Méthode 1 Prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$.

• Prouver que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4 ; 9]$.

Solution commentée

La fonction $x \mapsto x + 3$ est une fonction affine continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0 ; +\infty[$, et la fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc, par produit et par somme de fonctions continues sur $[0 ; +\infty[$, f est continue sur $[0 ; +\infty[$.
La fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc aussi sur $[4 ; 9]$.
$f(4) = 3$ et $f(9) = 6$, donc $5 \in [f(4) ; f(9)]$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[4 ; 9]$.



EXERCICE 37 p. 133

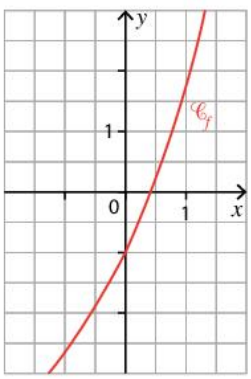
Méthode 2 Prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - 2$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.
2. Démontrer que f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
4. Déterminer avec la calculatrice un encadrement décimal de α à 10^{-2} près.

Solution commentée

1. Voir ci-contre.



2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et on a $f'(x) = e^x + 1$.
Pour tout réel x, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc, par somme de limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc, par somme de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus ; $0 \in \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$ donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

4. D'après le tableau de valeurs ci-contre (réalisé avec un pas de 0,01), on a :

$$0{,}44 < \alpha < 0{,}45.$$

Régler l'intervalle	
0.41	-0.00318221
0.42	-0.05803844
0.43	-0.03274248
0.44	-0.007292781
0.45	0.01831219
0.46	0.04407398

EXERCICE 38 p. 133

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.
Sur l'intervalle I, si f est convexe, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Démonstration

On suppose f convexe sur I. Soit $a \in I$.

- L'équation de la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

On note d la fonction définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.
La fonction d est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et :

$$d'(x) = f'(x) - f'(a).$$

- La fonction f est convexe sur I, donc la fonction f' est croissante sur I, donc la fonction d' l'est aussi.

Or $d'(a) = 0$, donc, pour tout réel x de I :
– si $x \leqslant a$, alors $d'(a) \leqslant 0$;
– si $x \geqslant a$, alors $d'(a) \geqslant 0$.
Donc, la fonction d est décroissante sur $]-\infty\,;a] \cap I$ et croissante sur $[a\,;+\infty[\cap I$.

x	a
$d'(x)$	0 ↗
$d(x)$	↘ 0

De plus, $d(a) = 0$, donc 0 est le minimum de d sur I, donc la fonction d est positive sur I.
Donc, pour tout réel x appartenant à I, $f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \geqslant 0$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}_a$ sur l'intervalle I.

- En conclusion, sur I, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

1. Faire un schéma pour expliquer graphiquement ce que représente la fonction d.
2. Quelle est la nature de la fonction $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$?
3. Détailler le calcul de $d'(x)$.
4. Justifier que d' est croissante sur l'intervalle I.
5. Pourquoi le fait que $\mathscr{C}_f$ soit au-dessus de $\mathscr{T}_a$ pour un réel quelconque appartenant à l'intervalle I prouve que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes sur I ?

Rédiger une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I avec $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Une fonction f étant dérivable en un réel a, on admet que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- On commence par prouver la propriété ci-dessous.

« Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est dérivable en a.
(ii) Il existe une fonction φ définie sur I, continue en a, telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + (x - a)\varphi(x). \text{ »}$$

Montrer que (i) implique (ii) en considérant la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si } x \neq a \text{ et } \varphi(a) = f'(a).$$

Montrer que (ii) implique (i) en utilisant la continuité en a de la fonction φ.

- Soit $a \in I$.

Justifier qu'il existe une fonction φ définie sur I et continue en a, telle que, pour tout x de I :

$$u(x) = u(a) + (x - a)\varphi(x)$$

Justifier qu'il existe une fonction ψ, définie sur J et continue en $u(a)$, telle que, pour tout y de J :

$$v(y) = v(u(a)) + (y - u(a))\psi(y).$$

- Montrer que, pour tout x de I, $v(u(x)) = v(u(a)) + (x - a)\varphi(x)\psi(u(x))$.
- En déduire que $v \circ u$ est dérivable en a.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1. L'affirmation suivante est vraie ? Justifier.
« Soit f une fonction continue et croissante sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ telle que $f(-3) = -1$ et $f(3) = 2$.
L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3 ; 3]$. »

2. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
« Soit f une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ telle que $f(-3) = -1$ et $f(3) = 2$.
L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3 ; 3]$. »

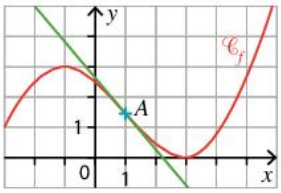
Raisonner par contre-exemple
Pour démontrer qu'un résultat est faux, il suffit de trouver un contre-exemple.

Répéter en solo

Carte mentale

Déterminer le(s) point(s) d'inflexion d'une courbe

- Au point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

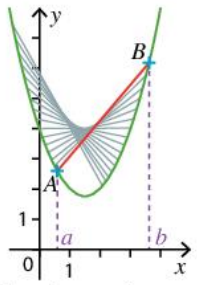


Soit f une fonction deux fois dérivable.

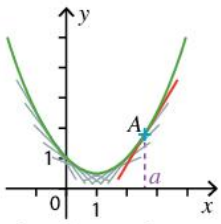
- Si f' change de sens de variation en a, alors le point de coordonnées $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors le point de coordonnées $(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la convexité d'une fonction

Convexe

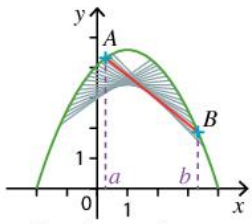


Courbe en dessous des sécantes

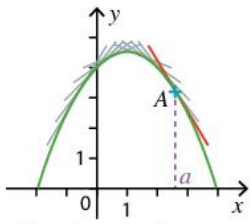


Courbe au-dessus des tangentes

Concave



Courbe au-dessus des sécantes



Courbe en dessous des tangentes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f''$ est positive sur I.
- f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow f''$ est négative sur I.

Dérivation, convexité et continuité

Calculer la dérivée d'une fonction composée

- Fonction composée :
$$v \circ u(x) = v(u(x)).$$
En général, $v \circ u \neq u \circ v$.
- Dérivée d'une fonction composée :
$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$
- Dérivées de fonctions composées usuelles :
$$(e^u)' = u'e^u.$$
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ (n entier relatif non nul)

Connaître et utiliser les fonctions continues pour résoudre une équation $f(x)=k$

- f est **continue** en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Les fonctions affines, polynômes, racine carrée et exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)**
Soit f une fonction définie et continue sur $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[a\,;b]$.
- **Cas particulier du TVI**
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur :

(a) $[0 ; +\infty[$ (b) $[-1 ; 1]$ (c) $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

2 On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$u : x \mapsto 2x^2 + 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

L'expression de la fonction $u \circ v$, définie sur $\mathbb{R}$, est :

(a) $(u \circ v)(x) = 2e^{2x} + 1$

(b) $(u \circ v)(x) = (2x^2 + 1)e^x$

(c) $(u \circ v)(x) = e^{2x^2+1}$

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f : x \mapsto (3x-1)^{17}$.

L'expression de la dérivée f' de f est :

(a) $f'(x) = 51(3x-1)^{16}$

(b) $f'(x) = 17(3x-1)^{16}$

(c) $f'(x) = 3(3x-1)^{16}$

4 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ par :

$f(x) = \sqrt{(1+3x)^3}$.

L'expression de la dérivée f' de f est :

(a) $f'(x) = 3\sqrt{(1+3x)^2}$

(b) $f'(x) = \dfrac{9\sqrt{(3x+1)^3}}{6x+2}$

(c) $f'(x) = \dfrac{9}{2\sqrt{(1+3x)^3}}$

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{3x^2-2x+1}$.

L'expression de la dérivée f' de f est :

(a) $f'(x) = e^{3x^2-2x+1}$

(b) $f'(x) = e^{6x-2}$

(c) $f'(x) = (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$

6 La fonction $g : x \mapsto e^x - \sqrt{x}$:

(a) est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

(b) est concave sur $]0 ; +\infty[$.

(c) n'est ni convexe ni concave sur $]0 ; +\infty[$.

7 Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = e^x + \sqrt{x} - 3$.

Sur $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$:

(a) n'admet aucune solution.

(b) admet une unique solution.

(c) admet plusieurs solutions.

8 Soit m un entier et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 3 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 8x + 3 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

(a) $m = 15$

(b) $m = -8$

(c) $m = -4$

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(4x+1)^4}$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right[$.

2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

a pour dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

3 Si f est une fonction dérivable concave sur l'intervalle I, alors sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

4 Toutes les fonctions dérivables et convexes sur $\mathbb{R}$ ont une dérivée positive sur $\mathbb{R}$.

5 La courbe représentative dans un repère de la fonction $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$, admet deux points d'inflexion.

6 Si f est continue sur $[a ; b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de même signe, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[a ; b]$.

TP 1 Méthode de Newton-Raphson ALGO PYTHON

Objectif
Comparer deux méthodes numériques de résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = xe^x - 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On souhaite comparer la rapidité de deux algorithmes de calcul d'une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

1 Une première méthode

On considère la fonction Python ci-dessous.

```
def méthode_1(a,b,n):
    for i in range(n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else :
            a=m
    return [a,b]
```

a. Expliquer le principe de cette méthode et le rôle de chacun des arguments de la fonction. Quel est le nom de cette méthode ?

b. Recopier cette fonction dans un éditeur, puis la tester après avoir défini au préalable la fonction f.

2 La méthode de Newton-Raphson

a. Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

b. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 en fonction de $f'(x_0)$, $f(x_0)$ et x_0.

c. Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection de $\mathscr{T}_0$ avec l'axe des abscisses vérifie :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

d. On réitère ce procédé en remplaçant x_0 par x_1 pour obtenir une abscisse x_2, puis en remplaçant x_1 par x_2 pour pour obtenir une abscisse x_3, et ainsi de suite.
On choisit $x_0 = 1$.
Recopier les fonctions ci-dessous dans l'éditeur, puis compléter la deuxième fonction.

```
def nombre_dérivé_approché(a):
    h=1e-10
    return(f(a+h)-f(a))/h

def méthode_Newton(n):
    x=1
    for i in range(n):
        x=x-...
    return ...
```

3 On souhaite calculer le nombre d'étapes nécessaires à la méthode de Newton-Raphson pour obtenir une valeur approchée de la solution dans l'intervalle $[a ; b]$, avec une précision au moins égale à celle qui a été obtenue par la méthode de la question 1 en 50 étapes.
Pour cela, recopier et compléter la fonction comparaison ci-dessous, puis conclure.

```
def comparaison(n):
    a=méthode_1(0,1,n)[0]
    b=...
    i=0
    while ... or ... :
        i=i+1
    return ...
```

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour importer la fonction exponentielle : from math import exp
- Le premier élément d'une liste est : Liste[0]

TP 2 Convexité d'une fonction

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Conjecturer la convexité d'une fonction à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis la démontrer.

On souhaite étudier graphiquement puis démontrer la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-0,5x} + 1.$$

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
2. Créer un curseur a compris entre –2 et 15, puis placer le point de coordonnées $A(a\,;f(a))$.
3. Construire la tangente $\mathscr{T}_f$ à $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. En faisant varier le curseur et en observant la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $\mathscr{T}_f$, conjecturer la convexité de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les abscisses des éventuels points d'inflexion.
5. Tracer, dans le même repère, la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f pour confirmer les conjectures faites à la question précédente.
6. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f, puis celle de sa dérivée seconde f''.
   En déduire le tableau de signes de la fonction f'' et démontrer les conjectures.

TP 3 Convexité d'un produit de fonctions

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

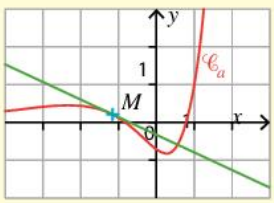
Objectif Conjecturer la convexité d'un produit de fonctions à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis la démontrer

Soit $a \in [-5\,;5]$. On considère les fonctions u_a et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_a(x) = x^2 + a \text{ et } v(x) = \mathrm{e}^x.$$

On note f_a le produit des fonctions u_a et v. On admet que toutes ces fonctions sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Préciser la convexité des fonctions u_a et v sur $\mathbb{R}$.
2. Ouvrir une feuille de travail dans un logiciel de géométrie.
   a. Créer un curseur a prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-5\,;5]$.
   b. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_a$ de la fonction f_a et faire varier le curseur a.
   c. Construire un point M sur $\mathscr{C}_a$ et la tangente à $\mathscr{C}_a$ en M.

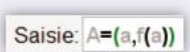


3. **a.** La proposition suivante est-elle vraie ?
   « Le produit de deux fonctions convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I. »
   b. À l'aide de la figure, conjecturer pour quelles valeurs de a la fonction f_a est convexe.
   c. On prend $a = 1$. Conjecturer graphiquement la convexité de la fonction f_1.
4. **a.** Montrer que $f_a''(x) = P_a(x)\mathrm{e}^x$, où $P_a(x) = x^2 + 4x + 2 + a$.
   b. On note Δ_a le discriminant du trinôme P. Montrer que $\Delta_a = 4(2 - a)$.
   c. En déduire une preuve de la conjecture émise à la question 3.b.
   d. On prend $a = 1$. Étudier alors le signe du trinôme P_1 selon les valeurs de x et en déduire une preuve de la conjecture émise à la question 3.c.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Pour créer un curseur, utiliser .
- Pour saisir un point de coordonnées données en fonction d'un curseur a :



- Pour obtenir la trace d'un point, faire un clic droit sur le point mobile et sélectionner « afficher la trace ».
- Pour tracer une tangente à une courbe, utiliser :

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Sans se soucier de l'intervalle sur lequel la fonction est dérivable, donner l'expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$
2. $g(x)=(3x-1)^4$
3. $h(x)=\mathrm{e}^{x^2+3}$
4. $j(x)=\sqrt{x-5}$

2 Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{6-x}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(4-x)^2}$
3. $f : x \mapsto (1-x)^{-2}$
4. $f : x \mapsto (4x-1)\mathrm{e}^{x+1}$

3 Sans se soucier de l'intervalle sur lequel la fonction est deux fois dérivable, donner l'expression de la dérivée seconde des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x)=x^2-3x+2$
2. $g(x)=3x^3-2x^2+4x-10$
3. $h(x)=x$
4. $j(x)=\mathrm{e}^x+x^2$

4 La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :

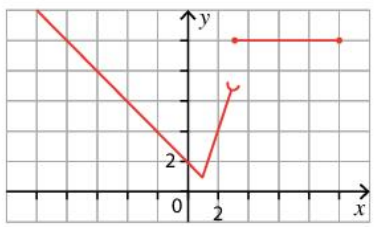
$$g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5-x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

5 Répondre aux questions à l'aide de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-10\,;10]$ ci-dessous.



1. Citer un intervalle sur lequel la fonction f est continue.
2. Combien de solutions a l'équation $f(x)=0$?
3. Combien de solutions a l'équation $f(x)=4$?
4. Combien de solutions a l'équation $f(x)=10$?

6 On considère les fonctions f, g et h définies sur $]-\infty\,;0[$ respectivement par :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{-1}{2x}}$; $g(x)=\sqrt{3-2x}$; $h(x)=(x-3)^3$.

Sans utiliser de calculatrice, associer à chaque fonction son tableau de variation.

a)

$-\infty$		0
0	↗	‖

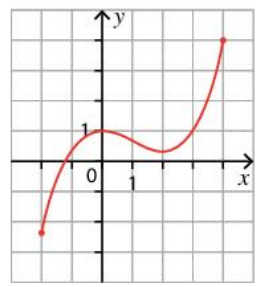
b)

$-\infty$		0
$-\infty$	↗	‖

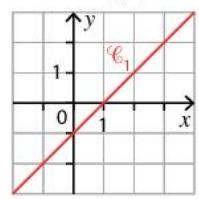
c)

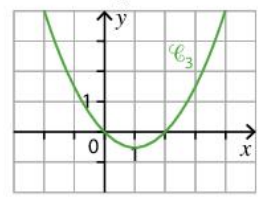
$-\infty$		0
$+\infty$	↘	‖

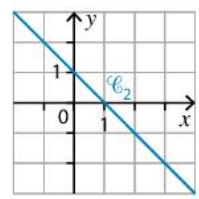
7 Dans un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-2\,;4]$.

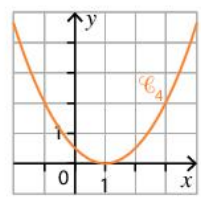


1. Étudier graphiquement la convexité de la fonction f.
2. En déduire les variations de f'.
3. Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?









Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si la proposition est vraie ou fausse.

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f, ainsi que celui de sa dérivée f'.

• La fonction f est convexe, puis concave, puis convexe et sa courbe représentative admet deux points d'inflexion.

x	-5		-2		2		5
$f(x)$		↗	3	↘	-2	↗	0
	-1						

x	-5		0		3		5
$f'(x)$	3	↘	-2	↗	2	↘	0

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants. Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

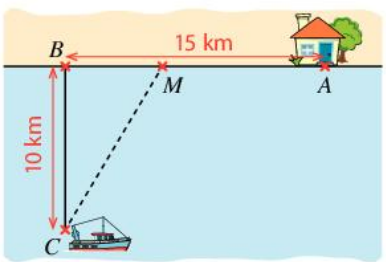
Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Lors de sa sortie en mer, un pêcheur fait une découverte extraordinaire. Pressé de raconter à sa famille ce qu'il a découvert, il souhaite optimiser son trajet afin d'arriver le plus vite possible.
Son chalutier se trouve au point C, à 10 km du point B le plus proche de la côte et sa maison au point A, à 15 km de B sur la côte. La vitesse de navigation du chalutier est de 5 nœuds, soit environ 9 km · h^{-1}, et la vitesse de marche du pêcheur est de 5 km · h^{-1}. On suppose la côte rectiligne et la dérive du courant nulle.

• En quel point M de la côte le pêcheur devra-t-il accoster ?



Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

En mathématiques, on peut définir des polygones convexes.

• Présenter la définition de ces polygones, en donner des exemples et faire le lien avec la notion de fonction convexe vue dans ce chapitre.

Fonctions composées

1 **Calculer**
Dans chacun des cas suivants, déterminer $u \circ v$ puis $v \circ u$ en précisant à chaque fois l'ensemble de définition.
1. $u : x \mapsto 5x + 3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
3. $u : x \mapsto x^3 - 1$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
4. $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

2 Dans chacun des cas suivants, calculer $(u \circ u)(x)$ après avoir déterminé l'ensemble de définition de $u \circ u$.
1. $u : x \mapsto x^2$ 2. $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ 3. $u : x \mapsto 3x - 2$

3 Décomposer chacune des fonctions suivantes sous la forme $v \circ u$, où u et v sont deux fonctions de référence.
1. $f : x \mapsto \sqrt{2x - 6}$, définie sur $[3 ; +\infty[$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x - 7}$, définie sur $]-\infty ; 7[\cup]7 ; +\infty[$.
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{3x-5}$, définie sur $\mathbb{R}$.
4. $k : x \mapsto 3\mathrm{e}^x - 5$, définie sur $\mathbb{R}$.

4 Décomposer chacune des fonctions suivantes sous la forme $v \circ u$, où u et v sont deux fonctions de référence.
1. $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x} - 2$, définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
2. $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, définie sur $\mathbb{R}$.
3. $k : x \mapsto |x^2 - 1|$, définie sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'une fonction composée

5 Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
1. $f : x \mapsto (x^2 + 5)^3$ 2. $g : x \mapsto (x^2 + 5)^{-3}$
3. $h : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)^4$ 4. $k : x \mapsto (1 - 3x)^{10}$

6 Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, puis déterminer leur sens de variation.
1. $f : x \mapsto \sqrt{2 + x^2}$ 2. $g : x \mapsto \sqrt{7x^2 + 3x + 1}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ 4. $k : x \mapsto \sqrt{6x^4 + 3}$

7 Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes. On ne demande pas de préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies ou dérivables.
1. $f : x \mapsto \left(\dfrac{x - 1}{5}\right)^5$ 2. $g : x \mapsto \left(\dfrac{3 - x}{3 + x^2}\right)^2$
3. $h : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ 4. $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$

8 Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes. On ne demande pas de préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies ou dérivables.
1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ 2. $g : x \mapsto \mathrm{e}^{x-4}$
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 4. $k : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

9 VRAI OU FAUX
Raisonner
Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.
1. La dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{5 - x}$ est la fonction : $x \mapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{5 - x}}$.
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3x}{2}}$ a pour dérivée la fonction : $x \mapsto 2\sqrt{\dfrac{2}{3x}}$.

10 **Calculer**
Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f, sans se soucier des intervalles sur lesquels elle est dérivable.
1. $f : x \mapsto \sqrt{1 - \mathrm{e}^x}$ 2. $f : x \mapsto \sqrt{25x^2 - 10x + 1}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$ 4. $f : x \mapsto \sqrt{(1 + 3x)^3}$

11 Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f, sans se soucier des intervalles sur lesquels elle est dérivable.
1. $f : x \mapsto (x + 7)^{-5}$ 2. $f : x \mapsto (-3x + 8)^7$
3. $f : x \mapsto (x^2 + x)^{-2}$ 4. $f : x \mapsto (3\mathrm{e}^x + 4)^7$

12 Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f, sans se soucier des intervalles sur lesquels elle est dérivable.
1. $f : x \mapsto (x + 3)\sqrt{x + 3}$ 2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^8 + 1}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ 4. $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$

13 Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f sur I, puis déterminer le sens de variation de f.
1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x-5}$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2\sqrt{x}+1}$; $I =]0 ; +\infty[$.
3. $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{x^2-1}$; $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

14 Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
1. $f : x \mapsto (4x^2 - 1)^3$ et $a = 1$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$ et $a = 0$.
3. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x-6}$ et $a = 3$.

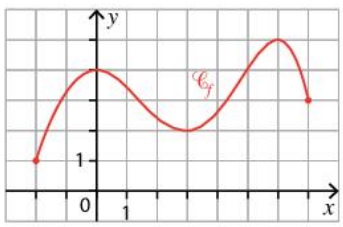
Dérivée seconde

15 **Calculer**
Dans chaque cas, la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I. Calculer $f''(x)$.
1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto 3x^2 - 7x$; $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

16 Dans chaque cas, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f''(x)$.
1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x^2+2}$
2. $f : x \mapsto x^3 + \mathrm{e}^x$
3. $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$
4. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3-5}$

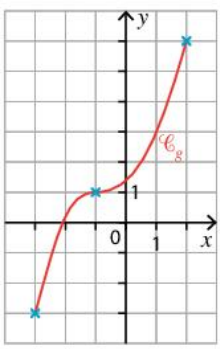
Convexité : approche graphique

17 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 7]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.

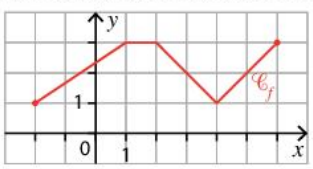


• Déterminer graphiquement la convexité de f et préciser les points d'inflexion éventuels de $\mathscr{C}_f$.

18 Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.
• Déterminer graphiquement la convexité de g et préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_g$.



19 Soit f une fonction affine définie par morceaux sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.

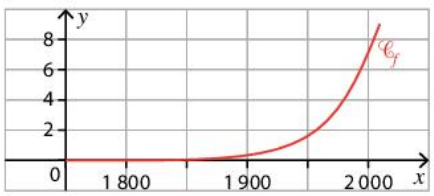


1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle $[-2 ; 4]$, puis sur l'intervalle $[2 ; 6]$.

20 **Raisonner**
Donner un exemple de fonction qui est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

21 **Émissions de CO_2**

On considère la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, définie sur l'intervalle $[1\,750 ; 2\,010]$, qui modélise les émissions globales de dioxyde de carbone (en gigatonne) en fonction de l'année, entre 1750 et 2010.



1. Déterminer graphiquement le sens de variation et la convexité de f.
2. En quoi ce modèle est-il inquiétant pour notre avenir ?

Convexité et fonctions dérivables

22 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^{10}.$$
Préciser les éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.

23 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 1.$$
Préciser les éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.

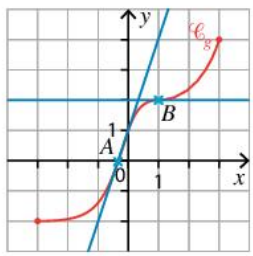
24 CALCULATRICE
1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 sur une calculatrice.
3. Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

25 Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée des tableaux de variation de f et de f'.

x	-5		-2		2		5
Variation de f		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	0
	-1				-2		

x	-5		0		3		5
Variation de f'	3	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	0
			-2				

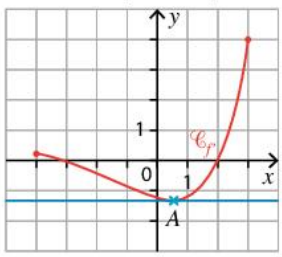
26 Soit g une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.



A et B sont les points de $\mathscr{C}_g$ de coordonnées respectives $(-0{,}3\,;0)$ et $(1\,;2)$.

1. Déterminer graphiquement la convexité de g et préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_g$.
2. Établir, à partir du graphique, les tableaux de variation complets de g et de g', ainsi que le tableau de signes de g''.

27 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;3]$. La représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous. Elle admet une tangente horizontale au point $A(0{,}5\,;-1{,}3)$.



1. Déterminer graphiquement le signe de f' et en déduire le sens de variation de f sur $[-4\,;3]$.
2. Déterminer graphiquement le sens de variation de f' et en déduire la convexité de f.

28 **Raisonner**

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$ telle que $f(0)=1$, $f(2)=2$ et $f(6)=8$. Dans chacun des cas suivants, tracer une représentation graphique possible de cette fonction dans un repère orthonormé.

1.

x	0		6
$f''(x)$		$+$	

2.

x	0		2		6
$f''(x)$	$+$	0		$-$	

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

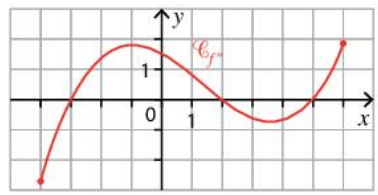
$$f(x)=5x^2\mathrm{e}^x.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.
3. Étudier la convexité de la fonction f.
4. Préciser les éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.
5. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Vérifier en traçant cette courbe sur la calculatrice ou avec un logiciel de géométrie.

30 Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;6]$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_{f''}$ de sa dérivée seconde f'' est donnée ci-dessous.

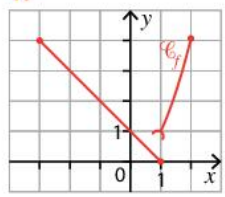


1. En justifiant, déterminer, avec la précision permise par le graphique, la convexité de f sur $[-4\,;6]$.
2. Sachant que $f(-3)=2$, $f(2)=4$ et $f(5)=6$, construire une courbe qui pourrait être celle de f.

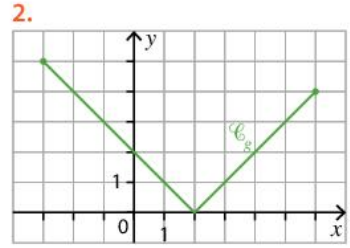
Fonctions continues

31 Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, dire sur quel(s) intervalle(s) elle est continue.

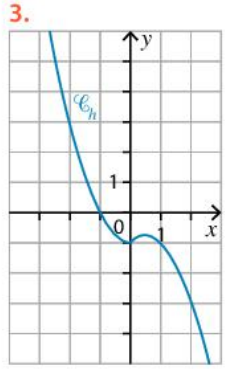
1.



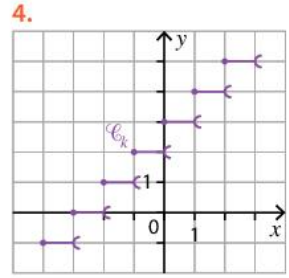
2.



3.



4.



32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}3+x \text{ si } x\leqslant -1\\ x^2+x \text{ si } x>-1\end{cases}.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Comment le justifier ?

33 On donne ci-dessous les tarifs 2020 pour l'affranchissement d'un envoi au tarif « lettre verte ».

Masse jusqu'à…	Tarif
20 g	0,97 €
100 g	1,94 €
250 g	3,88 €
500 g	5,82 €

On note $C(x)$ le coût, en euro, d'une lettre « verte » en fonction de sa masse x (en gramme).
1. Représenter graphiquement la fonction C sur l'intervalle [0 ; 500].
2. La fonction C est-elle continue ?

34 On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=2$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $]-\infty\,;12]$ par $f(x)=\sqrt{12-x}$.
On admet que (u_n) converge et que f est continue sur $]-\infty\,;12]$. On note ℓ la limite de (u_n).
1. TABLEUR CALCULATRICE À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, conjecturer la valeur de ℓ.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$.
3. Démontrer la conjecture en utilisant la continuité de f.

35 Reprendre les questions de l'exercice précédent avec (u_n), définie par $u_0=-10$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-1$.

Théorème des valeurs intermédiaires

36 **Raisonner**
On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [–10 ; 8], dont le tableau de variation est le suivant.

x	–10		–4		5		8
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	–1	↗	10	↘	–5	↗	15

Déterminer le nombre de solutions sur [–10 ; 8] de chacune des équations suivantes.
1. $f(x)=0$
2. $f(x)=11$
3. $f(x)=-7$

37 CALCULATRICE
1. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3-6x+2=0.$$

2. Montrer que l'intervalle [–1 ; 2] contient une des solutions précédentes.

38 CALCULATRICE
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^5+x^3.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
4. Donner un encadrement d'amplitude 0,001 de cette solution.

39 ALGO PYTHON
1. Démontrer que l'équation $x^2\mathrm{e}^x=1$ admet une unique solution et que cette solution appartient à l'intervalle [0 ; 1].
2. On donne la fonction alpha ci-dessous écrite en Python.

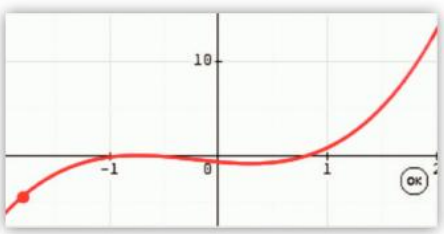
```
from math import e
def alpha(precision):
    a=0
    b=1
    while b-a>=precision:
        c=(b+a)/2
        f=c**2*e**c
        if f<=1:
            a=c
        else:
            b=c
    return a,b
```

a. Quelles seront les valeurs retournées par l'instruction alpha(0.1) ?
b. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

40 **Raisonner**
On considère la fonction f définie sur [–2 ; 2] par :

$$f(x)=\frac{3}{2}x^3+x^2-x-\frac{2}{3}$$

et sa représentation graphique, tracée à la calculatrice.



1. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur [–2 ; 2].
2. a. Justifier que f est continue sur [–2 ; 2].
b. Étudier les variations de f.
c. Peut-on valider la conjecture précédente ?

41 **Raisonner**

On considère la fonction f définie sur $[-2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3x+6}.$$

1. Décomposer f sous la forme $u \circ v$, où u et v sont deux fonctions que l'on précisera.
2. En déduire le sens de variation de f, sans chercher à la dériver.

42 Reprendre les questions de l'exercice 41 avec la fonction f, définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

43 Reprendre les questions de l'exercice 41 avec la fonction f, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -5\sqrt{x} + 2$.

44 **Calculer, raisonner**

On considère les fonctions u et v, définies par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$. On pose $f = v \circ u$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer explicitement $f(x)$.
2. On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 1$. Les fonctions f et g sont-elles égales ? Justifier.

45 On considère les fonctions u et v, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 2x^2 - 1 \text{ et } v(x) = 4x^3 - 3x.$$

- Démontrer que $u \circ v = v \circ u$.

46 VRAI OU FAUX

Communiquer, raisonner

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Indiquer, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
2. Si f est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.
3. Si f est impaire, alors $f \circ f$ est paire.
4. Si g est paire, alors $g \circ f$ est paire.

47 VRAI OU FAUX

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Indiquer, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Si f est décroissante et si g est décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante.
2. Si f est décroissante et si g est croissante, alors $f \circ g$ est décroissante.
3. Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante.

48 **Calculer**

Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x - 5\sqrt{x}$, définie sur $]0 ; +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 1}{x + 1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, définie sur $]1 ; +\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - x + 2)^3}$, définie sur $[-1 ; +\infty[$.

49 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Soit a un réel. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
2. Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$?
3. Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par l'origine du repère ?

50 **Calculer**

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sans se soucier des intervalles sur lesquels f est dérivable.

1. $f(x) = x\sqrt{3x+7}$
2. $f(x) = -2x^2\sqrt{5x}$
3. $f(x) = \dfrac{5x}{(x-1)^2}$
4. $f(x) = (2x+1)^3\,\mathrm{e}^x$

51 **Calculer**

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent la même tangente au point d'abscisse 1.

1. $f : x \mapsto -x^2 + x + 3$
2. $g : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x}$
3. $h : x \mapsto -5x + 8\sqrt{x}$
4. $k : x \mapsto -x + 4$

52 VRAI OU FAUX

Communiquer, raisonner

Indiquer, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. La somme de deux fonctions deux fois dérivables et convexes est une fonction convexe.
2. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1 ; 3]$ ne peut pas être concave sur $[2 ; 3]$.
3. Une fonction croissante et concave sur $\mathbb{R}$ admet une limite finie en $+\infty$.
4. Si une fonction f change de convexité en a, alors sa courbe représentative admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

53 PRISE D'INITIATIVE

Soit n un nombre entier naturel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.

- Étudier la convexité de la fonction f selon les valeurs de l'entier naturel n.

54 **Chercher, raisonner**

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que f est concave.
2. CALCULATRICE Tracer sur l'écran d'une calculatrice $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
3. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]-1 ; +\infty[$, $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.

55 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x + 1$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la convexité de f.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $[-2 ; +\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.
4. Retrouver le résultat précédent en résolvant algébriquement l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

56 **Raisonner**

Soit f une fonction convexe dérivable et définie sur un intervalle I.

• Démontrer que, pour tous réels a et b de I, on a :

$$f(b) - f(a) \geqslant f'(a)(b - a).$$

57 ALGO PYTHON **Impôts sur le revenu**

On donne ci-dessous le barème de l'impôt 2020.

Part du revenu imposable	Taux
Jusqu'à 10 064 €	0 %
De 10 065 € à 25 659 €	11 %
De 25 660 € à 73 369 €	30 %
De 73 370 € à 157 806 €	41 %
Plus de 157 807 €	45 %

Par exemple, une personne célibataire vivant seule et ayant un revenu imposable de 30 000 € par an devra payer 3 017,34 € d'impôts sur le revenu : $0{,}3(30\,000 - 25\,660) + 0{,}11(25\,659 - 10\,065) = 3\,017{,}34$.

On note $r(x)$ le montant (en euro) de l'impôt 2020, pour une personne célibataire vivant seule, en fonction de son revenu imposable x (en euro).

1. Calculer $r(9\,000)$ et $r(100\,000)$.
2. Écrire une fonction en langage Python qui prend comme argument la part du revenu imposable et qui retourne le montant de l'impôt correspondant.
3. La fonction r est-elle continue ? Justifier.
4. Déterminer la convexité de r. Justifier brièvement.
5. À tout réel strictement positif x, on associe le réel $\dfrac{r(x)}{x}$. Que représente cette fonction ?

58 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Représenter

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 3 \\ e^x + x + k & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}, \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

1. Après avoir créé un curseur pour le réel k, représenter graphiquement la fonction f à l'aide d'un logiciel de géométrie.
2. Conjecturer une valeur approchée à 10^{-1} de k pour laquelle f est continue, puis calculer sa valeur exacte.

59 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < -3 \\ 3 - x & \text{si } x \geqslant -3 \end{cases}.$$

1. La fonction f est-elle continue en –3 ?
2. La fonction f est-elle dérivable en –3 ? On reviendra à la définition de la dérivabilité pour la justification.
3. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

60 PRISE D'INITIATIVE

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (u(x))^n$, n étant un entier naturel impair non nul.

• Comparer le sens de variation de f à celui de u.

61 En utilisant un taux de variation d'une fonction, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3 - x)^4 - 81}{x}$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x + 7} - \sqrt{7}}{x}$

62 CALCULATRICE

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point d'abscisse 4.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée ainsi que sa tangente au point d'abscisse 4 sur une calculatrice.
3. Justifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{4}x + 1$.

63 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse 3.
6. a. Vérifier que, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}.$$

b. En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.

64 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **Lieu géométrique**

Représenter

1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire :
• le point $A(1\,;0)$;
• le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$ (O désigne l'origine du repère) ;
• Δ, la tangente au cercle en A.

b. Créer un curseur a variant de -5 à 5 avec un pas de 0,1 ; puis tracer la droite d d'équation $y = ax$. Cette droite recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en N et la droite Δ en Q.

c. Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. Activer la trace du point M et faire varier le curseur de sorte à voir apparaître la courbe décrite par ce point, appelée cissoïde de Dioclès.

2. **Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}.$$

a. Étudier les variations de f.

b. On note Γ_1 la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe Γ_1 au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Tracer, sur une nouvelle fenêtre du logiciel, la courbe Γ_1 et la tangente $\mathscr{T}$.

c. Sur le même graphique, tracer la courbe Γ_2, symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des abscisses.

d. On note Γ la réunion des deux courbes.
Montrer qu'une équation de Γ est :

$$x\left(x^2+y^2\right) - y^2 = 0.$$

e. Quelle courbe retrouve-t-on ?

65 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x + 1.$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. a. Étudier les variations de f'.

b. Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera α. Donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.

c. En déduire le tableau de signes de f'.

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

66 **Raisonner**

Soit E la fonction partie entière.
$E(x)$ est l'unique entier relatif tel que :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

• Prouver que la fonction partie entière n'est pas dérivable en 0.

67 **Avec une fonction auxiliaire**

1. On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 3.$$

a. Étudier le sens de variation et les limites de g, puis dresser son tableau de variation.

b. Calculer $g(3)$.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera α.

d. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

e. À l'aide des résultats précédents, établir le tableau de signe de $g(x)$.

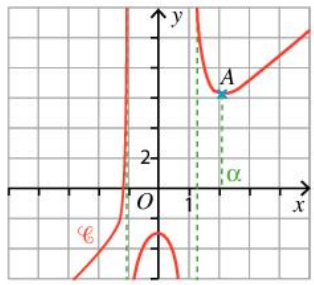
2. f est la fonction définie, pour tout réel x différent de -1 et de 1, par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x différent de -1 et de 1 :

$$f'(x) = \frac{2xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

b. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.



Démontrer que le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse α a pour ordonnée $\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$.

68 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}.$$

1. a. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale.

c. Dresser le tableau de variation complet de f.

2. Soit m un réel. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

3. On suppose $m > \sqrt{2}$.

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et la droite d d'équation $y = m$.

b. Appeler A et B les points d'intersection de d avec $\mathscr{C}$ sur $]0\,;+\infty[$ et M le milieu de $[AB]$.

c. Activer la trace de M et conjecturer le lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $]\sqrt{2}\,;+\infty[$

4. Afin de démontrer la conjecture faite à la question précédente :

a. exprimer les coordonnées des points A et B en fonction de m ;

b. en déduire alors les coordonnées du point M, puis conclure.

69 1. Montrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution, notée α, et que cette solution est comprise entre 1,6 et 1,7.

2. On considère la fonction f, définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

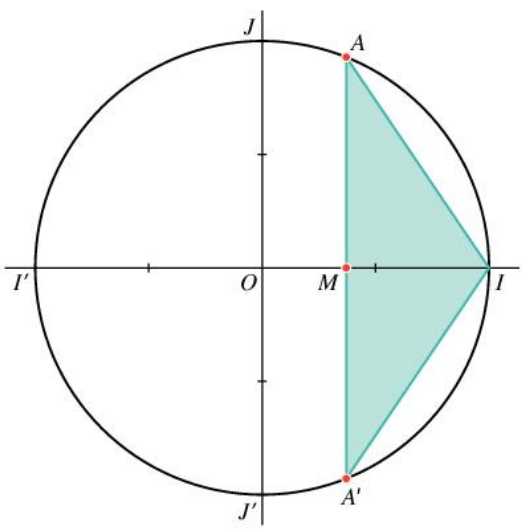
a. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

d. Représenter graphiquement la fonction f et la tangente.

70 On considère le cercle trigonométrique dont on rappelle qu'il a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$.
Soit M un point mobile du segment $[I'I]$, distinct des extrémités du segment, où $I'(-1 ; 0)$ et $I(1 ; 0)$.
On note x l'abscisse de M.
La perpendiculaire en M à l'axe des abscisses coupe le cercle en deux points A et A'.



1. Calculer l'aire du triangle IAA' en fonction de x.

2. Soit la fonction f définie sur $]-1 ; 1[$ par :

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}.$$

Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
En déduire le tableau de variation de f.

3. a. Où doit se situer le point M pour que l'aire du triangle soit maximale ?

b. Quelle est alors sa nature ?

4. Démontrer que l'aire du triangle est égale à 1 pour deux positions distinctes de M.

5. CALCULATRICE Pour l'une de ces positions, l'abscisse n'est pas entière. En déterminer un encadrement à l'aide de la calculatrice.

71 ALGO PYTHON

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-3x} + 3x - 5.$$

1. Étudier le sens de variation et la convexité de f.

2. Calculer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Démontrer que 0 admet exactement deux antécédents par f, un négatif et un positif.

4. CALCULATRICE On note α l'antécédent positif de 0 par f. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α, puis en déduire un arrondi à 10^{-2} de α.

5. On donne la fonction écrite en langage Python ci-dessous.

```
from math import e
def testalpha(x):
    if x<=0:
        a=True
    else:
        y=e**(-3*x)+3*x-5
        a=(y<0)
    return a
```

Que renvoie l'instruction testalpha(5) ?

72 On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}.$$

On note f la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+3}.$$

On a alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 3.

b. En déduire que (u_n) est convergente vers un réel que l'on notera ℓ.

2. a. Expliquer pourquoi f est continue sur $[0 ; +\infty[$.

b. Démontrer que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.

c. En déduire la valeur de ℓ.

73 On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12.$$

On note f la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 12.$$

On a alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 16.

b. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente

2. On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

a. Justifier que f est continue sur $[0 ; +\infty[$.

b. Démontrer que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.

c. En déduire la valeur de ℓ.

74 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner, chercher

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

avec a, b, c, d et e des réels tels que $a \neq 0$.

• Existe-t-il des réels a, b, c, d et e tels que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère admette un unique point d'inflexion ?

75 **Approximation polynômiale de $\sqrt{1+x}$**

1. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I contenant 0 et telles que $f' \geqslant g'$ sur I.
On pose $h(x) = f(x) - g(x) - [f(0) - g(0)]$.

a. Calculer $h(0)$.

b. En étudiant le sens de variation de h, démontrer que :
• si $x \geqslant 0$, alors $f(x) - f(0) \geqslant g(x) - g(0)$;
• si $x \leqslant 0$, alors $f(x) - f(0) \leqslant g(x) - g(0)$.

2. On considère désormais que f est la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

On note f''' la dérivée de f''.
Calculer f', f'' et f'''.

3. Démontrer que, si $x \in [0 ; 3]$:

$$\frac{3}{256} \leqslant f'''(x) \leqslant \frac{3}{8}.$$

4. En déduire successivement que, si $x \in [0 ; 3]$:

a. $-\frac{1}{4} + \frac{3}{256}x \leqslant f''(x) \leqslant -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}x$;

b. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{512} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$.

5. Donner un encadrement de l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace $\sqrt{1+x}$ par $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, puis par $1 + \frac{x}{2}$ si $x \in [0 ; 3]$.

6. Calculer des valeurs approchées de $\sqrt{1{,}01}$ et $\sqrt{1{,}002}$ avec des erreurs inférieures à 10^{-5}.

76 **Inégalité de convexité**

Soit une fonction f convexe sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère. On souhaite traduire algébriquement la définition de la convexité.
On considère a et b deux réels de I tels que $a < b$, A et B les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

1. Établir l'équation réduite de la sécante (AB).

2. On admet qu'un nombre x de l'intervalle $[a ; b]$ peut s'écrire :

$$x = ta + (1-t)b, \text{ avec } t \in [0 ; 1].$$

a. Déterminer l'ordonnée du point M de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x = ta + (1-t)b$, avec $t \in [0 ; 1]$.

b. Déterminer l'ordonnée du point N de la droite (AB) d'abscisse $x = ta + (1-t)b$, avec $t \in [0 ; 1]$.

3. Montrer que la convexité de f sur I se traduit par l'inégalité :

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$

pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ et $t \in [0 ; 1]$.

77 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

1. Calculer $f(2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(0{,}01)$ et $f(0)$.

2. Montrer que f est continue en 0.

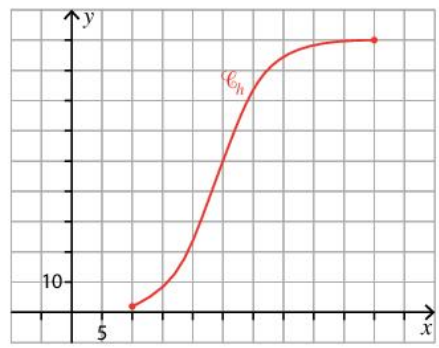
78 **Fonction de satisfaction**

Modéliser

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction » h est définie sur l'intervalle $[10 ; 50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0{,}25x+6}} ;$$

où x est exprimé en millier d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h, représentée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». En donner une interprétation concrète.

2. D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.

3. Vérifier que, pour tout $x \in [10 ; 50]$:

$$h''(x) = \frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(e^{-0{,}25x+6} - 1\right)}{\left(1 + e^{-0{,}25x+6}\right)^3}.$$

4. En déduire la convexité de la fonction h.

5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

79 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner

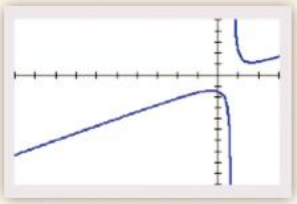
Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ et à valeurs dans $[0 ; 1]$.

• Démontrer qu'il existe au moins un réel α dans $[0 ; 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

80 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner

On a affiché ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+3}{3x^2+x-2}$ tracée à la calculatrice, ainsi qu'un tableau de valeurs de f donné par la calculatrice.



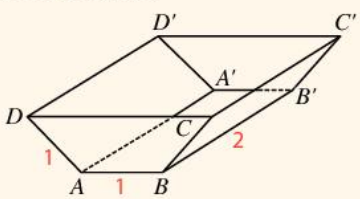
X	Y1
-8	-5.962
-7	-5.304
-6	-4.65
-5	-4
-4	-3.357
-3	-2.727
-2	-2.125
-1	ERREUR
0	-1.5
1	2
2	1.25

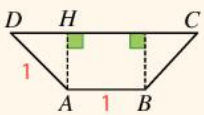
• Le tableau de valeurs est-il cohérent avec la courbe ? Comment peut-on l'expliquer ?

81 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner

Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$. Toutes les dimensions sont fixées (voir figures ci-dessous), sauf la longueur CD. L'unité est le mètre.





• Déterminer la dimension à donner à la grande base $[CD]$ du trapèze afin que le volume du récipient soit maximal.

82 **Étude de fonctions**

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1 ; 0]$.

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$:

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

b. En déduire que, pour tout $x > 1$:

$$0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

c. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Vérifier que, pour tout réel x :

$$4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x} ;$$

puis montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

d. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer le sens de variation et les limites de f sur $\mathbb{R}$.

83 **Dérivée n-ième**

Approfondissement

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

2. On appelle dérivée troisième de f, notée $f^{(3)}$, la fonction dérivée de f''.
Déterminer, pour tout réel x, $f^{(3)}(x)$.

3. Soit n un entier naturel. On appelle dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, la fonction obtenue lorsqu'on dérive n fois successivement la fonction f.

a. Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout réel x.

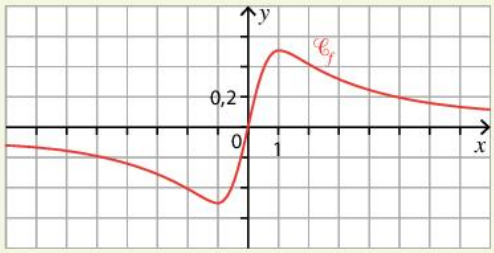
b. Démontrer la conjecture.

ZOOM SUR... les lectures graphiques

L'un des exercices proposés à l'épreuve du bac peut contenir une ou plusieurs lectures graphiques pour lesquelles il faut identifier une fonction et/ou sa dérivée, puis déterminer graphiquement la convexité de la fonction.

84 QCM 15 min

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f'.

Donner, sans justifier, l'unique bonne réponse à chacune des questions suivantes.

1. Le nombre de solutions dans $[-7 ; 7]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

2. Une valeur approchée à 10^{-1} de la solution de l'équation $f(x) = -0{,}3$ sur l'intervalle $[-1 ; 6]$ est :

(a) -3 (b) $-0{,}3$ (c) 0,3 (d) 3

3. Le nombre de points d'inflexion dans $[-7 ; 7]$ de $\mathscr{C}_f$ est :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. La fonction f'' est positive sur :

(a) $[0 ; +\infty[$

(b) $[-1 ; 1]$

(c) $[-2 ; 0]$

(d) $[0 ; 2]$

85 15 min

Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C, définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0 ; 10]$, le coût marginal (c'est-à-dire l'accroissement du coût de production pour la production d'une unité supplémentaire) est donné par la fonction $C_m = C'$, où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour 600 paniers vendus.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C.

a. Déterminer l'expression de $C''(x)$.

b. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0 ; a]$ inclus dans $[0 ; 10]$ sur lequel la fonction C est convexe.

c. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

86 50 min

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f, définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)} ;$$

où u est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que, pour tout x positif, on a :

$$f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f'' la fonction dérivée de f'. Enfin, on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1 + u(x)).$$

a. Déterminer les variations de f' sur $[0 ; +\infty[$.

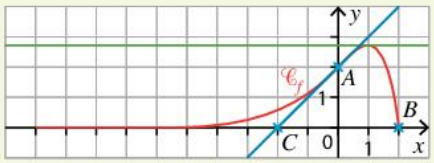
b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

87 30 min

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
On a placé les points $A(0 ; 2)$, $B(2 ; 0)$ et $C(-2 ; 0)$.
On dispose des renseignements suivants.

- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

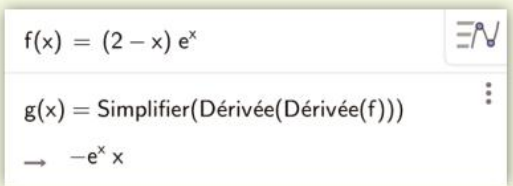
1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10 ; 2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.
On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10 ; 2]$ par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x.$$

1. a. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
b. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[-10 ; 2]$.
c. En déduire la valeur de $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.
b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10 ; 2]$, puis donner une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
4. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant :



Utiliser le résultat du logiciel pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10 ; 2]$.

88 ALGO 30 min

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant. Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03.$$

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

x	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
a. Calculer $f(20)$.
b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
b. On considère l'algorithme suivant :

$t \leftarrow 1{,}75$
$p \leftarrow 0{,}1$
$V \leftarrow 0{,}7$
Tant que $V > 0{,}035$
  $t \leftarrow t + p$
  $V \leftarrow (0{,}8t + 0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

Consolider ses fondamentaux

89 Étudier la convexité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x-1}$.

Questions Va piano

1. CALCULATRICE Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.
2. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f semble-t-elle concave ? convexe ?
3. Conjecturer graphiquement les éventuels points d'inflexion. En donner les coordonnées.

Questions Moderato

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire sur quels intervalles la fonction f est concave, puis sur quels intervalles elle est convexe.

Questions Allegro

1. Déterminer la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f.
2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le(s) point(s) d'inflexion de la courbe représentative de f.

Se préparer aux études supérieures

90 Équation fonctionnelle

Approfondissement

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante, appelée équation fonctionnelle :

pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Partie A. Analyse

Soit g une fonction vérifiant les hypothèses précédentes.

1. Démontrer que $g(0) = 0$ et que g est impaire.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$g(n) = n\alpha, \text{ où } \alpha = g(1).$$
b. En déduire que, pour tout entier relatif k :
$$g(k) = k\alpha.$$
3. Déduire de la question 2 et de l'équation fonctionnelle que, pour tout nombre rationnel q :
$$g(q) = q\alpha.$$
4. Dans cette question, on admet que, pour tout réel x, il existe une suite de nombres rationnels convergeant vers x.
On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite de nombres rationnels convergeant vers x_0.
a. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = g(x_0)$.
b. En déduire que $g(x_0) = \alpha x_0$.
c. En déduire la nature de la fonction g.

Partie B. Synthèse

Démontrer que les fonctions linéaires vérifient l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, puis conclure.

91 Prolongement par continuité

Approfondissement

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1}$.

1. Justifier que f est continue sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.
2. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Tracer la courbe représentative de f sur l'écran d'une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de géométrie.
3. a. Montrer que, pour tout réel x différent de -1 :
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$
b. Montrer que f admet une limite finie en -1.
c. En déduire que f peut être « prolongée » en une fonction $\tilde{f}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x différent de -1, $\tilde{f}(x) = f(x)$.
Préciser alors la valeur que l'on doit attribuer à $\tilde{f}(-1)$ pour que $\tilde{f}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

92 Dérivée n-ième

Approfondissement

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{3x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On admet que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième. Par exemple, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

1. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$f^{(n)}(x) = (9x^2 + 6nx + n(n-1))\, 3^{n-2} e^{3x}.$$
3. Vérifier que cette formule est aussi vraie pour $n = 1$ et $n = 0$.

No problem!

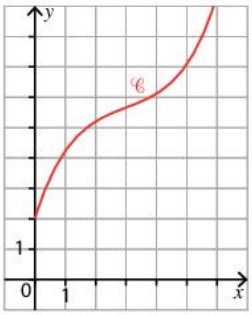
1 Function composition

Function composition consists in applying one function to the result of another.
The result of $f()$ is sent through $g()$ and it is written $(g \circ f)(x)$ which means $g(f(x))$.
Complete the following sentence using the words "domain" and "range".

For a composite function, $f \circ g$, the ... can be found by putting the ... of g into f.
If the ... of f does not fully include the ... of g then the ... of g will have to be restricted further.

2 Glass bottles

A firm produces glass bottles. The production can reach a max of 7,000 bottles a month.
$C(q)$ corresponds to the total production cost of q thousand bottles.
$C(q)$ is given by: $C(q) = 0.1q^3 - 0.9q^2 + 3q + 2$, where $q \in [0\,;7]$.
Let $\mathscr{C}$ be the curve of function C.

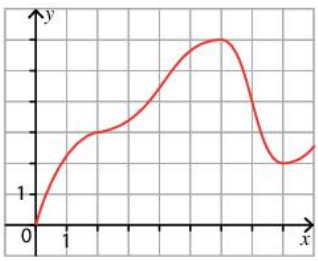


1. Use the given graph to answer the following questions:
a. Is C concave up or concave down?
b. Is there a point of inflexion on $\mathscr{C}$?
2. Calculate the first and the second derivatives of C.
3. Determine the variations of C' on the interval $[0\,;7]$. Reconcile your findings with your answers in question 1.

3 Justify to a classmate

PAIR WORK

Justify your answers to a classmate.
Use the given graph of f to find the following.
1. The largest open intervals on which f is increasing.
2. The largest open intervals on which f is decreasing.
3. The largest open intervals on which f is concave up.
4. The largest open intervals on which f is concave down.
5. The coordinates of the points of inflexion.



Final exam Past papers

1 The function f is defined by :

$$f(x) = \frac{17 + 4x - x^2}{(2x-1)(x-3)^2}.$$

1. Express $f(x)$ in terms of partial fractions.
2. Use your result from question 1 to find an expression for $f'(x)$.

2 The function h is defined by $h(x) = \dfrac{4x+3}{5x-4}$.
Show that $h(h(x)) = x$.

3 A curve has equation $y = (2x-1)^{-1} + 2x$.
Find $\dfrac{dy}{dx}$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

CHAPITRE

5 Fonctions trigonométriques

Ressources en +

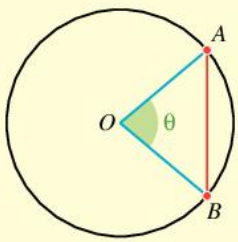
Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Passer des angles aux longueurs avec Ptolémée

Claude Ptolémée

Claude Ptolémée (100-168) est un mathématicien et astronome grec qui a vécu en Égypte. Auteur de nombreux traités scientifiques, parmi le plus connu *L'Almageste*, il est aussi considéré comme l'un des précurseurs de la géographie. En mathématiques, la plupart de ses travaux reposent sur l'étude de la trigonométrie dans le plan, particulièrement utile en astronomie pour étudier des distances.

Dans *L'Almageste*, Ptolémée explique comment calculer la longueur d'une corde (segment qui relie deux points d'un cercle) en fonction de l'angle qui l'intercepte. Dans la figure suivante, où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, cela revient à exprimer la longueur AB en fonction de θ.



Ptolémée ne disposant pas des fonctions trigonométriques, il dresse ainsi une « table des cordes » en fonction de différentes valeurs de θ.

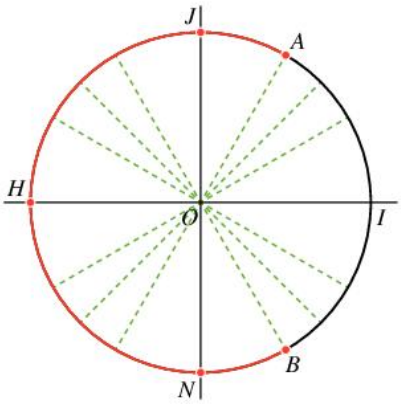
Dans la figure ci-dessus, exprimer la longueur AB en fonction de l'angle θ en utilisant la trigonométrie.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Cercle trigonométrique (1)

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, A est le point-image de $\frac{\pi}{3}$ et B est le symétrique de A par rapport à (OI).



1. Parmi les réels ci-dessous, quels sont ceux dont B est le point-image ?

a. $-\frac{\pi}{3}$ b. $\frac{5\pi}{3}$

c. $-\frac{5\pi}{3}$ d. $-\frac{7\pi}{3}$

2. Quels sont les réels dont I, J, H et N sont les points-images ?

3. Soit α un réel dont le point-image se situe sur la partie rouge du cercle trigonométrique.
Écrire l'ensemble auquel appartient α lorsque α est dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.

2 Cercle trigonométrique (2)

1. Reproduire la figure de l'exercice 1 et placer les points suivants.

- $C\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
- $D\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- $E\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
- $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- $G\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
- $K\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

2. Deux points sont confondus. Lesquels et pourquoi ?

3. Dans le repère $(O\,;\,I,\,J)$, donner deux points ayant la même abscisse, puis deux points ayant la même ordonnée.

4. Avec quel point de la figure le point L, image de $-\frac{29\pi}{6}$, est-il confondu ? Justifier.

3 Cercle trigonométrique (3)

1. Rappeler les valeurs exactes de :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ b. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2. En déduire les coordonnées du point A sur la figure de l'exercice 1.

3. À l'aide d'une figure, donner les valeurs exactes de :

a. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ c. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

d. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

4 Des propriétés particulières

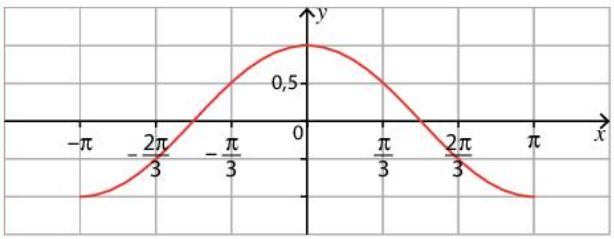
1. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2\sin(x).$$
Justifier que cette fonction est impaire et périodique de période 2π.

2. On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \cos(2x).$$
Justifier que cette fonction est paire et périodique de période π.

3. On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = f(x) + g(x).$$
a. Cette fonction est-elle impaire ? paire ?
b. Est-elle périodique de période π ? 2π ?

5 Une sinusoïde

La courbe ci-dessous représente la fonction cosinus sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.



1. À l'aide de la courbe ci-dessus, résoudre graphiquement sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations :
a. $\cos(x) = 0{,}5$; b. $\cos(x) = 1$.

2. Reproduire et compléter la courbe sur $]-2\pi\,;\,2\pi]$, puis résoudre à nouveau graphiquement les deux équations précédentes sur $]-2\pi\,;\,2\pi]$.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Une fonction dérivée point par point

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Découvrir la dérivée de la fonction sinus.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté :
- la courbe de la fonction f, définie par $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$;
- le point $A_0(0 ; 0)$;
- la tangente à la courbe au point A_0.

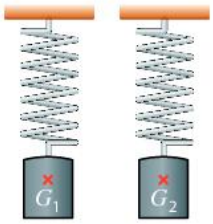
1. Réaliser cette figure sur un logiciel de géométrie dynamique, en veillant à respecter les unités sur les axes données ci-dessus.
2. Faire apparaître sur cette même courbe :
   a. les points $A_n\left(\frac{n\pi}{2} ; f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$ pour $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$;
   b. les points $B_n\left(\frac{n\pi}{3} ; f\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ pour $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$;
   c. les tangentes à la courbe en chacun de ces points à l'aide de l'outil Tangente .
3. À l'aide de l'outil Pente , recopier puis compléter le tableau ci-dessous pour les points A_n et B_n.

Point	A_0	...
Abscisse du point	0	...
Coefficient directeur de la tangente à ce point	1	...

4. Les nombres situés sur la troisième ligne sont les images des réels de la deuxième par une fonction connue.
   Quelle semble être cette fonction ?
5. Exploiter les coefficients directeurs trouvés sur la troisième ligne pour dégager des propriétés de la fonction sinus et de sa courbe.
6. Quelle semble être la fonction dérivée de la fonction sinus ?

Situation 2 Un pendule élastique vertical

Objectif
Résoudre une équation trigonométrique.

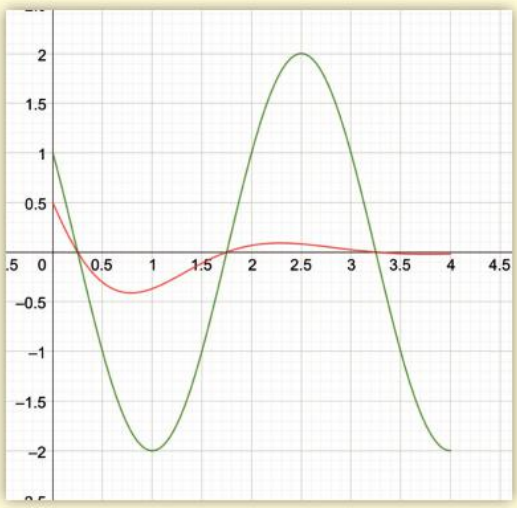


On étudie deux pendules élastiques verticaux constitués de poids accrochés à des ressorts, dans le cas où les forces de frottement sont négligeables.
Les évolutions (appelées « régimes d'oscillation ») dans un repère $(\vec{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ de l'ordonnée de leurs centres d'inertie, nommés G_1 et G_2, en fonction du temps, sont données respectivement par les fonctions suivantes :

$$y_1(t) = 2\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad y_2(t) = 2e^{-t}\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

où t est le temps exprimé en seconde et $y(t)$ est exprimée en mètre.

1 À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on obtient les courbes suivantes pour les ordonnées des deux pendules quand t varie dans l'intervalle $[0\,;4]$.



Associer à chaque pendule la courbe représentative correspondant à son régime d'oscillation.

2 Quelle est l'ordonnée initiale de chaque pendule ? Justifier par le calcul.

3 On étudie le mouvement des pendules sur l'intervalle $[0\,;4]$.

a. Conjecturer graphiquement à quels instants ils auront la même ordonnée.

b. Montrer que justifier cette conjecture revient à résoudre l'équation produit suivante sur $[0\,;4]$.

$$\left(e^{-t} - 1\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

c. Résoudre cette équation sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

On rappelle que, sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Les solutions obtenues répondent-elles toutes au problème posé dans la question **3.a** ?

d. Justifier que résoudre l'équation $\cos\left(\frac{2\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ sur $[0\,;4]$ revient à résoudre l'équation $\cos(X) = 0$ sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;3\pi\right]$, avec $X = \frac{2\pi t}{2} + \frac{\pi}{3}$.

e. Démontrer la conjecture graphique faite à la question **3.a**.

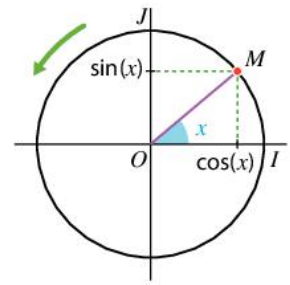
1. Fonctions cosinus et sinus

1. Définitions

Définitions

Soit M le point-image d'un réel x sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct $(O\,;I,J)$. On a ainsi $M(\cos(x)\,;\sin(x))$.

- La fonction **cosinus**, notée cos, est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\cos : x \mapsto \cos(x).$$
- La fonction **sinus**, notée sin, est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\sin : x \mapsto \sin(x).$$



Remarque

Pour tout réel x :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2. Dérivabilité

Propriétés (admises)

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $-\sin : x \mapsto -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $\cos : x \mapsto \cos(x)$.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x - 3\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + 3\sin(x)$.
- La fonction $g : x \mapsto \sin(x) + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $g' : x \mapsto g'(x) = \cos(x)$.

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels.

DÉMO en ligne

- La fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction :
$$x \mapsto -a\sin(ax+b)$$
- La fonction $x \mapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction :
$$x \mapsto a\cos(ax+b)$$

Propriétés

DÉMO en ligne

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $-u' \times (\sin(u))$.
- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u' \times (\cos(u))$.

3. Limites

Propriétés

- Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

DÉMO p. 156 et 157

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Méthode 1 Calculer des dérivées de fonctions trigonométriques

Calculer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(x) - \sin(x) + 3x$.
2. g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2\cos(x) + 3$.

Solution commentée

1. En dérivant une somme de trois fonctions, on obtient : $f'(x) = -3\sin(x) - \cos(x) + 3$.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'un produit, on obtient : $g'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.

EXERCICE 4 p. 164

Méthode 2 Calculer des dérivées de fonctions composées

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3\cos\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)$. Calculer $h'(x)$.

Solution commentée

1. $h(x)$ est de la forme $3\cos(ax + b)$, avec $a = 2$ et $b = -\frac{2\pi}{5}$.
   Ainsi, $h'(x) = 3 \times 2 \times \left(-\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)\right)$.
   Donc $h'(x) = -6\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 5 p. 164

Méthode 3 Déterminer des limites

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Avec la calculatrice, réaliser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[0{,}01 ; 0{,}1]$ avec un pas de 0,01, puis sur $[0{,}001 ; 0{,}01]$ avec un pas de 0,001. Vers quelle valeur semble tendre $f(x)$ quand x tend vers 0 ?
3. En utilisant $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, déterminer la limite de f en 0.

Solution commentée

1. Pour tout $x > 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$. Ainsi, $0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$, car on divise par $x > 0$.
   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. On obtient les tableaux de valeurs suivants.

• Pas de 0,01 :

x	f(x)
0.01	0.009999667
0.02	0.01999733
0.03	0.029991
0.04	0.03997867
0.05	0.04995835
0.06	0.05992803
0.07	0.06988574

• Pas de 0,001 :

x	f(x)
0.001	0.0009999997
0.002	0.001999997
0.003	0.002999991
0.004	0.003999979
0.005	0.004999958
0.006	0.005999928
0.007	0.006999886

   $f(x)$ semble tendre vers 0 quand x tend vers 0.
3. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x} = \sin(x) \times \frac{\sin(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

EXERCICE 15 p. 165

2. Variations des fonctions trigonométriques

1. Variations des fonctions trigonométriques

Propriété

Les tableaux de variation des fonctions cosinus et sinus sur $[-\pi\,;\,\pi]$ sont les suivants.

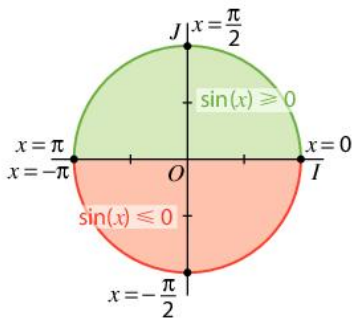
DÉMO en ligne

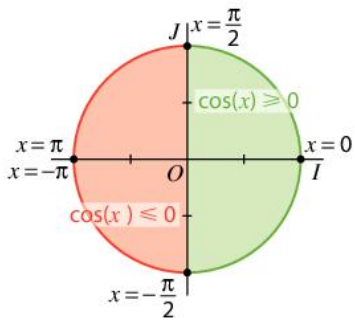
x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Remarque

Le signe des dérivées des fonctions trigonométriques s'obtient par lecture sur le cercle trigonométrique :





2. Courbes représentatives des fonctions trigonométriques

Propriétés

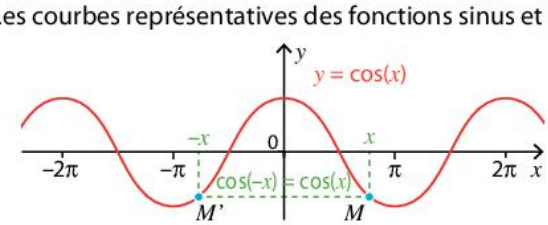
Pour tout réel x :

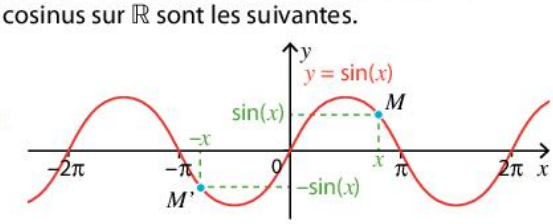
DÉMO en ligne

- $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire. Sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. La fonction cosinus est périodique de période 2π. La courbe se répète sur des intervalles de longueur 2π.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est impaire. Sa représentation graphique admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. La fonction sinus est périodique de période 2π. La courbe se répète sur des intervalles de longueur 2π.

Remarque

La périodicité des fonctions cosinus et sinus permet d'étendre l'étude de leurs variations à $\mathbb{R}$.
Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$ sont les suivantes.





Méthode 1 Étudier la parité et la périodicité d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

1. Donner la valeur exacte de $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right)$.
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3. La fonction f est-elle de période 2π ? Est-elle de période π ?

Solution commentée

1. $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{60\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = f\left(-10\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{5\pi}{6} - 5\times 2\pi\right) = f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, car les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Or, $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$. Donc $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$.

2. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc la fonction f n'est pas paire.
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc la fonction f n'est pas impaire.

3. • Pour tout réel x, $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \sin(x+2\pi) = \cos(x) + \sin(x)$, car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. Donc $f(x+2\pi) = f(x)$. La fonction f est périodique de période 2π.
• $f(0) = \cos(0) + \sin(0) = 1$ et $f(0+\pi) = \cos(\pi) + \sin(\pi) = -1$; donc $f(0) \neq f(0+\pi)$.
La fonction f n'est donc pas périodique de période π.

EXERCICE 24 p. 166

Méthode 2 Étudier les variations d'une fonction trigonométrique

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 1 + \cos(2x)$.

1. Justifier que t est paire et de période π.
2. Dresser le tableau de variation de t sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. En déduire, à l'aide de la question 1, le tableau de variation de t sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Solution commentée

1. Pour tout x réel, $\cos(-2x) = \cos(2x)$, car la fonction cosinus est paire. Donc t est paire.
Pour tout x réel, $\cos(2(x+\pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)$, car la fonction cosinus est périodique de période 2π.
On a donc $t(x+\pi) = t(x)$. t est périodique de période π.

2. t est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
$t'(x) = -2\sin(2x)$.
Pour tout x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0\ ;\ \pi]$,
donc $\sin(2x) \geqslant 0$, donc $-2\sin(2x) \leqslant 0$.
Comme $t(0) = 2$ et $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on obtient ainsi le tableau ci-dessous.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$t'(x)$	0	$-$	
$t(x)$	2	↘	0

3. Compte tenu de la parité et de la périodicité de t, on peut compléter le tableau précédent par symétrie axiale (parité) puis par translation (périodicité).
Le tableau de variation de t sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est donc le suivant.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$t(x)$	2	↘	0	↗	2	↘	0	↗	2

EXERCICE 33 p. 168

3. Équations et inéquations sur $[-\pi ; \pi]$ avec le cosinus

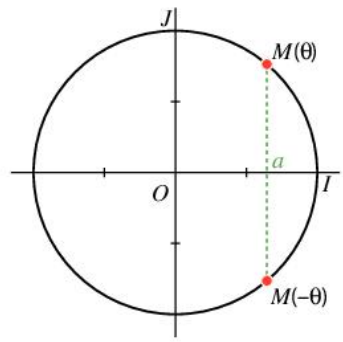
1. Résolution de l'équation $\cos(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a = 1$, alors $\mathcal{S} = \{0\}$.
- Si $a = -1$, alors $\mathcal{S} = \{-\pi ; \pi\}$.
- Si $-1 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{-\theta ; \theta\}$, avec $\theta \in]-\pi ; \pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$.

DÉMO en ligne



Exemple

L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ qui sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Remarques

- Pour trouver la valeur de θ appartenant à $[-\pi ; \pi]$ lorsque $\cos(\theta)$ n'est pas une valeur remarquable, on utilise la calculatrice (réglée en mode radian).

Sur Casio, on utilise les instructions : SHIFT cos, sur TI : trig 5:cos⁻¹ et sur NumWorks : shift acos cos.
Par exemple si $\cos(\theta) = 0{,}3$, on obtient $\theta \approx 1{,}27$.

- On peut aussi résoudre ces équations en utilisant la représentation graphique de la fonction cosinus.

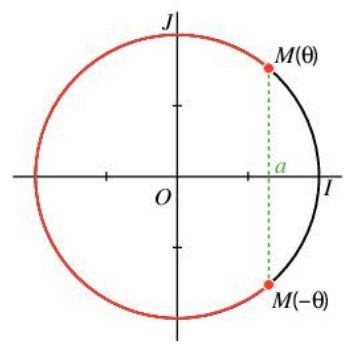
2. Résolution de l'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- Si $a < -1$, alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a \geqslant 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi ; \pi]$.
- Si $a = -1$, alors $\mathcal{S} = \{-\pi ; \pi\}$.
- Si $-1 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \left[-\pi ; -\theta\right] \cup [\theta ; \pi]$, avec $\theta \in]-\pi ; \pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$.

DÉMO en ligne



Exemple

L'inéquation $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ admet pour ensemble des solutions $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$.

Remarque

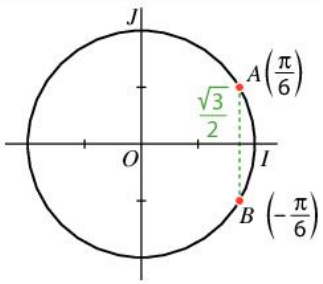
On peut aussi résoudre ces inéquations en utilisant la représentation graphique de la fonction cosinus.

Méthode 1 Résoudre une équation trigonométrique

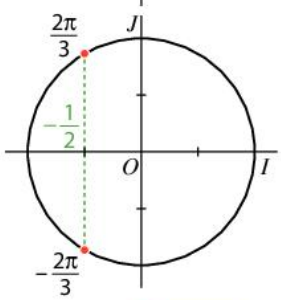
1. Résoudre, sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On s'aidera du cercle trigonométrique.
2. Résoudre, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$, l'équation $\cos(3x) = -\frac{1}{2}$.
On posera $X = 3x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1. Sur le cercle trigonométrique, les points A et B sont les points-images des deux solutions de l'équation.
Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right\}$.



2. On pose $X = 3x$.
$x \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\pi \leqslant 3x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$.
$\cos(3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(X) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow X = -\frac{2\pi}{3}$ ou $X = \frac{2\pi}{3}$ (voir cercle ci-contre)
$\Leftrightarrow 3x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $3x = \frac{2\pi}{3}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{9}$ ou $x = \frac{2\pi}{9}$
Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2\pi}{9} ; \frac{2\pi}{9}\right\}$.



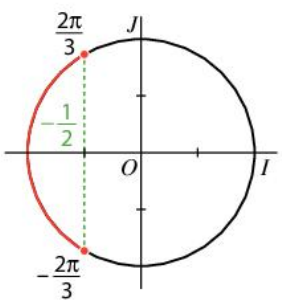
EXERCICE 26 p. 167

Méthode 2 Résoudre une inéquation trigonométrique

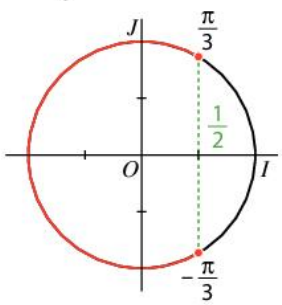
1. Résoudre, sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'inéquation $\cos(x) + 3 \leqslant 2{,}5$. On s'aidera du cercle trigonométrique.
2. Résoudre, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$, l'inéquation $\cos(4x) \leqslant \frac{1}{2}$.
On posera $X = 4x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1. $\cos(x) + 3 \leqslant 2{,}5 \Leftrightarrow \cos(x) \leqslant 2{,}5 - 3 \Leftrightarrow \cos(x) \leqslant -0{,}5$.
Cette dernière inéquation admet pour ensemble des solutions :
$$\mathcal{S} = \left[-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$$



2. On pose $X = 4x$.
$x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\pi \leqslant 4x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$.
$\cos(4x) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(X) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ (voir cercle ci-contre)
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant X \leqslant -\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3} \leqslant X \leqslant \pi$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 4x \leqslant -\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3} \leqslant 4x \leqslant \pi$
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{12}$ ou $\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$
Donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{4} ; -\frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{12} ; \frac{\pi}{4}\right]$.



EXERCICE 30 p. 167

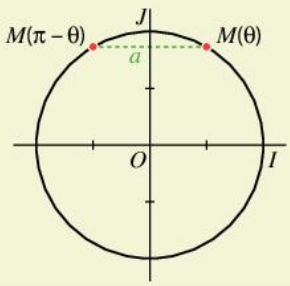
4. Équations et inéquations sur $[-\pi ; \pi]$ avec le sinus

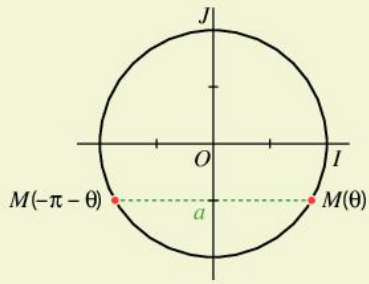
1. Résolution de l'équation $\sin(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a = -1$, alors $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{\pi - \theta ; \theta\}$, avec $\theta \in]0 ; \pi[$ tel que $\sin(\theta) = a$.
- Si $a = 1$, alors $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Si $a = 0$, alors $\mathcal{S} = \{-\pi ; 0\}$.
- Si $-1 < a < 0$, alors $\mathcal{S} = \{-\pi - \theta ; \theta\}$ avec $\theta \in]-\pi ; 0[$ tel que $\sin(\theta) = a$.





Exemple

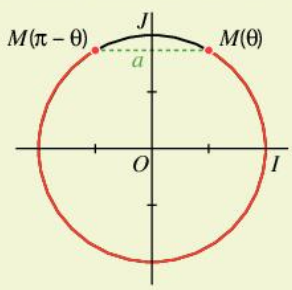
$\sin(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions sur $[-\pi ; \pi]$: $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$, car $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

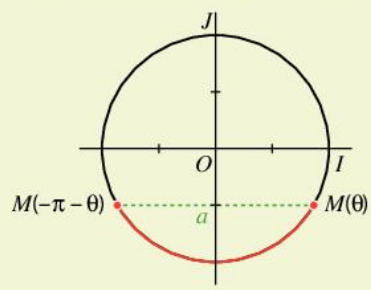
2. Résolution de l'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- Si $a < -1$, alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a = -1$, alors $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi ; \theta] \cup [\pi - \theta ; \pi]$, avec $\theta \in]-\pi ; \pi[$ le réel tel que $\sin(\theta) = a$.
- Si $a \geqslant 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi ; \pi]$.
- Si $a = 0$, alors $\mathcal{S} = [-\pi ; 0]$.
- Si $-1 < a < 0$, alors $\mathcal{S} = [-\pi - \theta ; \theta]$, avec $\theta \in]-\pi ; 0[$ le réel tel que $\sin(\theta) = a$.





Exemple

On a $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. L'inéquation $\sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$ admet pour ensemble des solutions $\left[-\pi ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$.

Remarque

On peut aussi résoudre ces équations et inéquations en utilisant la représentation graphique de la fonction sinus.

Méthode 1 Résoudre une équation trigonométrique

1 Résoudre, sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'équation $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$.

2 Résoudre, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$, l'équation $\sin(3x)=\frac{1}{2}$.

On posera $X=3x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ si $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$, donc si $x=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$.

Donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

2 On pose $X=3x$.

$x \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\pi \leqslant 3x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$

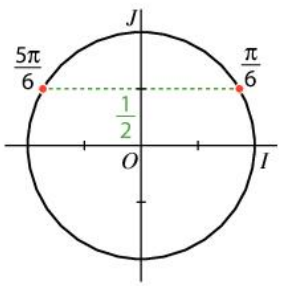
$\sin(3x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(X)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow X=\frac{\pi}{6}$ ou $X=\frac{5\pi}{6}$ (voir cercle ci-contre)

$\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{6}$ ou $3x=\frac{5\pi}{6}$

Cela équivaut à $x=\frac{\pi}{18}$ ou $x=\frac{5\pi}{18}$.

Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{18} ; \frac{5\pi}{18}\right\}$



EXERCICE 27 p. 167

Méthode 2 Résoudre une inéquation trigonométrique

1 Résoudre sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqslant -1$.

2 Résoudre sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin(2x) \leqslant \frac{1}{2}$.

On posera $X=2x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqslant -1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$

Donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

2 On pose $X=2x$.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi \leqslant 2x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$

$\sin(2x) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(X) \leqslant \frac{1}{2}$

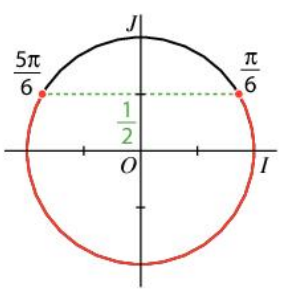
$\Leftrightarrow X \in \left[-\pi ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$ (voir cercle ci-contre)

$\Leftrightarrow -\pi \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leqslant X \leqslant \pi$

$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leqslant 2x \leqslant \pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12}$ ou $\frac{5\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Donc $\mathcal{S}=\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} ; \frac{\pi}{2}\right]$.



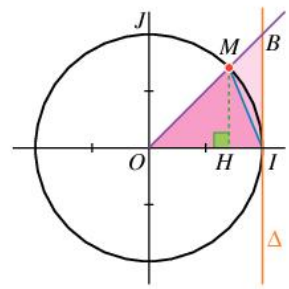
EXERCICE 31 p. 167

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Démonstration



• On va d'abord montrer que $\sin(x)\leqslant x\leqslant\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Soit $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On considère le point-image M de x sur le cercle trigonométrique.
Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et Δ la droite d'équation $x=1$. Soit B le point d'intersection des droites (OM) et Δ.
On définit les aires suivantes :
$\mathcal{A}_1$: aire du triangle OIM ; $\mathcal{A}_2$: aire du secteur circulaire OIM ;
$\mathcal{A}_3$: aire du triangle OIB.

Ainsi, lorsque $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a l'encadrement : $\mathcal{A}_1\leqslant\mathcal{A}_2\leqslant\mathcal{A}_3$.

Or $\mathcal{A}_1=\dfrac{MH\times OI}{2}=\dfrac{\sin(x)}{2}$; $\mathcal{A}_2=\dfrac{x}{2}$ et $\mathcal{A}_3=\dfrac{IB\times OI}{2}=\dfrac{IB}{2}$, donc $\dfrac{\sin(x)}{2}\leqslant\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{IB}{2}$.

On exprime IB à l'aide de x. Dans le triangle IOB, les droites (MH) et (IB) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{MH}{IB}=\dfrac{OH}{OI}$, donc $\dfrac{\sin(x)}{IB}=\dfrac{\cos(x)}{1}$, donc $IB=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

On obtient alors : $\dfrac{\sin(x)}{2}\leqslant\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{\sin(x)}{2\cos(x)}$.

On multiplie chaque membre par 2 : $\sin(x)\leqslant x\leqslant\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. (1)

• Comme $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on peut inverser chaque nombre de l'encadrement.

On obtient : $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{\sin(x)}$. (2)

Comme $\sin(x)>0$ pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient, en multipliant chaque membre par $\sin(x)$:

$$\cos(x)\leqslant\frac{\sin(x)}{x}\leqslant 1$$

En passant à la limite et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

• Comme la fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$ est paire, on a également $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

1. Pourquoi restreint-on l'intervalle d'étude à $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$?
2. Expliquer pourquoi $\mathcal{A}_2=\dfrac{x}{2}$.
3. Justifier le passage de l'encadrement de la ligne (1) à celui de la ligne (2).
4. Justifier que la fonction $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$ est paire.

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Écrire le taux de variation de la fonction cosinus en 0.
- En utilisant le fait que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer la limite du taux de variation de la fonction cosinus en 0.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin(x)\leqslant x-\frac{x}{2}$.

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin(x)-x+\frac{x}{2}$. En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variation de f' sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
- Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f'.
- Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de f.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 Démontrer la propriété suivante.
« Si T est une période d'une fonction f, alors, pour tout entier naturel n, le nombre nT est aussi une période de f. »

Utiliser un raisonnement par récurrence

- On pose clairement la propriété à démontrer en fonction de n entier naturel, notée $P(n)$.
- On initialise cette propriété, c'est-à-dire qu'on montre qu'elle est vraie au premier rang auquel on veut la démontrer.
- On montre l'hérédité de la propriété, c'est-à-dire qu'on montre que, pour tout entier k supérieur au premier rang, $P(k)\Rightarrow P(k+1)$.
- On conclut.

2 En utilisant l'encadrement :

$$-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1,$$

démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{2x^2}=0$.

Utiliser un théorème

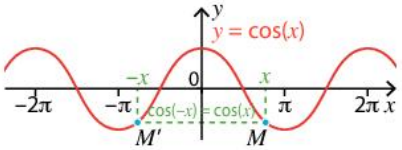
On se place dans les conditions d'utilisation d'un théorème. On cite le théorème et on l'applique.

Carte mentale

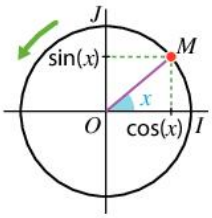
Fonctions trigonométriques

Connaître les fonctions cosinus et sinus

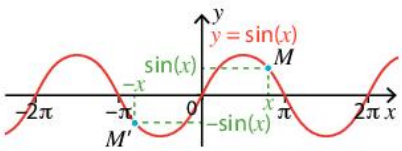
- La fonction **cosinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Elle est paire et périodique de période 2π.
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
- Pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$.



- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$



- La fonction **sinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Elle est impaire et périodique de période 2π.
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$.



- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Connaître les valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

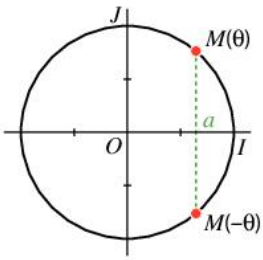
Dériver des fonctions trigonométriques

Soient $f : x \mapsto \cos(u(x))$ et $g : x \mapsto \sin(u(x))$.
Alors :
$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x))$
et $g'(x) = u'(x)\cos(u(x))$.

Résoudre des équations trigonométriques

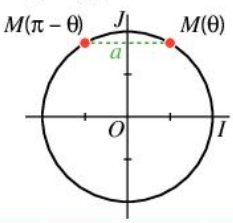
- **$\cos(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$**

Si $-1 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{-\theta ; \theta\}$, avec θ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\theta \in]0 ; \pi[$.



- **$\sin(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$**

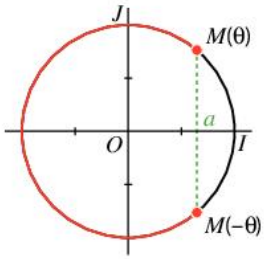
Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{\pi - \theta ; \theta\}$, avec θ tel que $\sin(\theta) = a$ et $\theta \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.



Résoudre des inéquations trigonométriques

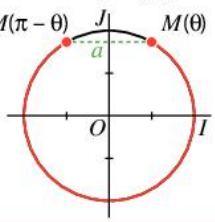
- **$\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$**

Si $-1 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi ; -\theta] \cup [\theta ; \pi]$ avec θ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\theta \in]0 ; \pi[$.



- **$\sin(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$**

Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi ; \theta] \cup [\pi - \theta ; \pi]$, avec θ tel que $\sin(\theta) = a$ et $\theta \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.



QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 La limite en zéro de $\dfrac{x+\sin(x)}{x}$ vaut :

(a) 2 (b) $+\infty$ (c) 0

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x+1} =$:

(a) 1 (b) $+\infty$ (c) 0

3 La tangente au point $A(\pi\,;3)$ de la courbe de la fonction $x \mapsto -3\cos(x)$:

(a) est de coefficient directeur strictement positif.
(b) est horizontale.
(c) a pour coefficient directeur 3.

4 La tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentant la fonction $x \mapsto x+\sin(2x)$:

(a) passe par l'origine.
(b) a pour coefficient directeur 1.
(c) a pour équation réduite $y = 3x+1$

5 L'ensemble des solutions de l'équation $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ est :

(a) $\left\{0\,;\dfrac{\pi}{6}\right\}$
(b) $\left\{-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{6}\right\}$
(c) $\left\{-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{6}\right\}$
(d) $\left\{\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

6 Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$t(x) = -2\cos(4x)$.

(a) t est paire.
(b) t est décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.
(c) L'équation $t(x)=2$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.
(d) L'équation $t(x)=2$ a pour ensemble des solutions $\left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\,;\dfrac{5\pi}{4}\,;\dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

1 Pour tout réel x, $\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$.

2 Pour tout réel x, $\cos(5\pi - x) = -\cos(x)$.

3 Pour tout réel x, $\sin(\pi + x) = \sin(x)$.

4 Pour tout réel x, $\cos(2\pi + x) = -\cos(2\pi - x)$.

5 $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

6 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = \cos(0)$

7 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

8 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

9 Le produit de deux fonctions périodiques de même période T est une fonction périodique de période T.

10 Le quotient de deux fonctions périodiques de même période T est une fonction périodique de période T.

11 La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sin(2x) - x$, est une fonction impaire.

12 La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sin(x^2) - x$, est une fonction paire.

13 La dérivée de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sin(3x)$, a pour expression :
$f'(x) = -\cos(3x)$.

14 La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = \cos(4x) - \sin(3x)$, a pour dérivée :
$h'(x) = 4\cos(4x) - 3\sin(3x)$.

15 La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = \cos(x) + 3\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, a pour dérivée :
$g'(x) = -\sin(x) + 6\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

16 La fonction j, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$j(x) = x^2\cos(2x)$, a pour dérivée :
$j'(x) = -4x\cos(2x)$.

TP 1 Recherche d'antécédents ALGO PYTHON

Objectif
Utiliser une boucle « while ».

Antoine doit trouver les antécédents de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; 20\pi]$.

Il a donc écrit la fonction Python suivante.

```
1  from math import pi
2  def antécédent():
3      s1=pi/4
4      s2=3*pi/4
5      k=0
6      A=[]
7      while s1<20*pi and s2<20*pi:
8          s1=s1+2*k*pi
9          s2=s2+2*k*pi
10         k=k+1
11         A.append(s1)
12         A.append(s2)
13     return A
```

1. **a.** Expliquer les lignes 3 et 4 de ce programme.
   b. Expliquer l'instruction de la ligne 7.
   c. Utiliser cette fonction et donner les six premiers résultats obtenus, en valeurs approchées, grâce au programme.
   d. Le logiciel Python ne donne pas les valeurs exactes. Aider Antoine à les retrouver « à la main ».

2. Antoine a écrit la fonction Python ci-dessous, incomplète, afin de calculer les antécédents de $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ par la fonction cosinus sur l'intervalle $[-3\pi ; 6\pi]$.

```
1  from math import pi
2  def antécédentbis():
3      s1=...
4      s2=...
5      k=0
6      A=[]
7      while s1<... and s2<...:
8          s1=s1+2*k*pi
9          s2=s2+2*k*pi
10         k=k+1
11         A.append(s1)
12         A.append(s2)
13     return A
```

a. Justifier que $-\frac{17\pi}{6}$ et $-\frac{7\pi}{6}$ sont les plus petits réels de l'intervalle $[-3\pi ; 6\pi]$ répondant à la question.

b. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus, puis l'exécuter afin de trouver les antécédents de $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ par la fonction cosinus sur l'intervalle $[-3\pi ; 6\pi]$.

c. Le logiciel Python ne donne pas les valeurs exactes. Aider Antoine à les retrouver « à la main ».

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

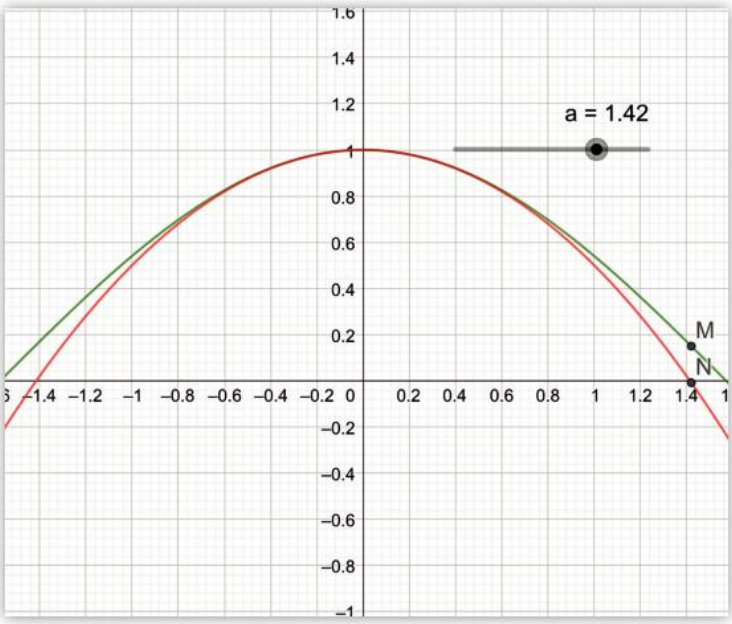
- Dans une boucle « while », on peut mettre deux conditions de la manière suivante.
  while condition 1 and condition 2
- A=[ ] crée une liste nommée A.
  A.append(s1) permet de rajouter la valeur s1 à la liste A.

TP 2 Approximation d'une fonction LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Utiliser un logiciel de géométrie pour une approximation de fonction.

On a tracé à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique les courbes représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto \cos(x) \text{ et } g : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$$



1. Reproduire la figure en créant un curseur a, les deux points $M(a\,;f(a))$ et $N(a\,;g(a))$, puis faire calculer par le logiciel la distance MN.
2. Déterminer graphiquement l'intervalle de l'axe des abscisses sur lequel la distance MN est inférieure à 0,05.
3. **a.** En modifiant l'incrément du curseur, proposer une valeur de x non nulle pour laquelle la distance MN est inférieure à 0,001.

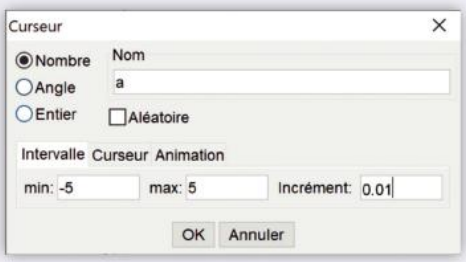
   b. Même question pour obtenir une distance inférieure à 0,0005.
4. Que signifie l'expression : « Le polynôme $1 - \frac{x^2}{2}$ est une bonne approximation de $\cos(x)$ lorsque x est proche de zéro. » ?
5. Reprendre les questions **1** à **4** avec les fonctions :

$$f : x \mapsto \sin(x) \text{ et } g : x \mapsto x - \frac{x^3}{6}.$$

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

À l'aide d'un clic droit sur le curseur, on peut régler ses caractéristiques, notamment le pas, aussi appelé incrément du curseur.



Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Donner les valeurs exactes de :

a. $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ b. $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ c. $\cos(-185\pi)$

d. $\sin(-185\pi)$ e. $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right)$ f. $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right)$

g. $\cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right)$ h. $\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right)$

2 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$, où x est un réel.

1. $\sin(2\pi + x)$ 2. $\sin(2\pi - x)$
3. $\cos(x - 2\pi)$ 4. $\cos(2\pi - x)$
5. $\cos(6\pi + x)$ 6. $\cos(x + 8\pi)$

3 PYTHON On a écrit l'instruction suivante dans la console Python, mais l'affichage est illisible.

```
>>> from math import pi,sin,cos
>>> sin(      )
-0.8660254037844386
```

Quelle instruction a pu être écrite ?

4 Parmi ces valeurs, lesquelles peuvent être solutions de l'équation $\cos(x) = -0{,}5$?

(a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $-\frac{8\pi}{3}$ (c) $\frac{8\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) $-\frac{\pi}{3}$

5 1. Vérifier que, dans chaque cas, la fonction f est périodique de période T.

a. $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $T = 2\pi$

b. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$; $T = \pi$

c. $f(x) = \sin(x) \times \cos(x)$; $T = \pi$

d. $f(x) = -4(\sin(x))^2$; $T = \pi$

2. Parmi les quatre fonctions définies ci-dessus, une est paire et une autre est impaire. Lesquelles ?

6 Pour chaque expression suivante de la fonction f, calculer $f'(t)$.

1. $f(t) = -\cos(2t)$
2. $f(t) = t \times \sin(t)$
3. $f(t) = 3\cos(2t) + 5$
4. $f(t) = 3\cos(2t^2 + 5)$

7 1. On sait que $\cos(x) = -0{,}5$ et $x \in]-\pi\,;\,\pi]$. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

2. Résoudre l'équation $\sin(x) = -0{,}5$ sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

8 Recopier et compléter avec $<$ ou $>$.

1. Si $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$, alors $\cos(a)$ … $\cos(b)$.
2. Si $-\frac{\pi}{2} \leqslant a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(a)$ … $\sin(b)$.
3. Si $\pi \leqslant a < b \leqslant \frac{3\pi}{2}$, alors $\sin(a)$ … $\sin(b)$.
4. Si $-\pi \leqslant a < b \leqslant 0$, alors $\cos(a)$ … $\cos(b)$.

9 VRAI OU FAUX

On donne les huit réels suivants.

- $r = \frac{\pi}{3}$ • $s = -\frac{2\pi}{3}$ • $t = \frac{\pi}{2}$ • $u = \frac{3\pi}{4}$
- $v = -\frac{3\pi}{4}$ • $w = 4\pi$ • $x = 3\pi$ • $y = -\frac{7\pi}{3}$

1. Indiquer les affirmations vraies.

a. $\cos(r) > 0$

b. $\sin(r) \leqslant 0$

c. $\sin(x) < 0$

d. $\cos(r) \leqslant \cos(w)$

e. $\sin(t) = \cos(w)$

f. $\sin(u) = -\cos(u)$

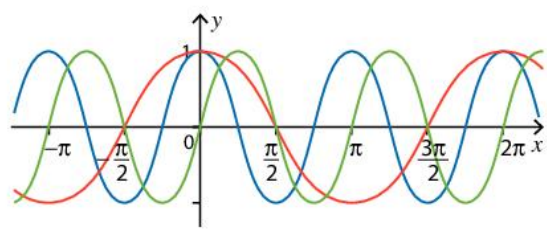
g. $\sin(-y) = \sin(r)$

2. Corriger les affirmations fausses.

10 Associer chaque expression de 1. à 4. à l'expression qui lui est égale parmi (a) à (d).

1. $\cos(-x)$ (a) $\sin(x)$
2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $-\cos(x)$
3. $\sin(x - \pi)$ (c) $\cos(x)$
4. $\sin(x + 2\pi)$ (d) $-\sin(x)$

11 On donne les courbes représentatives de trois fonctions.



Associer à chaque courbe l'expression de la fonction qu'elle représente.

1. $f(x) = \sin(2x)$
2. $g(x) = \cos(x)$
3. $h(x) = \cos(2x)$

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. La somme de deux fonctions périodiques de périodes respectives T et T' est une fonction périodique de période $T + T'$.
2. La somme de deux fonctions paires est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

On admet que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et que, pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

- Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos(x) - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin(x) = -2\sqrt{3}.$$

Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

On considère le problème suivant.
« Deux joueurs sont dans une chambre, dont le parquet est constitué de lames de la même largeur simplement séparées par des joints parallèles.
On lance en l'air une aiguille ayant pour longueur la largeur d'une lame de parquet.
L'un des deux joueurs parie que l'aiguille ne croisera jamais aucun des joints parallèles du parquet tandis que l'autre joueur, au contraire, parie que l'aiguille croisera une de ces parallèles.
Lequel des deux joueurs a le plus de chance de gagner son pari ? »

- En faisant des recherches sur la méthode de Buffon, faire le lien entre l'énoncé précédent et le nombre π, puis répondre à la question posée dans le problème.

Dérivation des fonctions cosinus et sinus

1 Associer à chacune des fonctions de a à d sa dérivée parmi les fonctions de g à j.

$a(x) = 2\sin(x)$
$b(x) = -\sin(2x)$
$c(x) = 2\sin(2x) - 2$
$d(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)$
$g(x) = -\cos(2x)$
$h(x) = 2\cos(x)$
$i(x) = -2\cos(2x)$
$j(x) = 4\cos(2x)$

2 Associer à chacune des fonctions de a à d sa dérivée parmi les fonctions de g à j.

$a(x) = 3\cos(x)$
$b(x) = -\cos(3x) + 3$
$c(x) = 3\cos(-3x)$
$d(x) = \frac{1}{3}\cos(3x)$
$g(x) = 9\sin(-3x)$
$h(x) = -3\sin(x)$
$i(x) = 3\sin(3x)$
$j(x) = -\sin(3x)$

3 **Calculer**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(2x)$
2. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos(x)$
3. $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$
4. $f(x) = \sin(2x - 1)\cos\left(\frac{3}{4} - 2x\right)$

4 **Calculer**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^2 - \cos(x)$
2. $f(x) = x - \sin(2x)$
3. $f(x) = 3\sin(x) - \cos(3x) + 3$
4. $f(x) = \sin^2(x)$
5. $f(x) = \cos^2(x)$
6. $f(x) = x^2\sin(x)$

5 **Calculer**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle I donné.

1. $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{5}{\cos(x)}$; $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$
3. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; $I = [-\pi ; \pi]$
4. $f(x) = \cos(4x)\sin(-4x)$; $I = [-\pi ; \pi]$

6 **Calculer**

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(x) = (-1 + \sin(x))(\sin(x) + 1).$$

1. Calculer la dérivée s' de la fonction s et montrer que, pour tout réel x, $s'(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$s'(x) = 2\cos(x)\sin(x).$$
2. Développer l'expression de $s(x)$, puis calculer $s'(x)$ avec la nouvelle expression obtenue de $s(x)$.
3. Vérifier que les deux résultats sont égaux.

7 **Calculer**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

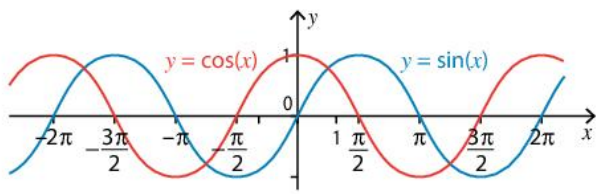
$$f(x) = \sin(x)\cos^2(x).$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction :
$$x \mapsto \cos(x)\left(1 - 3\sin^2(x)\right).$$
2. Montrer que, pour tout réel x :
$$f'(x) = \cos(x)\left(3\cos^2(x) - 2\right).$$

Variations et limites des fonctions trigonométriques

8 **Communiquer, raisonner**

On a représenté ci-dessous les courbes des fonctions sinus et cosinus dans un repère orthogonal.



1. a. Rappeler le lien entre le signe de $\cos(x)$ et les variations de la fonction sinus.
b. Citer un intervalle sur lequel $\cos(x)$ est négatif et donner les variations de la fonction sinus sur cet intervalle.
2. a. Rappeler le lien entre le signe de $-\sin(x)$ et les variations de la fonction cosinus.
b. Citer un intervalle sur lequel $-\sin(x)$ est positif et donner les variations de la fonction cosinus sur cet intervalle.
3. Comment appelle-t-on l'ordonnée du point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction sinus ?
4. Comment appelle-t-on l'ordonnée du point d'abscisse 2π de la courbe représentative de la fonction cosinus ?

9 **Modéliser**

CALCULATRICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \cos(x).$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier la conjecture.

Attention à bien configurer la calculatrice en mode radian !

10 **Modéliser**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sin(x).$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En utilisant un encadrement de $\sin(x)$, étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
3. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique de la fonction f ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

b. Conjecturer graphiquement l'équation de cette tangente.

4. Démontrer la conjecture émise à la question précédente.

11 VRAI OU FAUX

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x\cos(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Indiquer si chaque proposition est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. Pour tout réel x :

$$f(x) - xf'(x) = x^2\sin(x).$$

2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour équation $y = -x$.
3. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

12 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\sin(3x + \pi) - 3x.$$

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer le sens de variation de la fonction g.
2. On considère la droite d'équation :

$$y = -3x - 1.$$

Conjecturer graphiquement le nombre de points d'intersection entre la droite et la courbe représentative de g.

3. Démontrer les conjectures émises aux questions précédentes.

13 On considère la fonction k, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = 3\sin(4x - \pi).$$

1. Pour tout réel x, déterminer l'expression $k'(x)$ de la fonction dérivée de k.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction k au point d'abscisse :

a. 0 ; b. $\frac{\pi}{3}$; c. $-\frac{\pi}{2}$.

3. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE CALCULATRICE Tracer la courbe représentative de la fonction k sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice.
4. Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction k sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

14 ALGO PYTHON

On considère la fonction k de l'exercice précédent, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = 3\sin(4x - \pi).$$

1. Julia a tapé le programme Python ci-dessous, mais elle n'a pas écrit ce qui doit figurer à la place des pointillés.

```
from math import pi,cos,sin

def position(x):
    if 12*cos(4*x-pi)>=0:
        return "la tangente à la courbe de k est une droite qui..."
    else:
        return "..............................."
```

Recopier et compléter l'algorithme, puis expliquer à quoi il sert.

2. Saisir le programme dans l'éditeur Python, l'exécuter et donner, pour chacune des deux conditions, un réel x la vérifiant.

15 **Raisonner**

1. Rappeler la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.
2. En déduire les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

On remarquera que, pour tout réel x non nul :

$$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{3\sin(3x)}{3x}.$$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x)}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(4x)}$

16

1. Écrire la définition du nombre dérivé de la fonction sinus en un réel a.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{x}$.

17

1. Écrire la définition du nombre dérivé de la fonction sinus en un réel a.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}}{6x}$.

On pensera à factoriser le dénominateur par 6.

18 VRAI OU FAUX

Indiquer si chaque proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(x)}{x} = 2$
2. La courbe représentative de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$, admet une asymptote horizontale.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x} = 1$

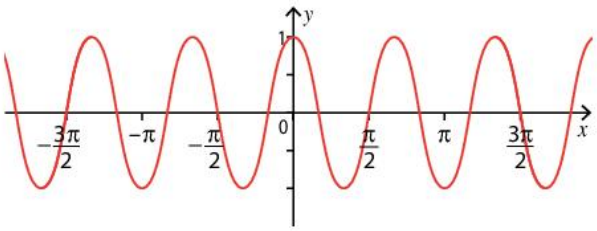
Parité et périodicité

19 **Communiquer, raisonner**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(3x)$$

dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative.



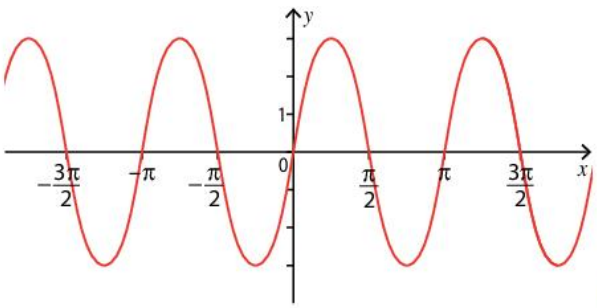
1. Par lecture graphique, conjecturer :
a. la parité de la fonction f ;
b. la périodicité de la fonction f.
2. Démontrer ces conjectures.

20 **Communiquer, raisonner**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\sin(2x)$$

dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative.



1. Par lecture graphique, conjecturer :
a. la parité de la fonction f ;
b. la périodicité de la fonction f.
2. Démontrer ces conjectures.

21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Montrer que la fonction f est périodique de période $\frac{2\pi}{5}$.

2. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Utiliser une calculatrice ou un logiciel de géométrie pour vérifier graphiquement le résultat.

22 CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

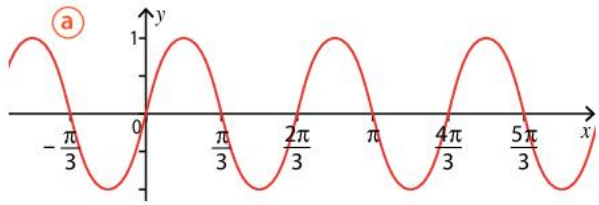
$$f(x) = \sin(2x)\cos(x).$$

1. a. Tracer sa courbe représentative avec un logiciel de géométrie ou la calculatrice.
b. Conjecturer si la fonction f est paire, impaire et/ou périodique.
2. Démontrer ces conjectures.

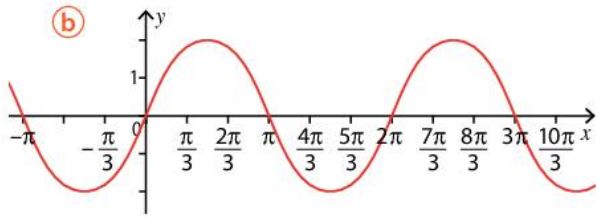
23 **Communiquer, raisonner**

Associer chacune des courbes représentatives tracées ci-dessous à une des expressions données.

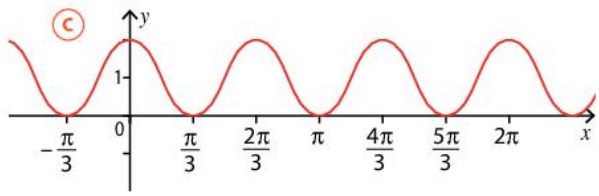
a.



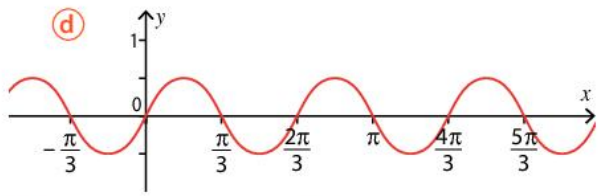
b.



c.



d.



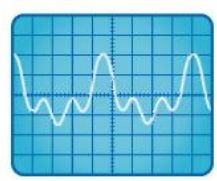
① $f(x) = \cos(3x) + 1$ ② $g(x) = \frac{1}{2}\sin(3x)$
③ $h(x) = \sin(3x)$ ④ $i(x) = 2\sin(x)$

24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos(2x) - \sin^2(x).$$

1. Montrer que la fonction f est paire.
Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
2. Montrer que la fonction f est périodique de période π.
Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
3. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Tracer la courbe représentative de f avec une calculatrice ou un logiciel, puis vérifier graphiquement les réponses aux questions précédentes.

25 On visualise sur un oscilloscope le signal sonore émis par un instrument de musique en fonction du temps.
Le temps (en ms) se lit sur l'axe des abscisses et le son (transformé en tension électrique) sur l'axe des ordonnées (en mV).
On obtient la courbe ci-contre.
Les réglages de l'oscilloscope sont :



- sensibilité de la voie : 100 mV/div ;
- balayage : 0,5 ms/div.

• Déterminer la période du signal.

Équations et inéquations trigonométriques

26 1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

a. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos(x) + 1 = \frac{1}{2}$

c. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\cos(x) = \frac{3}{2}$

2. En utilisant la courbe représentative de la fonction cosinus, expliquer comment retrouver les résultats précédents.

27 À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2. $\sin(x) = 1$

3. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

4. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

28 **Calculer**

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $\cos(2x) - \frac{1}{2} = 0 ; I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On posera $X = 2x$.

2. $\cos(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) ; I = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$.

On posera $X = 3x$.

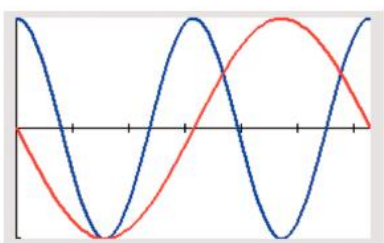
3. $1 + \sin(5x) = \frac{-\sqrt{3}+2}{2} ; I = \left[-\frac{\pi}{5} ; \frac{\pi}{5}\right]$.

On posera $X = 5x$.

29 1. On considère les fonctions suivantes, définies sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

$$f : x \mapsto \cos(2x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -\sin(x).$$

Les courbes représentatives de f et de g sont représentées ci-dessous sur un écran de calculatrice.



Associer chaque courbe à la fonction correspondante.

2. En déduire graphiquement le signe de chaque fonction sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

30 1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I donné.

a. $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} ; I = [-\pi ; \pi]$

b. $\cos(x) + 1 \leqslant \frac{1}{2} ; I = [-\pi ; \pi]$

c. $\cos(3x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} ; I = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$.

On posera $X = 3x$.

2. En utilisant la courbe représentative de la fonction cosinus, expliquer comment retrouver les résultats précédents.

31 À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $\sin(2x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} ; I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On posera $X = 2x$.

2. $\sin(2x) < \frac{1}{2} ; I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On posera $X = 2x$.

3. $\sin(4x) \geqslant \frac{1}{2} ; I = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

On posera $X = 4x$.

32 PRISE D'INITIATIVE

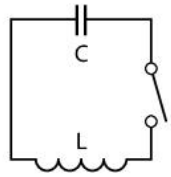
Une touriste se trouve sur la grande roue de Londres, surnommé le London Eye. Elle se demande combien de temps, lors du premier tour de la roue, elle se trouve à une hauteur supérieure à 400 pieds (le pied est une unité anglo-saxonne de mesure de longueur : 1 pied ≈ 30,48 cm).

• Répondre à la question de la touriste, sachant que le premier tour dure 30 minutes et que la hauteur (en pied) de la touriste en fonction du temps t (en minute), lorsqu'elle est sur la roue, est donnée par la fonction suivante.

$$f(t) = 225\sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 7{,}5)\right) + 225$$

33 **Circuit électromagnétique**

On considère un circuit électromagnétique comprenant :
– un condensateur dont la capacité (exprimée en farad) est C ;
– une bobine dont l'inductance (exprimée en henry) est L ;
– un interrupteur.



Le temps t est exprimé en seconde.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit. On nomme $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulomb, du condensateur à l'instant t. On définit ainsi une fonction q, dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On admet que $q(t) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que $T = \frac{\pi}{100}$ est une période de q.
2. Montrer que la fonction q n'est ni paire ni impaire.
3. Calculer la dérivée de la fonction q et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{100}\right]$.

34 Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t(x) = (-1 + \sin(x))\cos(x) - 1.$$

1. Prouver que la dérivée de t peut s'écrire sous la forme $t'(x) = (1 + 2\sin(x))(1 - \sin(x))$.
2. Anaëlle prétend qu'en connaissant le signe de $1 + 2\sin(x)$, on obtient les variations de t.
A-t elle raison ?
3. Anaëlle prétend que la courbe représentant la fonction t admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et en ces points seulement.
A-t-elle raison ?

35 On considère la fonction r, définie sur $[-2\pi ; 2\pi[$ par :

$$r(x) = 2\cos(x) + x + 2.$$

1. Soit a un nombre réel.
Rappeler la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction r au point A d'abscisse a.
2. Démontrer que, sur $[-2\pi ; 2\pi[$, la courbe représentative de la fonction r possède quatre points auxquels la tangente a pour coefficient directeur 2.
3. Donner l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$.

36 **Intensité d'un courant électrique**

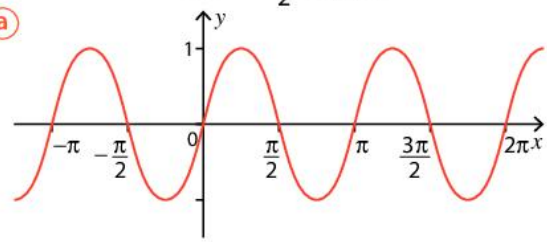
L'intensité i dans un circuit électrique, exprimée en ampère (A), est une fonction du temps t, exprimé en milliseconde (ms).
On suppose que l'on a $i(t) = \sqrt{3}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que π est une période la fonction i.
2. Calculer $i'(t)$.
3. Déterminer les variations de i sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction i sur cet intervalle.

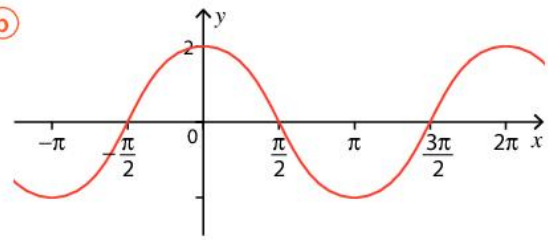
37 On considère quatre courbes représentant quatre fonctions dans des repères orthogonaux.
Parmi ces quatre courbes, une seule représente la dérivée de la fonction :

$$h : x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

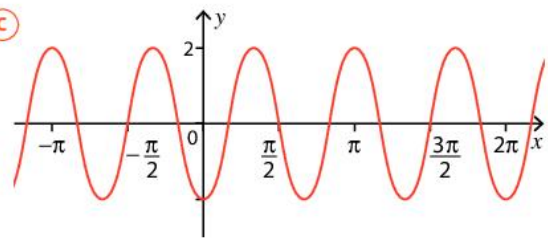
a



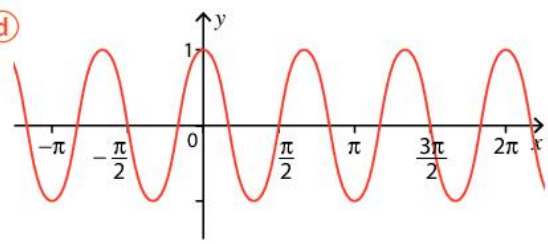
b



c



d



1. Déterminer la bonne courbe, sans dériver la fonction h.
2. CALCULATRICE Dériver h, puis tracer la courbe de la fonction h' sur la calculatrice.
Vérifier la validité de la réponse à la question précédente.

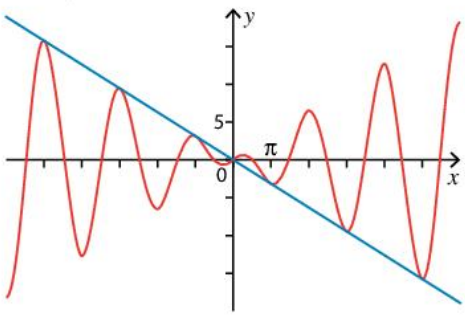
38 1. CALCULATRICE Tracer sur la calculatrice la courbe de la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ et sa tangente au point $O(0 ; 0)$.
2. On note d la fonction définie, pour tout réel x appartenant à $[0 ; \pi]$, par $d(x) = x - \sin(x)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction d et en déduire le signe de $d(x)$ sur $[0 ; \pi]$.
3. Déduire de la question précédente la position de la courbe représentant la fonction sinus par rapport à sa tangente en O sur $[0 ; \pi]$.
4. Justifier, sans calcul, la position relative de la courbe représentative de la fonction sinus par rapport à sa tangente en O sur l'intervalle $[-\pi ; 0]$.

39 PRISE D'INITIATIVE

Un fournisseur d'électricité produit un courant alternatif dont la tension oscille 60 fois par seconde entre son maximum +155,6 V et son minimum −155,6 V. On note u la fonction qui donne la tension en fonction du temps t. On admet que $u(t)$ est de la forme $\beta\cos\left(\alpha+\left(t+\frac{1}{60}\right)\right)$, où α et β sont des constantes réelles.

• Proposer, en utilisant les données de l'énoncé, une expression algébrique de $u(t)$ (on suppose que la tension vaut +155,6 V à l'instant $t=0$).

40 Soient f et g deux fonctions, définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cos(x)$ et $g(x)=-x$, dont on a tracé les représentations graphiques ci-dessous.



1. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier la réponse.

2. a. Conjecturer graphiquement une comparaison entre $f(x)$ et $g(x)$ selon les valeurs de x.

b. Démontrer la conjecture.

41 **Calculer**

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

1. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. $\cos(x)\leqslant\frac{1}{2}$

3. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>-1$ 4. $\cos(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$

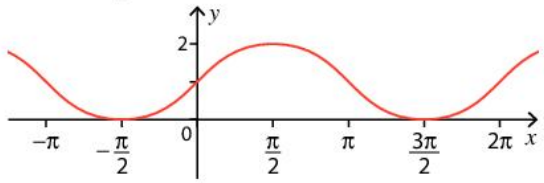
42 PRISE D'INITIATIVE

Résoudre l'équation suivante sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

$$4\cos^2(x)+\left(2-2\sqrt{2}\right)\cos(x)-\sqrt{2}=0$$

Aide : calculer le carré de $2+2\sqrt{2}$.

43 On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, dont on donne ci-dessous la courbe représentative de sa fonction dérivée f'.



1. Reproduire le graphique et dessiner une allure possible de la courbe représentative de f.

2. On suppose que, pour tout réel x :

$f'(x)=\sin(x)+k$, où k est un réel.

Sachant que le point de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ appartient à la courbe représentative de f', déterminer la valeur de k.

3. On donne $f(x)=x-1-\cos(x)$.

Vérifier le résultat de la question précédente.

4. Déterminer le point de la courbe représentative de f dont l'abscisse appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et auquel la tangente à la courbe de f a pour coefficient directeur 1.

44 **Chercher, raisonner**

Donner le signe des fonctions suivantes sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

1. $f:x\to\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

2. $g:x\to\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

45 On considère la fonction définie, pour tout réel x non nul, par $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Démontrer la conjecture émise à la question 1.

3. Décrire et expliquer l'allure de $\mathscr{C}_f$ lorsque x tend vers 0 en étant positif.

4. a. La fonction f est-elle périodique ?

b. Conjecturer la parité de f, puis démontrer cette conjecture.

5. Soit x_1 la plus grande valeur positive telle que $f(x_1)=0$. Déterminer la valeur exacte de x_1.

6. Parmi les propositions suivantes, choisir l'unique bonne réponse.

(a) L'équation $f(x)=0$ admet un nombre fini de solutions.

(b) L'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

(c) L'équation $f(x)=0$ admet un nombre infini de solutions.

7. On considère deux réels a et b tels que $0<a<b$ et que a et b soient deux solutions consécutives de l'équation $f(x)=0$.

Exprimer a en fonction de b.

46 ALGO PYTHON

On considère un angle de mesures $x + 2k\pi$ exprimées en radians, où k est un entier relatif.
On appelle mesure principale de l'angle la valeur de $x + 2k\pi$ appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
L'algorithme ci-dessous, incomplet, permet de déterminer une valeur approchée de la mesure principale d'un angle.

```
from math import pi
def mesureprincipale(x):
    if x>=0:
        while x>pi:
            x=...
    else:
        while x<=...:
            x=...
    return x
```

1. Recopier et compléter cet algorithme, puis le tester avec un angle de mesure $\frac{13\pi}{3}$.

2. Écrire un nouvel algorithme en Python, utilisant la division euclidienne, qui donne le même résultat.

47 On considère la fonction m, définie pour tout réel $x \in [-\pi ; 0[\cup]0 ; \pi]$ par :

$$m(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [-\pi ; 0[\cup]0 ; \pi]$:

$$m(-x) = m(x).$$

Que peut-on en conclure pour la fonction m et pour sa courbe représentative ?

2. Démontrer que la dérivée de m a le même signe que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $[-\pi ; 0[\cup]0 ; \pi]$.

3. Dessiner la courbe représentative de la fonction m sur l'intervalle $[-\pi ; 0[\cup]0 ; \pi]$.

4. Conjecturer la valeur de la limite de $m(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. ALGO PYTHON On a écrit la fonction Python suivante.

```
from math import *
def limite_fonction_m(t):
    x=1
    while 1-cos(1/x)>t:
        x=x+1
    return x
```

Recopier cette fonction dans un éditeur et la tester avec $t = 0{,}0011$, puis $t = 10^{-8}$.
Expliquer la signification du résultat x affiché.

48 TABLEUR

Guang doit résoudre l'équation $\sin(x) = 0{,}3$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

1. Justifier que cette équation possède deux solutions, l'une appartenant à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, l'autre appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

2. Afin de déterminer une valeur approchée de la solution appartenant à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, Guang décide d'utiliser un tableur dont la copie d'écran est reproduite ci-dessous.

	A	B	C
1			
2	Pas =	0,1	
3			
4	x		sin(x)-k
5	0		-0,3
6	0,1		-0,2001666
7	0,2		-0,1013307
8	0,3		-0,0044798
9	0,4		0,08941834
10	0,5		0,17942554
11	0,6		0,26464247
12	0,7		0,34421769
13	0,8		0,41735609
14	0,9		0,48332691
15	1		0,54147098
16	1,1		0,59120736
17	1,2		0,63203909
18	1,3		0,66355819
19	**k =**	**0,3**	

a. Il a écrit dans la cellule C5 la formule :

`=SIN(A5)-B$19`

puis l'a recopiée jusqu'en C18. Expliquer l'utilisation du signe « $ ».

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution de l'équation.

3. Créer une feuille de calcul afin de déterminer un encadrement de la solution de l'équation d'amplitude 10^{-3}.

4. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la deuxième solution.

5. À l'aide d'un tableur, donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} des solutions de l'équation $\sin(x) = 0{,}6$ sur $[0 ; \pi]$.

49 Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par :

$$p(x) = (1 + \sin(x))\cos(x).$$

1. Vérifier que p est périodique (on précisera sa période) et qu'elle n'est ni paire, ni impaire.

2. Après avoir expliqué pourquoi p est dérivable sur $[0 ; \pi]$, montrer que :

$$p'(x) = (1 + \sin(x))(1 - 2\sin(x)).$$

3. Résoudre sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ l'inéquation :

$$2\sin(x) \leqslant 1.$$

En déduire le signe de $p'(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de p.

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de p au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

6. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Sur la calculatrice ou sur un logiciel de géométrie, tracer la courbe de p ainsi que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$.

50 Optimisation géométrique

Partie A

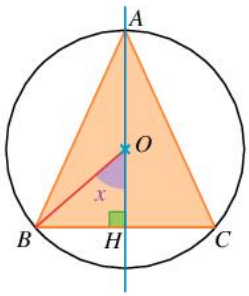
1. Démontrer que, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)(2\cos(x) + 2).$$

2. En déduire le signe de $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$ sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Partie B LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
H est le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$.



On note x la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOB}$.

1. En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la position du point B qui rend l'aire du triangle maximale.
2. Sachant que $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer la valeur de x qui donne une aire maximale pour le triangle ABC.

51 Les marées

Modéliser

La hauteur de l'eau à l'entrée d'un port est donnée par la fonction f, définie par $f(t) = 9 - 2\cos\left(\frac{t}{3}\right)$, où t est la durée (en heure) après la dernière marée basse.

1. On suppose que la profondeur du port est constante. Quelle est la hauteur d'eau dans le port à marée basse ?
2. Quelle est la hauteur d'eau à marée haute ?
3. Quelle est la durée qui sépare une marée basse d'une marée haute ? On arrondira le résultat en heure et minute.

52 CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Diapason

Pour accorder une guitare, on utilise un diapason qui émet un son pur. Le son du diapason peut être modélisé par la fonction h, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = 5\sin(2t)$, où t est le temps exprimé en milliseconde (ms) et $h(t)$ est la tension aux bornes de l'enregistreur de son. De même, on modélise le son de la guitare par la fonction g, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 4\sin(2t) - 2\sin(4t)$.

1. En utilisant une calculatrice ou un logiciel de géométrie, tracer les courbes représentatives des deux fonctions.
2. Quelle est la période de chaque fonction ?
3. On définit la fréquence f d'un son, en hertz, par $f = \frac{1}{T}$; T étant la période, en s, de la fonction qui modélise le son.
Quelle est la fréquence de chaque son ?
4. Donner l'équation de la tangente à chacune de ces courbes au point d'abscisse $t = 0$.
5. En utilisant une calculatrice ou un logiciel de géométrie, conjecturer les solutions de l'équation $h(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

53

1. Déterminer le signe de $\cos(X)$ pour :

$$\frac{\pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

2. CALCULATRICE Soit s la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par : $s(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Représenter la fonction s sur la calculatrice et donner la valeur de son maximum, ainsi que le nombre en lequel il est atteint.
3. On note X le réel $X = x + \frac{\pi}{6}$.
À quel intervalle appartient X lorsque $x \in [0 ; \pi]$?
4. Recopier et compléter le tableau de signes ci-dessous. Pour la dernière ligne, on s'aidera de la réponse à la question 1.

x	0	…	π
$X = x + \frac{\pi}{6}$			
Signe de $\cos(X)$	…	0	…

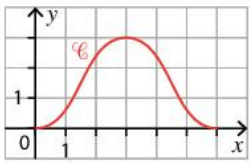
5. Calculer $s'(x)$.
6. En déduire le tableau de variation de s.
7. Déterminer les équations réduites des tangentes aux points A d'abscisse $\frac{2\pi}{3}$ et B d'abscisse π.

54 Soit la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par :

$$f(x) = -1{,}5\cos(x) + 1{,}5.$$

On admet que la fonction f est continue sur $[0 ; 2\pi]$.

1. Démontrer que f est positive sur $[0 ; 2\pi]$.
2. Donner la valeur de son maximum sur $[0 ; 2\pi]$.
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Déterminer par le calcul les abscisses des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}$.

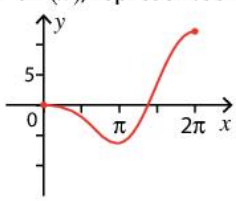
55

1. Montrer que la fonction sinus est convexe sur l'intervalle $[-\pi ; 0]$.
2. Montrer que la fonction sinus est concave sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

56 CALCULATRICE **Points d'intersection**

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = x\cos(x) - \sin(x)$, représentée ci-dessous.



1. Trouver une solution « évidente » de l'équation $f(x) = 0$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

b. À l'aide du tableur de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus grande des deux solutions.

4. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0 ; 2\pi]$ par :

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

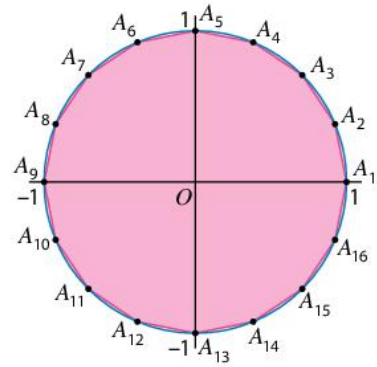
1. Justifier que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
2. Déduire de la partie A le tableau de variation de la fonction g.
3. Représenter à la calculatrice les courbes de f et g.
4. Conjecturer le nombre de points d'intersection des deux courbes sur l'intervalle $]0 ; 2\pi]$.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection entre les deux courbes. On donnera les valeurs arrondies au dixième.

57 **Des polygones réguliers pour une approximation**

Partie A. Aire d'un polygone

1. Cas particulier

On considère un polygone régulier à 16 côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



a. Quelle est la mesure en radian de l'angle $\theta = \widehat{A_1OA_2}$?

b. Exprimer A_2R en fonction de θ, où R est le pied de la hauteur issue de A_2 dans le triangle A_1OA_2.

c. En déduire l'aire du triangle A_1OA_2.

d. Conclure sur l'aire du polygone.

2. Cas général

a. Montrer que pour un polygone à n côtés $A_1A_2\ldots A_n$, la mesure θ, en radian, de l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ est $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$.

b. En déduire que l'aire du polygone est égale à :

$$A_n(\theta) = \pi\frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n(\theta)$.

d. Conclure.

Partie B. Périmètre d'un polygone

1. Montrer que, dans un polygone à n cotés $A_1A_2\ldots A_n$, la distance A_1A_2 peut s'écrire : $\sqrt{2 - 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$.
2. En déduire une formule pour le périmètre d'un polygone à n côtés.

Partie C. La meilleure approximation ? ALGO PYTHON

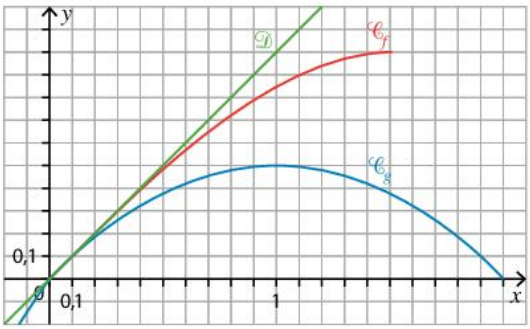
On a écrit les deux fonctions Python ci-dessous.

```
from math import pi,cos,sqrt,sin
def perimetre (k):
    n=1
    P=0
    while (2*pi-P)>10**(-k):
        P=n*sqrt(2-2*cos(2*pi/n))
        n=n+1
    return n,P

def aire (k):
    n=1
    A=0
    while (pi-A)>10**(-k):
        A=0.5*n*sin(2*pi/n)
        n=n+1
    return n,A
```

• Tester ces deux fonctions avec $k = 5$.
Qu'obtient-on ?

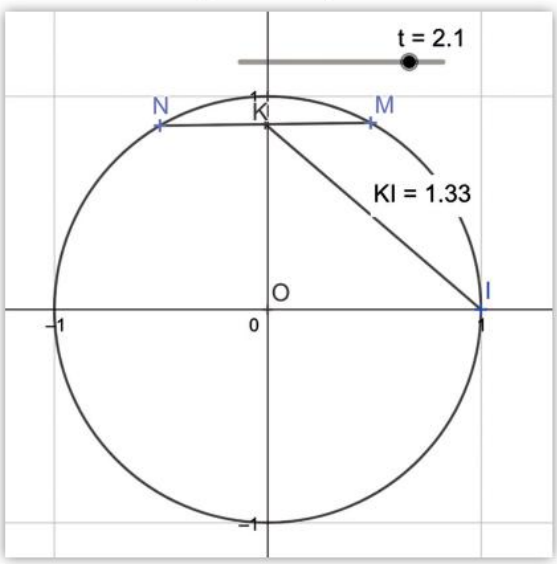
58 Sur le graphique ci-dessous, la fonction sinus est représentée sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On la note $\mathscr{C}_f$.
On a aussi fait figurer la parabole $\mathscr{C}_g$ et une droite $\mathscr{D}$.



1. Déterminer les expressions des fonctions h et g dont les représentations graphiques sont respectivement la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
2. Conjecturer un encadrement de $\sin(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
3. En déduire un encadrement de $x - \sin(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sin(x) = x$ à 0,01 près ?

59 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;I,J)$, on considère le cercle trigonométrique.
On note :
– M le point-image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique ;
– N le point-image de t sur le cercle trigonométrique, où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
On considère, de plus, le point K, milieu de $[MN]$.
On cherche la position de N sur le cercle trigonométrique telle que la distance IK soit minimale.

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Dans un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur t et créer les points I, M et N sur le cercle trigonométrique.

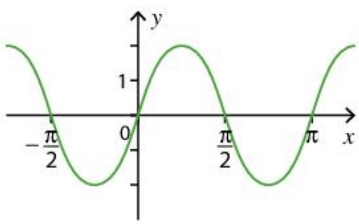


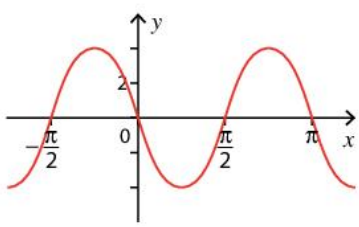
2. Quelles sont les coordonnées des points M, N et K ?
3. Justifier que, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, on a :
$$4IK^2 = 4 - 3\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t).$$
4. Soit f la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par :
$$f(t) = 4 - 3\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t).$$
On admet que $f'(t) = 2\sqrt{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$.
a. Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'équation :
$$\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$
b. Recopier et compléter le tableau de variation ci-dessous, après avoir justifié les variations de la fonction f sur $[-\pi\,;\pi]$.

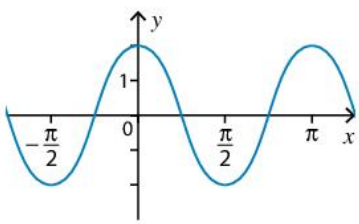
t	$-\pi$	…	…	π
$f(t)$	…	↘ …	↗ …	↘ …

5. Conclure sur la position de N sur le cercle trigonométrique pour que la distance IK soit minimale.

60 **Retrouver la bonne courbe**
Communiquer, raisonner
On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On sait que :
• g est la dérivée de f ;
• f est la dérivée de h ;
• la fonction h s'annule en 0.







• Associer chaque fonction f, g ou h à sa représentation graphique.

Exercices de synthèse

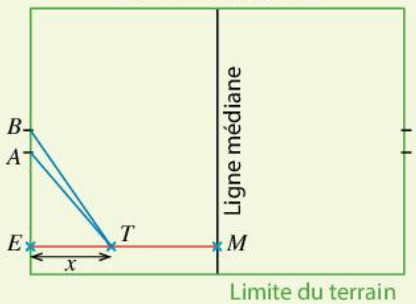
ZOOM SUR... les fonctions trigonométriques

Lorsqu'on doit résoudre des équations ou des inéquations trigonométriques, il faut bien repérer sur quel intervalle on travaille. On peut ensuite utiliser le cercle trigonométrique, y placer les points cités ou cherchés et surligner les ensembles considérés. Enfin, connaître les valeurs remarquables des sinus et cosinus est indispensable.

61 40 min

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-dessous), situé à l'extérieur du segment $[AB]$. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB), sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ maximal.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximal et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur (en mètre) ET que l'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :

$EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5{,}6$ m.

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x.

2. La fonction tangente, notée tan, est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Montrer que la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$.

Montrer que $\tan(\gamma) = \dfrac{5{,}6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ est maximale.

a. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;50]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \frac{765}{x}.$$

b. Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximal, puis déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

62 15 min QCM

Dans chacun des cas suivants, donner sans justification la seule réponse exacte parmi celles proposées.

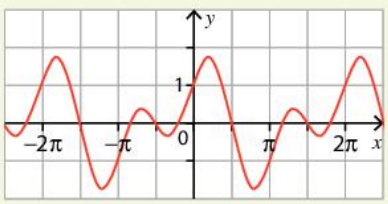
1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sin^2(2x) = 0{,}01$:

(a) n'admet aucune solution.
(b) admet une seule solution.
(c) admet exactement deux solutions.
(d) admet une infinité de solutions.

2. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$. Quand x tend vers 0 :

(a) $f(x)$ tend vers $+\infty$. (b) $f(x)$ tend vers $-\infty$.
(c) $f(x)$ tend vers 2. (d) $f(x)$ n'a pas de limite.

3. On considère la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



L'expression de $f(x)$ en fonction de x est :

(a) $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$
(b) $f(x) = \cos(2x) + \sin(x)$
(c) $f(x) = \cos(x) + \sin(2x)$
(d) $f(x) = 2\cos(x) - \sin(2x)$

63 45 min

Une publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un tee-shirt.

Elle dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1)$
et $g(x) = -e^{-x}\cos(x)$.
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A. Étude de la fonction f

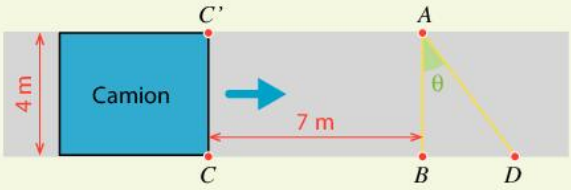
1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = e^{-x}(2\cos(x) - 1)$$
où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
b. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B. Aire du logo

Pour cette partie, il faut avoir traité les chapitres 7 et 8.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité graphique est de 2 centimètres.
1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right)e^{-x}.$$
On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(x) + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

64 45 min

Un lapin veut traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la largeur de la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km·h^{-1}. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue sa traversée en ligne droite, au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à … 30 km·h^{-1} !
L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-après.

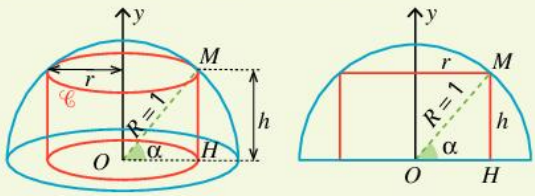


Le lapin part du point A en direction du point D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$, avec $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).

1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3. a. La fonction tangente, notée tan, est définie sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
Montrer que la dérivée de la fonction tangente est la fonction $\theta \mapsto \frac{1}{\cos^2(\theta)}$.
b. Étudier le signe de la fonction f et conclure.

65 40 min

Dans cet exercice, l'unité est le mètre.



On considère un cylindre droit de hauteur h, inscrit dans une demi-sphère de rayon $R = 1$. Le cylindre et la demi-sphère ont le même plan de base $\mathscr{P}$ et le même axe de symétrie (Oy). La demi-sphère et le cylindre se coupent selon un cercle $\mathscr{C}$ de rayon r. Soient M un point de ce cercle et H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$.
On désigne par α la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOM}$.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

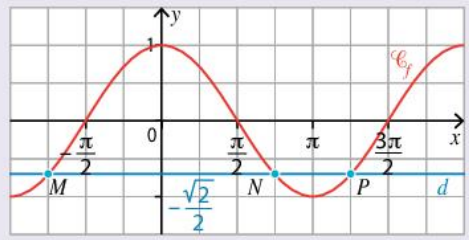
1. a. Exprimer la hauteur h et le rayon du cylindre en fonction de α.
b. Démontrer que le volume du cylindre inscrit dans cette demi-sphère s'exprime à l'aide de α par la fonction f, définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :
$$f(\alpha) = \pi\left(\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)\right).$$
2. a. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
b. Montrer qu'il existe une valeur α_0 de α pour laquelle f admet un maximum et que $\sin(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. En déduire les dimensions h et r du cylindre de plus grand volume inscrit dans cette demi-sphère et calculer la valeur exacte en m^3 de son volume.

Consolider ses fondamentaux

66 Fonction cosinus

On a tracé ci-dessous, dans un repère orthogonal du plan, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction cosinus et la droite d d'équation $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'intervalle $[-\pi ; 2\pi]$.

On note M, N et P les points d'intersection de d et de $\mathscr{C}_f$.



Questions Va piano

1. Déterminer graphiquement les coordonnées des points M, N et P, puis placer sur le cercle trigonométrique les points-images de leurs abscisses.
2. Résoudre l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi ; \pi]$, puis sur $[0 ; 2\pi]$.

Vérifier le résultat à l'aide de la courbe ci-dessus.

3. Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$, puis sur $[0 ; 2\pi]$, l'inéquation $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questions Moderato

1. Déterminer par le calcul les coordonnées des points M, N et P.
2. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Vérifier les résultats à l'aide d'un logiciel de géométrie ou de la calculatrice.

3. Résoudre l'inéquation $\sqrt{2} + 2\cos(x) \geqslant 0$:

a. sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$;

b. sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Questions Allegro

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (MN).
2. On note Q et R les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (QR).

Se préparer aux études supérieures

67 Fonction tangente Approfondissement

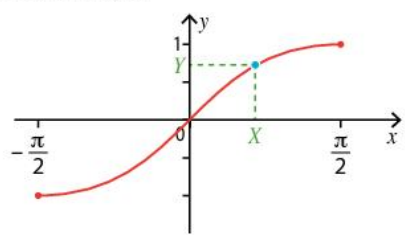
La fonction tangente, notée tan, est définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

1. Donner les valeurs interdites de la fonction tan sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
2. Justifier que la fonction tangente est impaire.
3. Justifier que la fonction tangente est périodique et donner sa « plus petite » période.
4. Justifier que l'étude de la fonction tangente peut se réduire à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Étudier la fonction tangente, c'est-à-dire donner sa dérivée, son tableau de variation et l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0.
6. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(x) \leqslant \frac{4x}{\pi}$.

68 Une fonction réciproque

On considère la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ ainsi que sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



1. Justifier que, pour tout réel $Y \in [-1 ; 1]$, il existe un unique réel $X \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $Y = \sin(X)$.
2. On considère alors la fonction notée f, définie sur $[-1 ; 1]$ par $Y \mapsto X$.

Soit $Y \in [-1 ; 1]$. Montrer que $\sin(f(Y)) = Y$.

No problem!

1 Looking for the sine and cosine

Using the sine and cosine, we can find the coordinates of points on circles of any size.

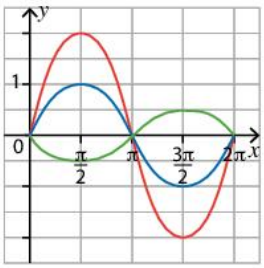
1. Using the rectangular coordinate system, draw two concentric circles with center O (the origin): the inner circle has radius 1, the outer has radius 3.

2. The angle θ designates point P on the unit circle and point Q on the larger circle.
Give the coordinates of points P and Q in each case.

a. $\theta = \frac{\pi}{4}$ **b.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

2 Comparing graphs

The graphs of $y = \sin(t)$; $y = 2\sin(t)$ and $y = -0.5\sin(t)$ are drawn using the rectangular coordinate system below for $0 \leq t \leq 2\pi$.



1. How are these graphs similar?
2. How are they different?

3 Blood pressure

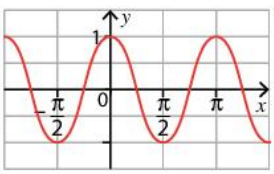
A person's blood pressure P (in millimetre of mercury, mmHg) is given for time t in seconds by:

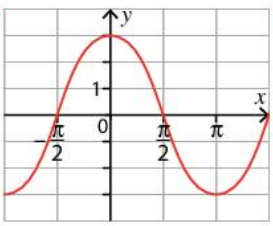
$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right).$$

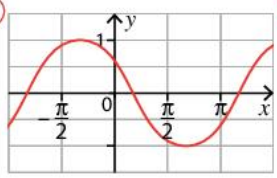
1. Graph this function on your calculator (choose the right window!) and state the period.
2. During the first second, give the interval when the blood pressure is greater than 90 mmHg.

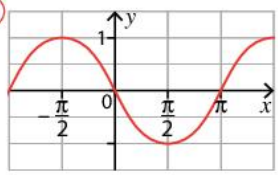
4 Match the graphs! PAIR WORK

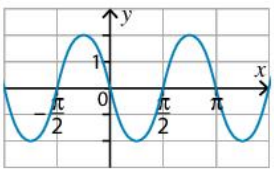
Try to match each graph from (1) to (4) with the graph of the corresponding derivative from (a) to (d).
Justify your choice to your classmate.

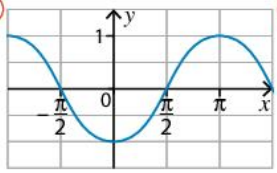
(1)


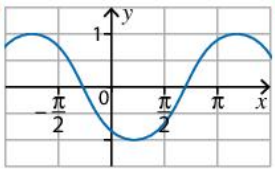
(2)


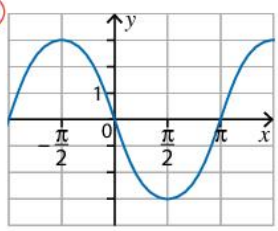
(3)


(4)


(a)


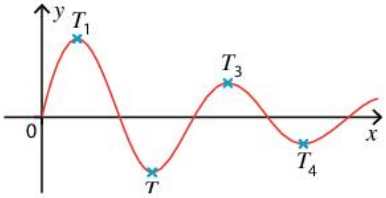
(b)


(c)


(d)


Final exam Past papers

The diagram shows the curve $y = 10e^{-\frac{1}{2}x}\sin(4x)$ for $x \geq 0$.
The stationary points are labeled $T_1, T_2, T_3 \ldots$ as shown.



1. Find the x-coordinates of T_1 and T_2, giving each x-coordinate correct to three decimal places.
2. It is given that the x-coordinate of T_n is greater than 25. Find the smallest possible value of n.

CHAPITRE

6 Fonction logarithme

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Additionner pour mieux multiplier

La méthode de Napier consiste à lire les nombres ℓ_a et ℓ_b correspondant à a et b, à calculer la somme $\ell_a + \ell_b$, puis à lire le produit ab correspondant à $\ell_a + \ell_b$.

a	ℓ_a
b	ℓ_b
…	…
ab	$\ell_a + \ell_b$

Le nombre ℓ_a s'appelle le logarithme de a (du grec *logos* : rapport et *arithmos* : nombre).
En 1624, le mathématicien anglais Henry Briggs, qui travaille en collaboration avec Napier, a l'idée d'associer au nombre 10 le nombre 1 et construit ainsi la première table de logarithme décimal (qu'il note Log), publiée dans son *Arithmetica Logarithmica*.

N	Log
0	_____
1	0,0000000
2	0,30103000
3	0,47712125
4	0,60205999
5	0,69897000
6	0,77815125
7	0,84509804
8	0,90308999
9	0,95424251
10	1,000

John Napier

John Napier (1550-1617) est un mathématicien, astronome et physicien écossais, connu en France sous le nom de Jean Neper. À la fin du XVI^e siècle, le développement de la navigation et de l'astronomie confrontent les hommes à de pénibles calculs. Pour simplifier ces calculs, Napier publie en 1614 une table de correspondance qui permet de calculer un produit ab.

En utilisant la table, vérifier la méthode de calcul d'un produit avec les nombres 2 et 3.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Systèmes d'inéquations

Dans chacun des cas suivants, représenter sur une droite graduée l'ensemble des réels x vérifiant le système d'inéquations données, puis déterminer cet ensemble.

1. $\begin{cases} x < -\dfrac{2}{3} \\ x > -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ -x + 2 > 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ -5x + 1 < 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

2 Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions dont les expressions sont données ci-dessous.

1. $f(x) = \dfrac{5x - 1}{5 - x}$
2. $g(x) = \sqrt{2x - 5}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

3 Fonctions réciproques

Recopier et compléter les équivalences ci-dessous.

1. Quels que soient $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $x^2 = y \Leftrightarrow x = \ldots$
2. Quels que soient $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $x^2 = y \Leftrightarrow x = \ldots$
3. Quels que soient les réels x et y,
$$x - 6 = y \Leftrightarrow x = \ldots$$
4. Quels que soient les réels $x \geqslant 3$ et $y \geqslant 0$,
$$(x - 3)^2 = y \Leftrightarrow x = \ldots$$

4 Propriétés de l'exponentielle

Écrire sous la forme e^a, où a est un réel.

1. $e^0 \times e^2$
2. $e \times e^{-1}$
3. $e^5 \times e^2$
4. $\dfrac{e^{-4}}{e^7}$
5. $e^{-2} \times \dfrac{e^5}{e^{-3}}$
6. $e^3\left(e - e^{-2}\right)$
7. $\left(e^{-4}\right)^3$
8. $\sqrt{e^{10}}$
9. $\dfrac{e}{\sqrt{e}}$
10. $\dfrac{e^6 \times \left(e^{-2}\right)^2}{e^{-2}}$

5 Simplification

Simplifier chacune des expressions suivantes.

1. $A = e^{3x-2} \times e^4$
2. $B = \dfrac{e^5}{e^{8x}}$
3. $C = \dfrac{1}{e^{2x}} \times \dfrac{1}{e^{-4}}$
4. $D = \dfrac{e^{3x-2}}{\left(e^x\right)^2}$

6 Limites

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1. $f(x) = (x^3 + 5x + 1)e^x$
2. $g(x) = e^x - x$
3. $h(x) = e^{-x} - x$
4. $k(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

7 Dérivation

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (3x - 1)e^x$
2. $g(x) = \dfrac{-2x}{e^x}$
3. $h(x) = \dfrac{5}{e^x + 2}$
4. $i(x) = e^{6x}$

8 Équations et inéquations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
   a. $e^x = 0$ b. $e^x = 1$
   c. $e^{-x} = 0$ d. $e^{-x} = 1$
   e. $e^x = -2$ f. $e^x > 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
   a. $e^{-2x+10} = 1$ b. $2e^x + 1 < 0$
   c. $e^{x+10} = e^{x^2-10}$ d. $e^{-3x+4} < e^{x+2}$
   e. $e^{-x+5} - 1 \geqslant 0$ f. $(x + 4)\left(e^x - 1\right) < 0$

Pour construire le cours

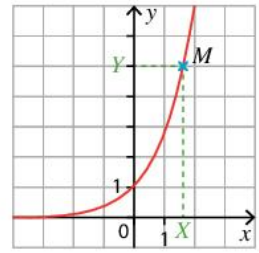
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Découvrir une nouvelle fonction

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Introduire la fonction logarithme népérien.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est tracée dans le repère orthonormé ci-contre.



1. Justifier par un théorème du cours que, pour tout réel $Y > 0$, il existe un unique réel X tel que $Y = e^X$.
2. Reproduire la figure ci-dessus dans un logiciel de géométrie dynamique en commençant par créer un curseur Y et le point d'ordonnée Y sur la courbe.
3. **a.** Expliquer pourquoi on peut définir une nouvelle fonction qui, à Y, associe le réel X.
   b. Préciser les images respectives de 1 et de e par cette fonction.
4. Comment tracer la courbe représentative de cette fonction à partir de la courbe de la fonction exponentielle ? Tracer cette courbe avec le logiciel.
5. Conjecturer l'ensemble de définition de cette fonction, ses variations sur cet ensemble, ses limites aux bornes de cet ensemble et son signe.

Situation 2 Découvrir la relation fonctionnelle du logarithme et ses conséquences

Objectif
Introduire les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.

On donne ci-contre un extrait de la table de logarithmes, établie par John Napier (voir p. 178). Elle possède la propriété suivante, appelée relation fonctionnelle : « le produit de deux nombres de la colonne A correspond à la somme des deux nombres correspondants de la colonne B ».

A	B
0,01	…
0,1	…
0,5	…
1	…
1,5	…
2	0,693147
3	1,098612
4	1,386294
5	1,609438
6	1,791759
10	2,302585
11	2,397895
12	…
13	2,564949
14	2,639057
15	…
180	5,192957
182	5,204007
183	5,209486
2^9	…

1. **a.** Vérifier cette propriété avec les nombres 2 et 3 de la colonne A.
   b. Quel nombre de la colonne B correspond au nombre 12 de la colonne A ? au nombre 15 de la colonne A ?
2. **a.** Lorsqu'on calcule le quotient de deux nombres de la colonne A, quelle opération doit-on effectuer sur les deux nombres correspondants de la colonne B ? Vérifier avec les nombres 10 et 2.
   b. Quels sont les nombres de la colonne A qui correspondent aux nombres 1,5 ; 1 et 0,5 de la colonne B ?
3. **a.** Lorsqu'on calcule le carré d'un nombre de la colonne A, quelle opération doit-on effectuer sur le nombre correspondant de la colonne B ? Vérifier avec le nombre 2.
   b. Quel nombre de la colonne B correspond aux nombres 2^9 ; 0,01 ; 0,1 de la colonne A ?
4. L'intérêt de la table de Napier était d'effectuer des calculs difficiles pour l'époque. Sans poser la multiplication et sans utiliser de calculatrice, donner le résultat de 13×14.
5. Les nombres de la colonne B sont les logarithmes népériens des nombres de la colonne A. On note $\ln(a)$ le logarithme népérien d'un réel a strictement positif.

Conjecturer les expressions de $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, $\ln\left(\sqrt{a}\right)$ et $\ln\left(a^p\right)$, où b est un réel strictement positif et p est un entier naturel, en fonction de $\ln(a)$ et $\ln(b)$.

Situation 3 Découvrir une dérivée

Objectif
Mettre en évidence la dérivée des fonctions logarithmes.

On se propose de rechercher les fonctions f définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ telles que, pour tous réels x et y strictement positifs, $f(x) + f(y) = f(xy)$.
Soit f une telle fonction.

1. Démontrer que $f(1) = 0$.
2. Soient y un réel de $]0 ; +\infty[$ et les fonctions $h : x \mapsto f(x) + f(y)$ et $g : x \mapsto f(xy)$.
   a. Calculer $h'(x)$ et $g'(x)$.
   b. En déduire que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $yf'(xy) = f'(x)$.
3. En prenant $x = 1$, déduire de ce qui précède que, pour tout y de $]0 ; +\infty[$, $f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y}$.

Les fonctions cherchées vérifient donc $f(1) = 0$ et leur dérivée est de la forme $x \mapsto \dfrac{k}{x}$, avec k réel.
L'exercice 77 p. 201 permet de démontrer que ce sont les seules.

Situation 4 Mesurer la magnitude d'un séisme

Objectif
Utiliser la fonction logarithme népérien.

Lors d'un séisme, on peut mesurer l'énergie sismique, c'est-à-dire l'énergie dispersée sous forme d'ondes sismiques.
On appelle magnitude sur l'échelle ouverte de Richter, que l'on note M, le nombre défini par :

$$M = \frac{2}{3}\log(E) - 2{,}88$$

où E désigne l'énergie sismique exprimée en joule et log la fonction logarithme décimal, définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

1. L'un des plus puissants séismes enregistrés en France métropolitaine est celui dit de Lambesc (Bouches-du-Rhône) en 1909. L'énergie sismique estimée de ce séisme était égale à $4{,}2 \times 10^{13}$ joules. Quelle était sa magnitude ?
2. Pour illustrer l'échelle de Richter et comparer les magnitudes M_1 et M_2 de deux séismes en fonction des énergies E_1 et E_2 respectivement dissipées par chacun d'entre eux, un sismologue a créé la feuille de calcul ci-contre sur un tableur.
   a. Résumer par une phrase la ligne 8.
   b. Quelle formule le sismologue a-t-il écrite dans la cellule B2, puis recopiée jusqu'en B10, pour obtenir ces résultats ?
3. Pourquoi parle-t-on d'échelle « ouverte » de Richter ?
4. Au Chili, en 1960, a eu lieu un séisme de magnitude 9,5, soit la plus forte magnitude jamais calculée. On estime l'énergie dissipée lors de l'explosion de la bombe nucléaire larguée sur Hiroshima en 1945 à 60 térajoules (1 térajoule = 10^{12} joules).
   Comparer les énergies dissipées lors de ces deux événements.

	A	B
	Rapport des énérgies	**Différence des magnitudes**
1	**E_2/E_1**	**$M_2 - M_1$**
2	2	0,2
3	5	0,5
4	10	0,7
5	50	1,1
6	100	1,3
7	500	1,8
8	1 000	2,0
9	1 000 000	4,0
10	1 000 000 000	6,0

1. Fonction logarithme népérien

1. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Propriété et définitions

DÉMO p. 180 et 194

- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Cette solution se note $x = \ln(a)$ et s'appelle le **logarithme népérien** de a.

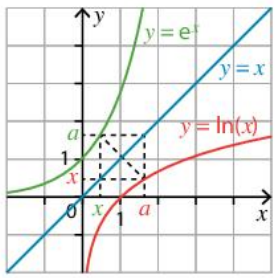
- La fonction qui, à tout réel $a > 0$, associe le réel $\ln(a)$ s'appelle la **fonction logarithme népérien.**

C'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0 ; +\infty[$ et elle est notée ln.

Propriété

DÉMO en ligne

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque

En sciences, on utilise aussi la fonction logarithme décimal, notée log, définie par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

On définit de même, pour tout réel a strictement positif, la fonction logarithme de base a par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Ainsi, la fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e.

Propriétés

DÉMO en ligne

- Pour tout réel $b > 0$ et pour tout réel a, $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.
- Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

2. Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété (relation fonctionnelle)

DÉMO p. 194

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Propriétés (conséquences de la relation fonctionnelle)

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

DÉMO p. 194 et 195

- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- Pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$.
- $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

Méthode 1 Déterminer un ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x) = \ln(3x - 5)$
2. $g(x) = \ln\left(-x^2 - 5x + 6\right)$

Solution commentée

1. $\ln(3x - 5)$ existe si et seulement si $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$. L'ensemble de définition de f est $\left]\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.
2. $\ln\left(-x^2 - 5x + 6\right)$ existe si et seulement si $-x^2 - 5x + 6 > 0$. Ce trinôme est du signe de $a = -1$ sauf entre ses racines -6 et 1. L'ensemble de définition de g est $]-6 ; 1[$.

EXERCICE 36 p. 196

Méthode 2 Résoudre des équations avec ln

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 4$
2. $e^{2x+7} = 2$
3. $\ln(x) = -5$
4. $\ln(-3x + 5) = -1$

Solution commentée

1. Par définition, $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$. La solution est $\ln(4)$.
2. $e^{2x+7} = 2 \Leftrightarrow 2x + 7 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2) - 7}{2}$. La solution est $\frac{\ln(2) - 7}{2}$.
3. Pour $x > 0$, $\ln(x) = -5 \Leftrightarrow x = e^{-5}$. La solution est e^{-5}.
4. $\ln(-3x + 5)$ existe si et seulement si $-3x + 5 > 0 \Leftrightarrow -3x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$.

   Pour $x < \frac{5}{3}$, $\ln(-3x + 5) = -1 \Leftrightarrow -3x + 5 = e^{-1} \Leftrightarrow -3x = e^{-1} - 5 \Leftrightarrow x = \frac{e^{-1} - 5}{-3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} - \frac{e^{-1}}{3}$.

   La solution est $\frac{5}{3} - \frac{e^{-1}}{3}$, qui s'écrit aussi $\frac{5}{3} - \frac{1}{3e}$.

EXERCICE 3 p. 194

Méthode 3 Transformer des écritures

1. Démontrer que $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16)$ est un nombre entier.
2. Démontrer que $\ln(48) - 3\ln(2) = \ln(6)$.
3. Démontrer que $\ln\left(\sqrt{5} - 1\right) + \ln\left(\sqrt{5} + 1\right) = 2\ln(2)$.
4. Calculer $\ln\left(e^2\sqrt{e}\right)$, puis $\ln\left(\sqrt{e}\right) - 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.
5. Soit $f(x) = x\ln(x)$. Calculer en fonction de e les réels $f\left(\frac{1}{e}\right)$, $f\left(\sqrt{e}\right)$ et $f\left(e\sqrt{e}\right)$.

Solution commentée

1. $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16) = \ln\left(\frac{8 \times 4}{2 \times 16}\right) = \ln\left(\frac{32}{32}\right) = \ln(1) = 0$. C'est un nombre entier.
2. $\ln(48) - 3\ln(2) = \ln(48) - \ln\left(2^3\right) = \ln(48) - \ln(8) = \ln\left(\frac{48}{8}\right) = \ln(6)$.
3. $\ln\left(\sqrt{5} - 1\right) + \ln\left(\sqrt{5} + 1\right) = \ln\left(\left(\sqrt{5} - 1\right) \times \left(\sqrt{5} + 1\right)\right) = \ln\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2\right) = \ln(4) = 2\ln(2)$.
4. • $\ln\left(e^2\sqrt{e}\right) = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(\sqrt{e}\right) = 2\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
   • $\ln\left(\sqrt{e}\right) - 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln(e) - 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln(e) + 2\ln(e) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.
5. • $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln(e) = -\frac{1}{e}$
   • $f\left(\sqrt{e}\right) = \sqrt{e}\ln\left(\sqrt{e}\right) = \sqrt{e} \times \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{\sqrt{e}}{2}$
   • $f\left(e\sqrt{e}\right) = e\sqrt{e}\ln\left(e\sqrt{e}\right) = e\sqrt{e}\left(\ln(e) + \ln\left(\sqrt{e}\right)\right) = e\sqrt{e}\left(\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e)\right) = \sqrt{e}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e\sqrt{e}$

EXERCICE 10 p. 194

2. Variations et limites de la fonction ln

1. Dérivée et variations

Propriétés

DÉMO p. 186

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x appartenant à I, $u(x) > 0$.

La fonction $\ln \circ u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

$f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$. Alors, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Propriété

DÉMO p. 196

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

DÉMO p. 196

Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$

En particulier, on a :

- $\ln(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in]0 ; 1]$
- $\ln(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in [1 ; +\infty[$

2. Limites

Propriétés

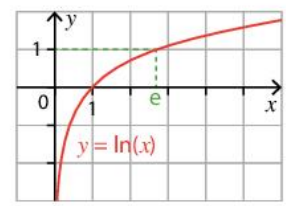
DÉMO p. 186 et 187

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Conséquences

- La courbe de la fonction ln admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- Le tableau de variation de la fonction ln est le suivant.

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



Propriétés (croissances comparées)

DÉMO p. 187

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$.

Méthode 1 Étudier le sens de variation d'une fonction

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Solution commentée

$f = \dfrac{u}{v}$, où $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$; alors $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, avec $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

Or, pour tout $x > 0$, $1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant \text{e}$.

Donc, pour tout $x \in]0 ; \text{e}]$, $f'(x) \geqslant 0$ et, pour tout $x \in [\text{e} ; +\infty[$, $f'(x) \leqslant 0$.

La fonction f est croissante sur $]0 ; \text{e}]$ et décroissante sur $[\text{e} ; +\infty[$.

EXERCICE 28 p. 196

Méthode 2 Résoudre une inéquation avec ln

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5x + 4) \geqslant 9$.

Solution commentée

$\ln(5x + 4)$ existe si et seulement si $5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{5}$.

Pour $x > -\dfrac{4}{5}$, $\ln(5x + 4) \geqslant 9 \Leftrightarrow 5x + 4 \geqslant \text{e}^9 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\text{e}^9 - 4}{5} \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{4}{5} + \dfrac{\text{e}^9}{5}$. Donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{4}{5} + \dfrac{\text{e}^9}{5} ; +\infty\right[$.

EXERCICE 40 p. 196

Méthode 3 Déterminer une limite avec la fonction ln

Soient g et h les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x + 1}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$.

1. Étudier la limite de $g(x)$ en $+\infty$.
2. Étudier la limite de $h(x)$ en 0.

Solution commentée

1. La forme est indéterminée : on transforme l'écriture de $g(x)$ pour faire apparaître $\dfrac{\ln(x)}{x}$.

$g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x + 1} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{x}{x + 1}$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

2. La forme est indéterminée, on factorise par $\dfrac{1}{x}$: $h(x) = \dfrac{1}{x}(1 + x\ln(x))$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et, par suite, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x\ln(x)) = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$.

EXERCICE 26 p. 195

Méthode 4 Étudier les limites d'une fonction composée

Déterminer les limites en -1 et $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x + 1}\right)$.

Solution commentée

On pose $X = \dfrac{1}{x+1}$. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x + 1}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 41 p. 197

Comprendre une démonstration

On présente les démonstrations des propriétés suivantes. Les lire attentivement, puis répondre aux questions.

- (P_1) La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
- (P_2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

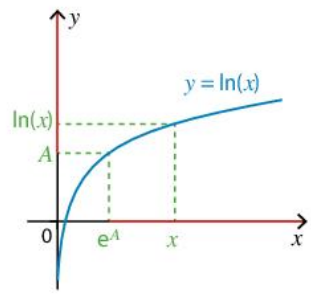
Démonstrations

- **Propriété (P_1)**

On admet que la fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$.
f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = x\ln'(x)$.
Or $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

- **Propriété (P_2)**

On doit démontrer que tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x suffisamment grand.
Soit A un réel strictement positif.
Si $x > \mathrm{e}^A$, alors $\ln(x) > A$, donc $\ln(x) \in]A ; +\infty[$.
Pour $x > \mathrm{e}^A$, l'intervalle $]A ; +\infty[$ contient donc bien toutes les valeurs de $\ln(x)$.



1 **Propriété (P_1)**

a. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = x\ln'(x)$.
b. Justifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x$.
c. Expliquer comment on obtient le résultat de la dernière ligne.

2 **Propriété (P_2)**

a. Rappeler la définition de la limite infinie d'une fonction en $+\infty$.
b. Justifier que si $x > \mathrm{e}^A$, alors $\ln(x) > A$.
c. Comment a-t-on traduit « pour x suffisamment grand » dans cette démonstration ?

Rédiger une démonstration

On souhaite démontrer les propriétés suivantes.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

Pour tout entier naturel $n > 1$: (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ (5) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

En utilisant les indications suivantes, rédiger une démonstration des propriétés.

• **Propriété (1)**

Poser $X = \dfrac{1}{x}$.

Préciser la limite de X lorsque x tend vers 0, avec $x > 0$.

Exprimer x en fonction de X, puis $\ln(x)$ en fonction de $\ln(X)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)$.

• **Propriété (2)**

Poser $X = \ln(x)$.

Préciser la limite de X lorsque x tend vers $+\infty$.

Exprimer x, puis $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en fonction de X.

Rappeler $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X}$ et conclure.

• **Propriété (3)**

Poser $X = \dfrac{1}{x}$.

Préciser la limite de X lorsque x tend vers 0, avec $x > 0$.

Exprimer x, puis $x\ln(x)$ en fonction de X et conclure.

• **Propriété (4)**

Pour $n > 1$, on écrit $\dfrac{\ln(x)}{x^n} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$.

Appliquer alors la règle de la limite d'un produit.

• **Propriété (5)**

Pour $n > 1$, on écrit $x^n \ln(x) = x^{n-1} \times (x\ln(x))$.

Appliquer alors la règle de la limite d'un produit.

Utiliser différents raisonnements

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée P :

« $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel. »

On raisonne par l'absurde.

1. Traduire la propriété contraire de P.
2. Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour aboutir à une contradiction.

Raisonner par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non$P$ (proposition contraire de P) est vraie et on montre qu'elle conduit à une contradiction.

Carte mentale

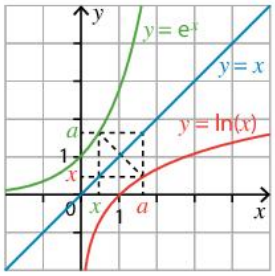
Fonction logarithme

Appliquer la définition et les propriétés du logarithme

- La fonction **logarithme népérien** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0 ; +\infty[$ et est notée **ln**.

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$
- Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n :

- $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Étudier les variations de la fonction ln

- **Dérivées**

Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Si $u(x) > 0$, $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

- **Variations**

x	0		1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

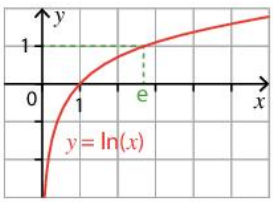
Résoudre des équations ou des inéquations

Soient a et b des réels strictement positifs.

- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$.
- $\ln(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in]0 ; 1]$.
- $\ln(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in [1 ; +\infty[$.

Déterminer des limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- La courbe de la fonction ln admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$.



- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$

CORRIGÉS DES EXERCICES

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

1 $\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ est égal à :

(a) $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ (b) $-\ln(6)$ (c) $\ln(6)$

2 $\ln(e)+\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est égal à :

(a) 0 (b) 1 (c) 2

3 $2\ln\left(e^2\right)-\ln\left(5\sqrt{e}\right)$ est égal à :

(a) $\frac{9}{2}-\ln(5)$

(b) $\ln\left(2e^2-5\sqrt{e}\right)$

(c) $\ln\left(\frac{e^3\sqrt{e}}{5}\right)$

4 Pour tout réel $x \neq 0$, l'équation $\ln\left(x^2\right)=0$ a pour ensemble des solutions :

(a) $\mathcal{S}=\{1\}$ (b) $\mathcal{S}=\mathbb{R}$ (c) $\mathcal{S}=\{-1;1\}$

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(-2x+4) \leqslant 1$ est :

(a) $\mathcal{S}=\left[\frac{3}{2};2\right[$

(b) $\mathcal{S}=\left[2-\frac{e}{2};2\right[$

(c) $\mathcal{S}=\left]-\infty;\frac{4-e}{2}\right]$

6 La dérivée de la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$, a pour expression :

(a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $f'(x)=\frac{1}{2x}$

(c) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

7 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-\ln(x)+1$.

Sa limite en $+\infty$ est :

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$.

8 Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

$f(x)$ peut être égal à :

(a) $\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$ (b) $\frac{\ln(x)}{x}$ (c) $\frac{\ln(x)+3}{x}$

9 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(\ln(x))^2.$$

On peut affirmer que :

(a) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

(b) pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)=2\ln(x)$.

(c) $f'(1)=0$

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 L'égalité $\ln\left(x^2\right)=2\ln(x)$ est vraie pour tout réel $x \neq 0$.

2 Pour tout réel $x>0$:

$$\ln\left(e^x\sqrt{x}\right)=x+\frac{1}{2}\ln(x).$$

3 Pour tout réel $x>0$:

$$x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right).$$

4 L'équation $x\ln(x)=0$ a pour solutions 0 et 1.

5 L'équation $e^{-4x+1}=5$ a pour solution $\frac{-\ln(5)-1}{4}$.

6 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln\left(-x^2+3x\right)<\ln(2)$ est $]1;2[$.

7 La dérivée de la fonction f, définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$, a pour expression :

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}.$$

8 La fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-7x$, est convexe.

9 $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2+x+1\right)=0$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\ln(x)-x^2\right)=+\infty$

11 Si u est une fonction strictement positive et décroissante sur un intervalle I, alors la fonction $\ln(u)$ est croissante sur I.

TP 1 La méthode de Briggs ALGO PYTHON

Objectif
Calculer le logarithme décimal d'un nombre réel.

Les tables construites par Napier et Briggs (voir p. 178) sont telles que « au produit de deux nombres de la colonne de gauche correspond la somme de deux nombres de la colonne de droite. »
On donne ci-contre un exemple de table qui utilise cette correspondance (m et p sont des entiers naturels). Les nombres de la colonne de gauche sont les termes d'une suite géométrique, ceux de droite sont les termes d'une suite arithmétique.

1	0
10^1	1
10^2	2
10^3	3
…	…
10^p	p
…	…
$10^m \times 10^p$	$m+p$

1 **a.** Démontrer que si une suite (u_n) est géométrique et à termes strictement positifs, alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$.

b. Démontrer que si une suite (v_n) est arithmétique alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{v_{n-1} + v_{n+1}}{2}$.

2 La méthode de Briggs est racontée ci-dessous par Leonhard Euler dans son livre *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1748). Elle permet de déterminer une valeur approchée du logarithme décimal d'un nombre réel strictement positif X, noté ici l_X.

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, et proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 et 10, dont les logarithmes font 0 et 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, et on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.

$A = 1{,}000000$	$l_A = 0{,}0000000$	
$B = 10{,}000000$	$l_B = 1{,}0000000$	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3{,}162277$	$l_C = 0{,}5000000$	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5{,}623413$	$l_D = 0{,}7500000$	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4{,}216964$	$l_E = 0{,}6250000$	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4{,}869674$	$l_F = 0{,}6875000$	$G = \sqrt{EF}$
$G = 5{,}232991$	$l_G = 0{,}7187500$	

Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver $Z = 5{,}000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en supposant la base logarithmique = 10.

Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à peu près.

Voici une illustration de la méthode :
5 est entre $A = 1$ et $B = 10$ avec $l_A = 0$ et $l_B = 1$.
$\dfrac{l_A + l_B}{2} = 0{,}5 = l_C$ correspond à $C = \sqrt{AB} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$.
5 est entre $C = \sqrt{10}$ et $B = 10$, $\dfrac{l_B + l_C}{2} = 0{,}75 = l_D$ correspond à $D = \sqrt{BC}$.

Poursuivre le procédé pour retrouver l_E, l_F et l_G.

3 L'algorithme en Python correspondant à la méthode décrite ci-dessus est donné ci-contre.
Recopier et compléter l'algorithme de façon à calculer le logarithme décimal d'un réel X compris entre 1 et 10, à 10^{-6} près.

```
1  from math import sqrt
2  def Briggs(X):
3      A=1
4      B=10
5      lA=...
6      lB=...
7      while B-X ..........:
8          if X<sqrt(A*B):
9              ...=sqrt(A*B)
10             ...=(lA+lB)/2
11         else:
12             ...=sqrt(A*B)
13             ...=(lA+lB)/2
14     return ...
```

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour calculer une racine carrée, on utilise la commande sqrt.
  Elle se trouve dans la bibliothèque math.
  On commence le programme par from math import sqrt.

TP 2 Avec un paramètre LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Déterminer le nombre de solution(s) d'une équation avec paramètre.

Soit a un nombre réel strictement positif. On donne l'équation $(E_a) : \ln(x) = ax^2$.

1. **a.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer les courbes de la fonction logarithme népérien et de la fonction $x \mapsto ax^2$.
   b. Conjecturer, suivant les valeurs du réel a, le nombre de solutions de l'équation (E_a).
2. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel a pour lequel l'équation (E_a) admet une unique solution.
3. Pour quelles valeurs de a l'équation (E_a) admet-elle exactement deux solutions ? Justifier.

TP 3 Courbes tangentes LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Découvrir la notion de courbes tangentes.

Deux courbes sont tangentes si elles ont un point commun et la même tangente en ce point. Soit a un réel non nul. On cherche à savoir pour quelles valeurs de a la courbe $\mathcal{P}$, d'équation $y = x^2$, et la courbe $\mathcal{C}_a$, d'équation $y = \ln(ax)$, sont tangentes.

1. Conjecturer la réponse au problème avec un logiciel de géométrie dynamique.
2. Démontrer la conjecture.

TP 4 Limite d'une suite TABLEUR

Objectif Étudier une suite.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Calculer les vingt premiers termes de cette suite à l'aide du tableur. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
   b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   c. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$ pour tout entier naturel n.
   a. Conjecturer la nature de la suite (v_n) à l'aide du tableur.
   b. Démontrer cette conjecture. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (u_n).

Boîte à outils

Tableur

- Pour prendre la racine carrée du contenu de la cellule A1, saisir `=RACINE(A1)`.
- Pour prendre le logarithme népérien du contenu de la cellule A1, saisir `=LN(A1)`.

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Exprimer en fonction de $\ln(3)$ chacun des nombres suivants.

1. $\ln(9)$ 2. $\ln(3e)$ 3. $\ln\left(3^{-10}\right)$
4. $\ln(6)-\ln(2)$ 5. $\ln\left(27\sqrt{e}\right)$

2 Calculer les expressions suivantes.

1. $\ln\left(e^{3}\right)-3\ln\left(e^{-1}\right)$
2. $\ln\left(e^{-4}\right)\times\ln(e)^{2}$
3. $\ln\left(\left(e^{-5}\right)^{2}\right)+e^{3\ln(2)}$

3 Déterminer le signe des nombres suivants sans calculatrice.

1. $\ln(0{,}1)$
2. $\ln\left(e^{-2}\right)$
3. $\ln\left(\frac{513}{512}\right)$
4. $\ln(3)-\ln(5)$
5. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\ln\left(\frac{8}{3}\right)+\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

4 Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant sans calculatrice.

• $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ • $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ • $\ln(5)$ • $-\ln(5)$ • $\ln\left(\frac{4}{5}\right)$ • $2\ln(2)$

5 Déterminer les fonctions dérivées sur I des fonctions suivantes, données par leurs expressions.

1. $f(x)=-7\ln(x)+6$, avec $I=]0\,;+\infty[$.
2. $g(x)=x\ln(x)$, avec $I=]0\,;+\infty[$.
3. $k(x)=\ln\left(e^{x}+3\right)$, avec $I=\mathbb{R}$.

6 Résoudre les équations suivantes.

1. $5-\ln(x)=2$ dans $]0\,;+\infty[$.
2. $\ln(x-1)=5$ dans $]1\,;+\infty[$.
3. $\ln(2x-4)=\ln\left(x^{2}\right)$ dans $]2\,;+\infty[$.
4. $(x-3)\ln(x)=0$ dans $]0\,;+\infty[$.

7 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-7\ln(x)+6\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-x+7)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

8 Déterminer le signe des expressions suivantes.

1. $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ pour tout entier naturel n.
2. $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ pour tout entier naturel n.
3. $\ln\left(1+x^{2}\right)$ pour tout réel x.
4. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel $x>1$.
5. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel $x\in]0\,;1]$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x)<3$
2. $2\ln(x)+20>0$
3. $1-2\ln(x)>0$
4. $2\ln(x)-4\ln(3)<0$

10 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes.

1. $2^{n}\geqslant 10^{12}$
2. $0{,}9^{n}<10^{-1\,000}$

11 QCM

Donner la seule réponse exacte parmi celles proposées.

1. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x+1)-\ln(x)$ est égal à :

(a) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (b) $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ (c) 1

2. La dérivée de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+x^{2})$, est définie par :

(a) $f'(x)=\frac{2x}{\ln\left(1+x^{2}\right)}$

(b) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^{2}}$

(c) $f'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$

3. La tangente à la courbe d'équation $y=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ en son point d'abscisse e, a pour coefficient directeur :

(a) e (b) $\frac{1}{e}$ (c) $-\frac{1}{e}$

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. La suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = \ln(5 \times 3^n)$, est arithmétique de raison $\ln(3)$ et de premier terme $\ln(5)$.
2. L'équation $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$, d'inconnue x, admet deux solutions pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

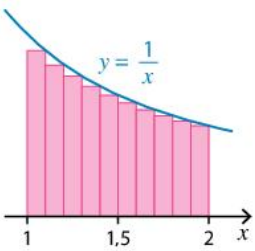
Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Le plan étant muni d'un repère, on souhaite évaluer l'aire $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la région du plan délimitée par la courbe de la fonction inverse, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. Pour cela, on découpe l'intervalle $[1 ; 2]$ en n (n étant un entier naturel non nul) intervalles de même longueur et on construit, comme indiqué sur la figure, n rectangles « en dessous » de la courbe.



1. Écrire un algorithme qui permet de calculer des valeurs approchées de $\mathcal{A}$.

2. a. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Interpréter graphiquement u_n.

b. On souhaite établir que $\ln(2) - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$. Pour cela, établir que, pour tout $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1$ et en déduire que, pour tout entier naturel $k > 0$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.

Après avoir écrit cette dernière inégalité pour tout k entier entre n et $2n - 1$, déterminer un encadrement de $\ln(2)$.

Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Dans son ouvrage *De Progressionibus harmonicis observationes* publié en 1734, le mathématicien suisse Leonhard Euler introduit un certain nombre, qu'il note O : « $O = 0{,}772156649015225$. Ce nombre semble d'autant plus remarquable que j'ai dépensé pas mal d'efforts pour l'étudier sans y parvenir. »

• Faire des recherches sur ce nombre, désormais noté γ et appelé constante d'Euler.

Fonction logarithme népérien et équations

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $2e^x - 3 = 0$
2. $e^{-x+1} - 1 = 0$
3. $e^{2x} = 4$
4. $(2e^x - 1)(e^x + 5) = 0$

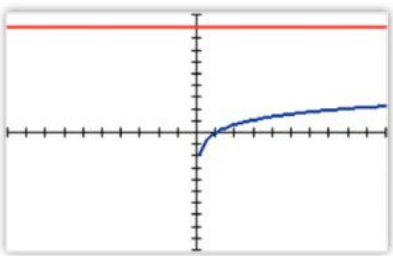
2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $-5e^x - 10 = 0$
2. $7 - e^{5x-2} = 0$
3. $e^{-3x} = -8$
4. $e^x(e^x - 9) = 0$
5. $e^{2x} + 3e^x = 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $\ln(x) = 3$
2. $\ln(x) = -7$
3. $2\ln(x) - 1 = 0$
4. $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$
5. $(\ln(x))^2 = 9$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $\ln(x) = -5$
2. $-6\ln(x) + 3 = 0$
3. $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$
4. $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$
5. $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$

5 Sur sa calculatrice, Dylan a représenté la courbe de la fonction logarithme népérien et la droite d'équation $y = 9$. Il a choisi comme fenêtre graphique :

$$-10 \leqslant X \leqslant 10 \text{ et } -10 \leqslant Y \leqslant 10.$$



1. La courbe va-t-elle couper la droite ? Justifier.
2. Si oui, quelle fenêtre graphique doit choisir Dylan pour visualiser le point d'intersection ? Justifier.

6 Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + 2\ln(x)$ définie sur $]0 ; +\infty[$.
• Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection avec les axes du repère.

7 **Démonstration**
Soit a un nombre réel strictement positif.
• Justifier que l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Propriétés algébriques du logarithme

8 Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.
1. $a = \ln(9)$
2. $b = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $c = \ln(3\sqrt{3})$
4. $d = \ln(36) - 2\ln(2)$

9 Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.
1. $a = \ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
2. $b = \ln(0{,}05)$
3. $c = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
4. $d = 2\ln(5e^2) + \ln(4e^{-1})$

10 Simplifier les expressions suivantes.
1. $a = \ln(e^4) + 3\ln(e^{-1})$
2. $b = e^{2\ln(5)} - \ln\left((e^5)^2\right)$
3. $c = \ln(e^{-3}) \times \ln(e^3)$
4. $d = 20\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln(3)}$

11 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
• Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

12 Déterminer la valeur exacte du nombre réel :

$$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$$

13 Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

• Démontrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -x + \ln(1 + e^x).$$

14 1. Démontrer que pour tout réel $x > -1$, on a :

$$2\ln(x + 1) = \ln(x^2 + 2x + 1).$$

2. Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$\ln(1 + e^{-2x}) = -2x + \ln(1 + e^{2x}).$$

15 **Démonstration**
1. Démontrer que, pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
On pourra exprimer $e^{\ln(ab)}$ et $e^{\ln(a)+\ln(b)}$.
2. Soient deux réels a et b strictement positifs.
a. p étant un entier naturel, rappeler les expressions de $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, $\ln(\sqrt{a})$ et $\ln(a^p)$ en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$.
b. Utiliser la même démarche qu'à la question 1 pour démontrer ces égalités.

16 **Démonstration**

Cet exercice propose une autre méthode de démonstration que l'exercice précédent.

On suppose connu le résultat : pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et on se propose de démontrer les propriétés suivantes.

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n :

(1) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ (2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(3) $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$ (4) $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

1. Écrire $\frac{1}{a} \times a = 1$ et en déduire la propriété (1).
2. Démontrer alors la propriété (2).
3. Écrire que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ et en déduire la propriété (3).
4. Démontrer la propriété (4) pour n entier naturel en utilisant en raisonnement par récurrence.

Pour n entier strictement négatif, écrire $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Limites et variations de la fonction ln

17 ALGO

On donne l'algorithme suivant écrit en langage naturel.

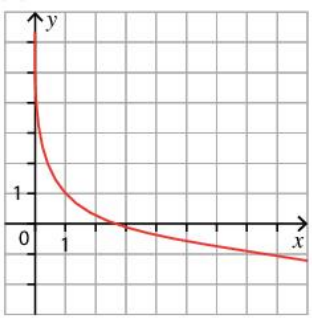
$n \leftarrow 1$
Tant que $\ln(n) \leqslant A$
$n \leftarrow n + 1$

1. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme lorsque $A = 2$?
2. Expliquer pourquoi cet algorithme s'arrête quel que soit le nombre réel A saisi.

18 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln(x) < 3$
2. $2\ln(x) + 200 > 0$
3. $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$
4. $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0$

19 On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \mapsto 1 - \ln(x)$, définie sur $]0 ; +\infty[$.



1. Déterminer les coordonnées du (des) éventuel(s) point(s) d'intersection avec les axes du repère.
2. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

20 L'évolution d'une population d'animaux en fonction du temps est modélisée par la fonction P définie par $P(t) = 50\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$, où t est exprimé en année.

1. Au bout de combien d'années la population initiale aura-t-elle été multipliée par 2 ?
2. Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

21 Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a. $0{,}99^n \leqslant 10^{-30}$; b. $1{,}02^n > 10^{2019}$.

22 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1{,}001$.

• Déterminer, s'il existe, le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10\ 000$.

23 **Modéliser**

En 2019, la population d'un animal en voie d'extinction est estimée à 100 000 individus.

• En supposant que, chaque année, cette population diminue de 10 %, à partir de quelle année cette population sera-t-elle réduite à moins de 1 000 individus ?

24 ALGO PYTHON

Alice souhaite placer son argent sur un compte épargne rémunéré à 3 % par an.

1. Écrire un algorithme en langage Python permettant de déterminer au bout de combien d'années de placement son capital aura doublé.
2. Exécuter ce script dans un éditeur Python et donner le résultat obtenu.
3. Retrouver le résultat précédent par le calcul.

25 Déterminer la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0 ; +\infty[$.

1. $f(x) = 2(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 1$, avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = -(\ln(x))^2 + \ln(x)$, avec $a = 0$.

26 Déterminer la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0 ; +\infty[$.

1. $f(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)(2 - \ln(x))$, avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x}$, avec $a = 0$.

27 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x + 1}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. a. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}\left(\frac{1}{2 + \frac{1}{x}}\right).$$

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

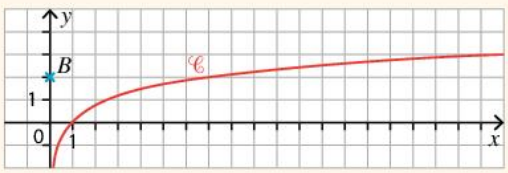
28 Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'ensemble E, étudier les limites de f aux bornes de E, le sens de variation de f sur E et dresser son tableau de variation sur E.

1. $f(x) = x\ln(x)$ et $E =]0 ; +\infty[$.
2. $f(x) = x^2\ln(x)$ et $E =]0 ; +\infty[$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $E =]0 ; +\infty[$.

29 PRISE D'INITIATIVE

Chercher, représenter

Dans le repère orthonormé suivant, B est le point de coordonnées (0 ; 2) et la courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction ln.

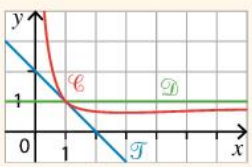


• Existe-t-il une tangente à la courbe représentative de la fonction ln passant par B ?

30 PRISE D'INITIATIVE

Chercher, raisonner

La courbe $\mathscr{C}$ suivante représente une fonction f définie sur $]0 ;+\infty[$ par $f(x) = a + b\dfrac{\ln(x)}{x}$, où a et b sont deux nombres réels donnés.



• Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ et une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 d'équation $y = -x + 2$, déterminer les valeurs de a et b.

31 Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'ensemble E, étudier les limites de f aux bornes de E, le sens de variation de f sur E et dresser son tableau de variation sur E.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ et $E =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
2. $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x) - 2$ et $E =]0 ; +\infty[$.

32 **Démonstration**

Démontrer que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

33 **Démonstration**

Soient a et b deux réels strictement positifs.
Démontrer que :

1. $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$;
2. $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$.

34 **Démonstration**

Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Démontrer que :
   a. $\ln(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in]0 ; 1]$;
   b. $\ln(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in [1 ; +\infty[$.
2. En déduire le tableau de signes de la fonction ln.

35 **Mesure de pH**

On détermine le pH d'une solution en mesurant la concentration en ions H_3O^+, par exemple à l'aide d'un pH-mètre.
Le pH est défini par la relation $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right]$, où $\left[H_3O^+\right]$ est la concentration en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ d'ions H_3O^+ de la solution.

On rappelle que $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel $x > 0$.

1. Quel est le pH d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est de $10^{-6,5}$ $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$?
2. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution de pH = 8,4 ?
3. Si la concentration en ions H_3O^+ d'une solution est multipliée par 10 000, quelle augmentation du pH cela produit-il ?

Fonctions composées avec la fonction ln

36 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes, définies par :

a. $f(x) = \ln(3x - 7)$;
b. $g(x) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right)$;
c. $h(x) = \ln(x) - 3\ln(2 - x)$.

37 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln(x) = \ln(x + 2)$
2. $\ln(-x + 3) = \ln(3x + 5)$
3. $\ln(2x^2 + 4) = \ln(-5x + 1)$

38 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln\left(x^2\right) = \ln(x) + \ln(6)$
2. $\ln(x + 1) + \ln(x - 4) = \ln(5)$
3. $2\ln(x) = \ln(5x - 3)$

39 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln[(x - 3)(2x + 1)] = \ln(4)$
2. $\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = 3\ln(2)$

40 Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre.

1. $\ln(3x - 4) < 0$
2. $\ln(-x + 3) \geqslant 1$
3. $\ln(-x + 1) \leqslant \ln(x)$
4. $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$

41 Déterminer les limites des fonctions f et g suivantes aux bornes de leur ensemble de définition E.

1. $f(x) = \ln(2x-6)$ et $E =]3\,;+\infty[$.
2. $g(x) = \ln(e^x+3)$ et $E = \mathbb{R}$.

42 Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'ensemble E, étudier les limites de f aux bornes de E, le sens de variation de f sur E et dresser son tableau de variation sur E.

1. $f(x) = \ln(3x-1)$ et $E = \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
2. $f(x) = \ln(-x^2+4x)$ et $E =]0\,;4[$.
3. $f(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

43 Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions f suivantes.

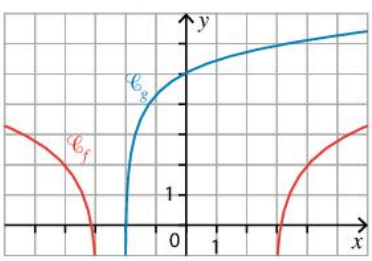
1. $f(x) = x\ln(5x)$ et $E =]0\,;+\infty[$.
2. $f(x) = \ln\left(x+e^{-x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

44 **Carbone 14**

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone permettant de dater les restes d'êtres vivants, comme les squelettes ou les fossiles.
La formule suivante donne l'âge T, en année, d'un échantillon en fonction du pourcentage p de carbone 14 restant : $T = 8\,264\ln\left(\frac{100}{p}\right)$.

1. Le squelette d'un homme de Néandertal contient 2 % du carbone 14 initialement contenu dans ses os. Estimer l'âge de ce squelette.
2. La datation au carbone 14 a permis d'estimer l'âge d'une momie à 2 500 ans. Quelle proportion de carbone 14 contient-elle encore ?

45 Leïla a représenté ci-dessous les fonctions :
$f : x \mapsto \ln\left(x^2-9\right)$ et $g : x \mapsto \ln(75x+145)$.



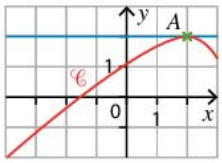
Elle affirme que l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution. A-t-elle raison ?

46 CALCULATRICE

Soit f la fonction définie sur $]-10\,;8[$ par :
$f(x) = \ln(x+10) + \ln(-x+8)$.

1. Afficher la représentation graphique de f sur la calculatrice, puis conjecturer le signe et les variations de f sur $]-10\,;8[$.
2. Valider ou infirmer ces conjectures.

47 **Chercher, raisonner**



La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction f définie sur $]-\infty\,;3[$ par $f(x) = x + \ln(ax+b)$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

• Sachant qu'au point $A(2\,;2)$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses, déterminer les valeurs de a et b.

48 QCM

Pour chaque question, déterminer la seule réponse exacte parmi les trois proposées.

1. Soit x un nombre réel strictement positif.
$\ln(2x+4) - \ln(2x)$ est égal à :

(a) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ (b) $\frac{\ln(2x+4)}{\ln(2x)}$ (c) $2\ln(2)$

2. Pour tout nombre réel x, $\ln\left(\frac{e^x}{2}\right) - \ln\left(e^{x-3}\right)$ est égal à :

(a) $-3-\ln(2)$ (b) $3-\ln(2)$ (c) $-3+\ln(2)$

49 Soient f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifier que f est définie sur $]-2\,;2[$.
2. Montrer que la fonction f est une fonction impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales que l'on précisera.
4. Étudier le sens de variation de la fonction f, puis dresser son tableau de variation.

50 Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :
$f(x) = \ln(2x-1) - x + 1$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que, pour tout réel $x > \frac{1}{2}$:
$f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2-\frac{1}{x}\right)$.
En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha < \beta$).
4. Donner la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en posant $X = \ln(x)$ ou $X = e^x$.

1. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$
2. $4(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$
3. $4e^{2x} + 7e^x - 2 = 0$

52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 1)$
2. $\ln(2 - e^x) - \ln(2e^x - 1) = 0$
3. $\ln(4) + \ln(x - 1) = 2\ln(x)$

53 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(2x^2 + 3x - 6)\ln(1 - x) = 0$
2. $\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) = 1 + \ln(2)$
3. $\ln(x + 1) - \ln(x) = 2\ln(3)$

54 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(e^x - 3)\ln(x + 1) < 0$
2. $\ln(e^x - 2) < 0$
3. $\ln(-x^2 + 4x + 5) < \ln(x + 1)$

55 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2(\ln(x))^2 \leqslant 5\ln(x)$
2. $x\ln(x - 2) < 0$
3. $(\ln(x) - 1)(3 - \ln(x)) \geqslant 0$

56 Les fonctions suivantes sont définies sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer leurs limites en 0 et en $+\infty$.

1. $f : x \mapsto x - 4\ln(x)$
2. $g : x \mapsto (3 - x)\ln(x)$
3. $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + 1}{2x + 3}$
4. $k : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{e^x}$

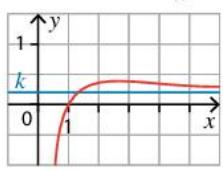
57 Déterminer la limite, lorsque x tend vers a, des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x) = \ln(e^x - x)$ et $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x - 3})}{x}$ et $a = +\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$ et $a = 0$.
4. $l(x) = \dfrac{\ln(1 + 2x)}{x}$ et $a = 0$.

58 **Chercher, raisonner**

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On a tracé la courbe représentative de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ ainsi que la droite d'équation $y = k$, où k est un réel tel que $0 < k < \frac{1}{e}$, comme indiqué sur la figure ci-contre.



• Combien la courbe représentative de la fonction f et la droite ont-elles de point(s) d'intersection ?

59 **Chercher, raisonner**

Soient f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\ln(x).$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique tangente à $\mathscr{C}$ passant par O.
2. Préciser l'équation de cette tangente.

60 ALGO PYTHON

On donne la fonction écrite en Python ci-contre.

1. Que renvoie cette fonction lorsqu'on tape `equation(10)` dans la console ? Faire les calculs à la main.
2. Que calcule cette fonction ?

```
from math import*
def equation(k):
    a=0
    b=100
    while b-a>0.01:
        if exp((a+b)/2)>k:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a,b
```

61 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1. Montrer que $u_1 + u_2 + u_3 = -\ln(4)$.
2. Soit S_n la somme définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

• Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

62 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$.

1. CALCULATRICE Avec la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \ln(u_n)$.

a. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

3. Démontrer les conjectures émises à la question 1.

63 PRISE D'INITIATIVE

Dans une pièce à la température constante de 20 °C, Pablo se prépare une tasse de thé.

À l'instant initial $t = 0$, la température de son thé est égale à 100 °C. Quatre minutes plus tard, elle est de 80 °C.

On admet que la température du thé $f(t)$, en °C, est donnée par $f(t) = Ce^{at} + 20$, où t désigne le temps en minute et a et C sont des constantes réelles.

Au-dessus de 50 °C, Pablo trouve que le thé est trop chaud et ne peut pas le boire.

• Combien de temps devra-t-il attendre pour déguster son thé ?

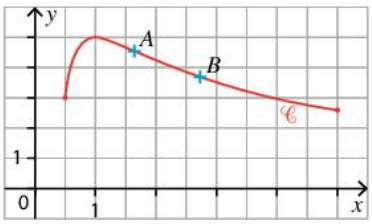
64 QCM

Soit f la fonction définie sur $[0,5;5]$ par :

$$f(x)=\frac{5+5\ln(x)}{x}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative ci-dessous.

On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5;5]$. On note B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse e. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.



Pour chacune des questions, donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées, en justifiant.

1. On a :

(a) $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0,5\ ;5]$.

(b) $f'(x)\leqslant 0$ sur $[1\ ;5]$.

(c) $f'(x)\leqslant 0$ sur $[0,5\ ;1]$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

(a) $-\frac{5}{e^2}$ (b) $\frac{10}{e}$ (c) $\frac{5}{e^3}$

3. La fonction f' est :

(a) croissante sur $[0,5\ ;1]$.

(b) décroissante sur $[1\ ;5]$.

(c) croissante sur $[2\ ;5]$.

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A est :

(a) 1,65

(b) 1,6

(c) $e^{0,5}$

65 Soient f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

2. a. Montrer que, pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

b. En déduire les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$.

3. a. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$.

66 Soit f la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+\ln(x).$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1\ ;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x}.$$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;+\infty[$.

3. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x$.

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisses k de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

a. Déterminer la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.

b. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

67 ALGO PYTHON

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-2+\ln(x).$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et étudier son sens de variation.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\ ;+\infty[$.

3. Démontrer que $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$.

4. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

5. On donne la fonction suivante écrite en Python.

```
from math import*

def f(x):
    return x**2-2+log(x)

def dichotomie(a,b,p):
    while b-a>10**(-p):
        if f(a)*f((a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a,b
```

En Python, le logarithme népérien se note « log » et doit être importé de la bibliothèque « math ».

On écrit dans la console dichotomie(1,2,1).

Que renvoie cette instruction ?

68 On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

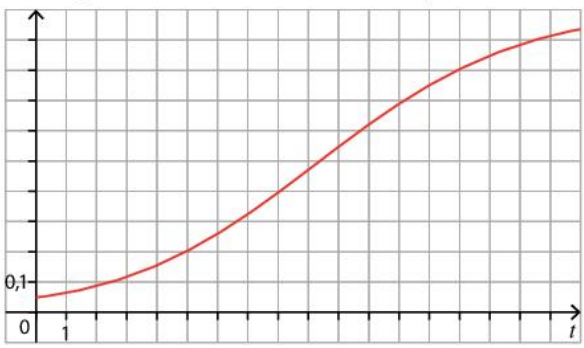
$$f(x)=3x-3x\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

• Quelle est la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$?

69 Utilisateurs d'une application

Début 2019, une nouvelle application pour smartphone est créée. De nombreuses personnes téléchargent cette application sans nécessairement l'utiliser. Une étude a permis de modéliser l'évolution de la fréquence $f(t)$ des utilisateurs de cette application parmi ceux qui l'ont téléchargée à l'instant t (en mois) à partir du 1er septembre 2019 ($t = 0$ correspond au 1er septembre 2019). On a représenté ci-dessous la fonction f.



1. Déterminer graphiquement :

a. le pourcentage d'utilisateurs de cette application au 1er janvier 2020 puis au 1er janvier 2021 ;

b. l'instant t auquel plus de la moitié des personnes ayant téléchargé l'application l'utilisent.

2. On admet que l'expression de la fonction f est de la forme $f(t) = \dfrac{1}{1 + ae^{bt}}$.

a. Déterminer les valeurs de a et b.

b. Quelle est la limite de f en $+\infty$? Interpréter ce résultat.

c. Suivant ce modèle, à partir de quand la fréquence des utilisateurs de cette application dépassera-t-elle 0,99 ?

70 TABLEUR Offre et demande

On définit les termes suivants.

• Fonction d'offre : elle exprime le prix de vente d'un objet en fonction de la quantité susceptible d'être fabriquée.

• Fonction de demande : elle exprime le prix d'achat d'un objet en fonction de la quantité susceptible d'être achetée.

• Prix et quantité d'équilibre : c'est une situation où, pour un prix donné, les quantités offertes sont égales aux quantités demandées.

On a représenté sur la feuille de calcul ci-contre l'évolution du prix de vente d'un stylo, en euro, en fonction de la quantité, en million, susceptible d'être fabriquée.

	A	B
1	x	offre
2	1	0,5
3	2	4
4	3	6
5	4	7,4
6	5	8,5
7	6	9,5
8	7	10,2
9	8	10,9
10	9	11,5
11	10	12
12	11	12,5
13	12	12,9

1. a. Dans une feuille de calcul, tracer le nuage de points représentant la fonction d'offre en fonction de la quantité susceptible d'être fabriquée.

b. Cliquer droit sur l'un des points du nuage pour ajouter une courbe de tendance logarithmique, puis, dans le menu Option, cocher « Afficher l'équation sur le graphique ». Quelle est l'équation de la courbe affichée ?

2. En utilisant cette modélisation :

a. Estimer le prix de vente de 2 millions de stylos fabriqués.

b. Déterminer à partir de quelle quantité de stylos fabriqués le prix de vente dépassera 10 euros.

3. CALCULATRICE On admet que la fonction de demande pour ce produit est donnée par $D(x) = -x + 8$, où $D(x)$ est le prix en euro d'un stylo et x la quantité de stylos susceptible d'être achetée en millions, avec $x \in [1 ; 8]$.

a. Afficher les courbes des fonctions d'offre et de demande sur la calculatrice.

b. Donner un encadrement de la quantité d'équilibre.

4. On donne la fonction f définie sur $[1 ; 8]$ par :

$$f(x) = 5\ln(x) + 0{,}5 + x - 8.$$

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1 ; 8]$.

b. Déterminer une valeur approchée de la quantité d'équilibre q à 10^{-3} près.

c. Calculer le prix p d'équilibre et le chiffre d'affaires si l'on vend q millions de stylos au prix d'équilibre p.

71 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Raisonner

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = e^x$. Pour tout réel m, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$.

Démontrer que la droite $\mathscr{D}_e$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer, selon les valeurs prises par le réel m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.

3. Démontrer cette conjecture.

72 Chercher, raisonner

Démontrer que la courbe représentative de la fonction ln est située en dessous de toutes ses tangentes.

73 Intensité sonore et décibels

On note I l'intensité sonore d'un bruit (en $W \cdot m^{-2}$) et I_0 l'intensité sonore sous laquelle on n'entend plus le bruit. On a $I_0 = 10^{-12}$ $W \cdot m^{-2}$. L'intensité du bruit émis lors d'une conversation normale est $I_c = 10^{-6}$ $W \cdot m^{-2}$. Le seuil de la douleur, soit l'intensité au-delà de laquelle le bruit risque d'endommager le système auditif, est égal à $I_d = 10$ $W \cdot m^{-2}$.
Pour comparer ces intensités, dont les ordres de grandeur sont très différents, on définit le niveau sonore $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, exprimé en décibel (dB), où $\log(x)$ désigne le logarithme décimal de x, défini sur $]0 ; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

1. Calculer le niveau sonore correspondant aux intensités I_0, I_c et I_d.
2. Dans un restaurant scolaire, le niveau sonore est égal à 85 dB. Calculer l'intensité correspondant à ce bruit.
3. Lors d'un concert piano-voix, le niveau sonore du piano seul est mesuré à 72 dB et celui du chant seul à 68 dB. Sachant que les intensités de plusieurs sources s'additionnent, quel est le niveau sonore du concert ?
4. Dans une artère très fréquentée, l'intensité du bruit émis par le trafic a été divisée par deux grâce à des aménagements urbains. Calculer la diminution en dB du bruit ainsi obtenue.

74 Raisonner

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $]0 ; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = x^n(1 - \ln(x))$. On nomme $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f_n aux bornes de son ensemble de définition.
b. Étudier le sens de variation de la fonction f_n et dresser son tableau de variation.
2. a. Soit n un entier naturel non nul. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.
b. En déduire que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on précisera les coordonnées.
c. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ en chacun de ces points fixes.
3. Pour n entier naturel non nul, on nomme a_n le réel en lequel la fonction f_n admet un maximum.
a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n \in [1 ; e[$.
b. Justifier que la suite (a_n) est croissante et convergente, puis préciser sa limite.

75

Soient f_k la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = x(\ln(x) + k)$, où k est un nombre réel, et $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de la fonction f_k aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier ses variations et dresser son tableau de variation.
3. Pour quelle valeur de k le minimum de f_k est-il égal à -10 ?
4. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A_k.
b. Démontrer que, pour tout nombre réel k, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point A_k est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

76 Étude d'une fonction

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - x\ln(x).$$

1. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de g sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2 + x}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(2 + x)^2}$.
2. En utilisant l'égalité $g(\alpha) = 0$, prouver que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
5. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

77

Dans la situation 3 p. 181, on a démontré que les fonctions f définies et dérivables sur $]0 ; +\infty[$ vérifiant, pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(a) + f(b) = f(ab)$$

sont telles que $f(1) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{k}{x}$ avec k réel. On veut démontrer que ce sont les seules.
Soit k un réel et f une fonction, définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, telle que $f(1) = 0$ et, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{k}{x}$ avec k réel.

1. Démontrer qu'il existe un réel C tel que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f(x) = k\ln(x) + C$.
2. Calculer C et conclure.

78 PRISE D'INITIATIVE

Soit E le point de coordonnées (e ; 0) dans un repère orthonormé du plan.

• Existe-t-il un point M de la courbe d'équation $y = \ln(x)$ tel que la distance EM soit minimale ?
Si oui, préciser son abscisse.

79 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentatives respectives des fonctions exponentielle et logarithme népérien. Soient A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et B le point de Γ d'abscisse 1.

1. a. Écrire les équations de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et de la tangente Δ à la courbe Γ au point B.

b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont parallèles.

2. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est située entièrement au-dessus de $\mathscr{D}$.

b. Démontrer que la courbe Γ est située entièrement en dessous de Δ.

c. Soient M un point quelconque de $\mathscr{C}$ et N un point quelconque de Γ. Expliquer pourquoi $MN \geqslant \sqrt{2}$.

80 **La « règle des 70, 110 et 231 »**

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \ln(x+1) - x.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$.

c. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.

d. En déduire que, pour tout réel x de $]0 ; 0{,}14[$, x est une valeur approchée de $\ln(x+1)$ à 0,01 près.

2. Un banquier explique la « règle des 70 » à un client : « Si vous placez un capital sur un compte épargne dont le taux d'intérêt annuel est t %, alors votre capital aura doublé au bout de $\frac{70}{t}$ années. Par exemple, si vous placez un capital avec un taux d'intérêt annuel de 7 %, il aura doublé dans 10 ans. » Justifier la « règle des 70 ».

3. Énoncer et justifier la « règle des 110 » et « des 231 ».

81 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Démontrer que (u_n) est décroissante et minorée.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Déterminer sa limite. On pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = x - \ln(x+1)$.

82 ALGO PYTHON

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1. a. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de calculer la valeur de u_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.

b. Programmer cet algorithme en Python et donner les valeurs affichées pour $n = 20$ et $n = 100$.
La suite (u_n) semble-t-elle converger ?

2. a. Montrer que, pour tout nombre réel x positif :
$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
$$\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$u_n \geqslant \ln(n+1).$$

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

83 CALCULATRICE

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la position relative des courbes d'équations $y = \ln(x+1)$, $y = x - \frac{x^2}{2}$ et $y = x$, sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$, puis conclure que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1)$.

3. Établir par la même méthode que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\ln(x+1) \leqslant x$.

4. Afficher les tables de valeurs de $x - \frac{x^2}{2}$ et $\ln(x+1)$ pour x dans $[0 ; 1]$ avec un pas de 0,01. Interpréter l'encadrement de $\ln(x+1)$ en termes d'approximation de $\ln(x+1)$ pour des valeurs de x proches de 0.

84 **Constante d'Euler**

L'objectif est de prouver que les suites (u_n) et (v_n), définies pour tout entier naturel n non nul par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$
convergent vers une limite commune γ, appelée constante d'Euler.

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

b. Soit la fonction f, définie sur $[1 ; +\infty[$, par :
$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$
Déterminer la limite de f en $+\infty$, étudier son sens de variation sur $[1 ; +\infty[$ et en déduire son signe sur $[1 ; +\infty[$.

c. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b. Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $v_n \leqslant u_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est minorée, que la suite (v_n) est majorée, que ces deux suites convergent et qu'elles ont la même limite.
Cette limite commune est la constante d'Euler.

4. Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de la constante d'Euler.

85 **Tangentes communes**

On souhaite déterminer les tangentes communes aux courbes $\mathscr{L}$ et $\mathscr{E}$ d'équations respectives $y = \ln(x)$ et $y = e^x$.

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

a. Avec un logiciel de géométrie dynamique, tracer les courbes $\mathscr{L}$ et $\mathscr{E}$.

b. Placer un point A sur $\mathscr{L}$, un point B sur $\mathscr{E}$ et tracer les tangentes en ces points.

c. Les deux tangentes peuvent-elles être confondues ? Si oui, donner les coordonnées des points A et B lorsque les tangentes sont confondues.

2. **Démonstration**

Soient a un réel strictement positif et b un réel. On note $\mathscr{T}_a$ la tangente au point d'abscisse a à la courbe $\mathscr{L}$ et $\mathscr{T}_b$ la tangente au point d'abscisse b à la courbe $\mathscr{E}$.

a. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes.

b. Démontrer que les tangentes $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}_b$ sont confondues si et seulement si :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{e^b} \\ e^b = \dfrac{-b-1}{1-b} \end{cases}.$$

c. Étudier les variations de la fonction f, définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{x+1}{1-x}.$$

d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty ; 1[$ et dans $]1 ; +\infty[$.

e. Donner alors une valeur approchée à 10^{-3} près des réels a et b pour lesquels les tangentes sont confondues.

86 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Raisonner

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = 2n \times \frac{\ln(x)}{x^n} + 1.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. Vérifier qu'il existe un point A tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $A \in \mathscr{C}_n$.

3. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n allant de 1 à 100.

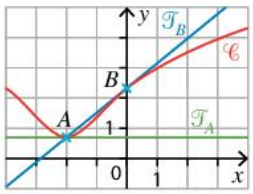
b. La fonction f_n semble-t-elle admettre un maximum ? Si oui, quelle est sa particularité ?

c. Démontrer les conjectures émises à la question **3.b.**

4. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α_n.

5. Démontrer que la suite (α_n) est convergente.

87 On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, où a, b et c sont trois nombres réels donnés, et deux de ses tangentes.



Le point A a pour coordonnées $(-2 ; \ln(2))$ et la tangente à la courbe $\mathscr{T}_A$ au point A est horizontale.

Le point B a pour coordonnées $(0 ; \ln(10))$.

1. Déterminer les valeurs de a, b et c.

2. Le point A appartient-il à la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe au point B ? Justifier.

3. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près des antécédents de 5 par f.

88 **Approfondissement**

Soit x un réel strictement positif. Pour tout réel α, on définit la puissance de x d'exposant α par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

1. Justifier que cette définition coïncide avec la définition des puissances d'exposants entiers relatifs de x.

2. Démontrer que, pour tout $x > 0$ et pour tous réels α et α', on a :

a. $x^\alpha \times x^{\alpha'} = x^{\alpha+\alpha'}$ **b.** $\dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ **c.** $\left(x^\alpha\right)^{\alpha'} = x^{\alpha\alpha'}$

3. Démontrer que, pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout réel α, on a :

a. $(x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$ **b.** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

4. Simplifier les écritures suivantes.

a. $64^{\frac{2}{3}}$ **b.** $81^{\frac{3}{4}}$ **c.** $2^{\ln(3)}$ **d.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

89 CALCULATRICE **Approfondissement**

Soit α un réel strictement positif. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction f_α définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_\alpha(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

1. a. Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) = 0$.

b. Déterminer la limite de f_α en $+\infty$.

2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

En déduire le sens de variation de f_α sur $]0 ; +\infty[$.

3. a. Discuter, suivant les valeurs de α, l'existence et la valeur de la limite en 0 du quotient $\dfrac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x}$.

b. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus à la question précédente.

4. Contrôler la cohérence des résultats en affichant sur la calculatrice les courbes des fonctions $f_{0,8}$, $f_{1,1}$, $f_{\frac{5}{4}}$.

5. Émettre une conjecture sur la position relative des courbes des fonctions $f_{0,8}$ et $f_{\frac{5}{4}}$.

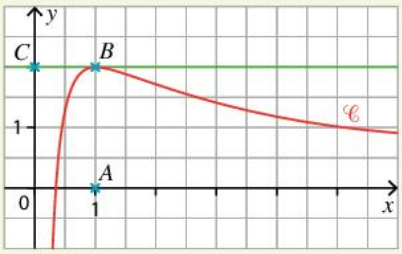
Démontrer cette conjecture.

ZOOM SUR... les paramètres

Certains exercices proposent l'expression algébrique d'une fonction qui dépend de plusieurs paramètres inconnus à déterminer. Les informations de l'énoncé (image d'un réel, coordonnées d'un point de la courbe, nombre dérivé fourni, limites, asymptotes, etc.) permettent d'établir des équations dont les inconnues sont ces paramètres. Autant d'équations que de paramètres sont nécessaires.

90 20 min

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes.

• Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$; $(1\,;2)$ et $(0\,;2)$.

• La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B.

Il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x)=\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$.

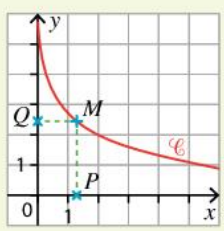
1. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Vérifier que, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}.$$

3. En déduire les réels a et b.

91 20 min

Soient f la fonction définie sur $]0\,;14]$ par $f(x)=2-\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q, projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1. L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}$? Justifier.
2. L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ? Justifier. Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

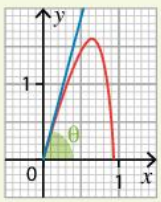
92 30 min

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{e}\sqrt{u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}^2$.
2. a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   b. Est-elle convergente ?
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\ln(u_n)-2$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   c. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   d. Calculer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on s'intéresse au comportement de la suite (u_n) pour d'autres valeurs que 1 pour u_0. Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.
   a. Si $u_0=2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante.
   b. Si $u_0=2$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}^2$.
   c. La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0=0$.

93 45 min

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre. Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air, mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté. On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;1[$ par $f(x)=bx+2\ln(1-x)$, où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètre.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$. On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;1[$ et que, pour tout réel x de $[0\,;1[$:

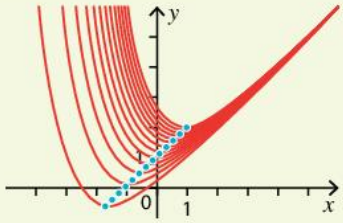
$$f'(x)=\frac{-bx+b-2}{1-x}.$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs de b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b=5{,}69$. L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

94 25 min

Soient k un réel strictement positif et la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + ke^{-x}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé. Quelques courbes sont représentées ci-dessous pour différentes valeurs de k.



1. Justifier que, pour tout réel k, la fonction f_k admet un minimum.
2. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point nommé A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$.
Les points A_k semblent alignés. Est-ce vrai ? Justifier.

95 50 min

L'épicéa est une espèce d'arbre qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans. On veut estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A. Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en année) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par $f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en année.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme aux conditions de validité, donc compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âge (en année)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteur (en mètre)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètre par année)		0,22	0,245	0,25								

1. a. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure, en expliquant la démarche.
b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

96 50 min ALGO PYTHON

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-v_n}\right)$. On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul. On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

Partie A. Conjecture à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre, qui calcule la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.

```
def somme():
    v=...
    S=...
    for i in range(...):
        ...
        ...
    return S
```

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau suivant.

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant la démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B. Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4 sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C. Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Consolider ses fondamentaux

97 Une histoire de minimum

Pour tout réel a, on définit la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$, et on note $\mathscr{C}_a$ sa représentation graphique dans un repère du plan.
On s'intéresse au minimum éventuel de la fonction f_a.

Questions Va piano

1. Démontrer que la fonction f_3 admet un minimum et le déterminer.
2. Démontrer que, pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum et le déterminer.

Questions Moderato

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer qu'il existe une valeur de a pour laquelle le minimum de la fonction f_a est le plus petit possible.
2. Démontrer cette conjecture.

Questions Allegro

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer le lieu des points S_a appartenant à $\mathscr{C}_a$ et ayant pour abscisse le réel en lequel la fonction f_a admet un minimum.
2. Démontrer cette conjecture.

Se préparer aux études supérieures

98 Valeurs approchées de e

Approfondissement

Dans son *Introduction à l'analyse des infiniment petits*, le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) démontre que le nombre e est tel que :

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Le but de cet exercice est de démontrer cette égalité et d'obtenir des valeurs approchées de e.

1. a. Prouver que, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x > -1$:

$$\ln(x+1) \leqslant x.$$

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que, pour tout réel $x > -1$:

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1).$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction f, définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

b. En déduire que, pour tout réel $x > -1$, $f(x) < 1$, puis que $\ln(1 - f(x)) \leqslant -f(x)$.

c. Conclure.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

a. En utilisant l'inégalité établie à la question 1, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1.$$

En déduire que $u_n \leqslant e$.

b. En utilisant l'inégalité établie à la question 2, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 \leqslant (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

En déduire que $v_n \geqslant e$.

c. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n - u_n = \dfrac{u_n}{n}$.

En déduire que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0, puis que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers e.

d. On admet que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. Déterminer le plus petit entier n tel que :

$$v_n - u_n < 10^{-3}.$$

99 Approximation de $\ln(x+1)$ au voisinage de 0

1. a. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

b. Préciser l'amplitude de cet encadrement. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(x+1)$ à $\dfrac{x^3}{3}$ près.

2. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Donner une nouvelle valeur approchée de $\ln(x+1)$.

On dit que le polynôme $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ est le développement limité d'ordre 3 de $\ln(x+1)$ en 0.

Plus généralement, on établit que le développement limité d'ordre n de $\ln(x+1)$ en 0 est :

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

No problem!

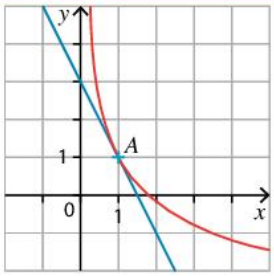
1 Years and years

Compare the following numbers and explain your method:

• $2\,012^{2\,014}$ • $2\,013^{2\,013}$ • $2\,014^{2\,012}$

2 Equation of a tangent line

We are given a function $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$.



1. Find the equation of the tangent line at $A(1,1)$:
a. using the graph on the right.
b. using the formula for the tangent line.
In each case explain your method.
2. Give the relative positions of the tangent line and the curve.

3 Noughts and crosses TEAM WORK

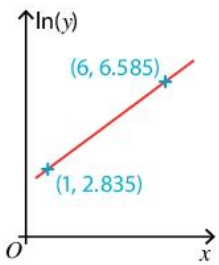
Step 1: choose a square.
Step 2: solve the problem linked to that square.
Step 3: if your answer is correct, write your symbol (a nought or a cross, depending on your team) in the square.

• **A1:** Let M be a positive real number. Which one is the greatest? $\ln(4^M)$ or M?
• **A2:** What is the domain of the function $y = 2\ln(x-3)$?
• **A3:** What is the domain of the function $y = 1 - 2\ln((2-x)^2)$?
• **B1:** Solve the equation $\ln(2x) + \ln(3x) = 15$.
• **B2:** Solve the equation $\ln(x^2-4) - \ln(2x) = 5$.
• **B3:** What is the domain of $y = \ln(x^2 + x - 2)$?
• **C1:** What is the domain of the function $y = 2\ln(-x+5)$?
• **C2:** What is the domain of the function $y = 1 - 2\ln(\sqrt{x})$?
• **C3:** Solve the equation $\ln(2+x) + \ln(3-x) = 10$.

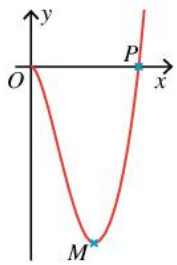
	A	B	C
1			
2			
3			

Final exam Past papers

1 The variables x and y satisfy the equation $y = Ae^{px+p}$, where A and p are constants. The graph of $\ln(y)$ against x is a straight line passing through the points (1, 2.835) and (6, 6.585) as shown in the diagram on the right. Find the values of A and p.



2 The diagram below shows the curve with equation $y = 3x^2 \ln\left(\frac{1}{6}x\right)$.



The curve crosses the x-axis at the point P and has a minimum at the point M.
1. Find the gradient of the curve at the point P.
2. Find the coordinates of the point M.

3 Show that $\int_1^7 \frac{6}{2x+1}\,dx = \ln(125)$

CHAPITRE

7 Primitives, équations différentielles

Ressources en +

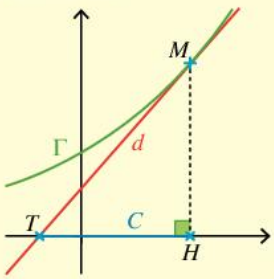
Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Approcher des courbes par la géométrie

Florimond de Beaune

Florimond de Beaune (1601-1652) est un juriste et mathématicien français. Disciple et ami de Descartes, il propose en 1638 quelques problèmes nommés « inverses des tangentes », pour lesquels Leibniz et Descartes seront parmi les premiers à proposer des solutions.

Dans ses commentaires à propos de l'ouvrage *La Géométrie* de Descartes, Florimond de Beaune propose le problème suivant.
Dans un repère orthonormé, la droite d est la tangente à la courbe Γ au point M. Elle coupe l'axe des abscisses en T. Le point H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On appelle « sous-tangente » la longueur TH. Trouver une courbe telle que, en tout point, la sous-tangente C soit constante.



Justifier que le problème posé peut se modéliser par une équation faisant intervenir la fonction f, représentée par la courbe Γ, et sa dérivée f'.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Calculs de dérivées (1)

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ en précisant sur quel(s) intervalle(s) f est dérivable.

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$
2. $f(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{x^3}{3}$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \frac{\ln(x)}{2}$
5. $f(x) = x - \sin(x)$
6. $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

2 Dérivées de fonctions composées

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ en précisant sur quel(s) intervalle(s) f est dérivable.

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $f(x) = e^{-5x+1}$
3. $f(x) = \ln(2x + 3)$
4. $f(x) = \sqrt{-2x}$

3 Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^{-x+5} + 1.$$

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. $f(5) = 0$
2. $f'(x) = -f(x) + 1$
3. La courbe de f dans un repère admet une asymptote verticale.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -3e^{-x+5} + x.$$

On a $g'(x) = f(x)$.

4 Les mêmes dérivées

Parmi les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, donner celles qui ont la même dérivée.

- $f(x) = e^{2x}$
- $g(x) = e^{2x+2} - 1$
- $h(x) = xe^{2x} + 2$
- $i(x) = e^2 e^{2x} - \ln(2)$
- $j(x) = \frac{x}{e^{-2x}}$
- $k(x) = e^{2x} + e^2$

5 Plusieurs fonctions

1. Déterminer une fonction f telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x$. Existe-t-il d'autres fonctions vérifiant cette égalité ?
2. Déterminer une fonction f telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. Existe-t-il d'autres fonctions vérifiant cette égalité ?

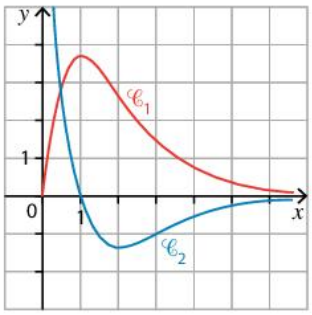
6 Calculs de dérivées (2)

Dans chacun des cas suivants, vérifier que $f'(x) = g(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$; $g(x) = \frac{5}{(x+3)^2}$ et $I =]-3 ; +\infty[$.
2. $f(x) = (x-2)\ln(x)$; $g(x) = \frac{x\ln(x) + x - 2}{x}$ et $I =]0 ; +\infty[$.
3. $f(x) = (x^2+1)e^x$; $g(x) = (x+1)^2 e^x$ et $I = \mathbb{R}$.

7 Deux courbes

On donne ci-dessous deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. L'une est la représentation graphique d'une fonction f et l'autre celle de sa dérivée.



- Quelle est la courbe qui représente f ? Justifier.

8 Fonctions $x \mapsto e^{ax}$

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{ax}, \text{ où } a > 0.$$

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = ae^{ax}.$$

2. Justifier que la courbe représentative de f possède une asymptote horizontale que l'on précisera.
3. Dresser le tableau de variation de f.

9 Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $xe^2 - 1 = 0$
2. $e^{7x+1} = 1$
3. $3e^{4x} = 2$
4. $2e^{x-1} - 4 = 0$

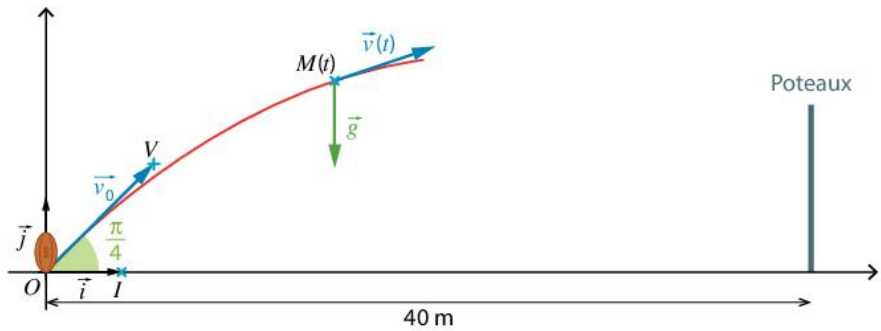
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1

Objectif
Déterminer des fonctions dont on connaît des dérivées et introduire les primitives.

Des équations dont les inconnues sont des fonctions

Pendant un match de rugby, une joueuse tente une pénalité. Au moment du coup de pied, le ballon se trouve face aux poteaux à une distance de 40 m de ceux-ci.
À l'instant $t = 0$, la joueuse tape dans le ballon et la vitesse initiale de celui-ci est $v_0 = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
On se place dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ m, représenté sur le schéma ci-dessous qui n'est pas à l'échelle.



On note $\vec{v}_0$ le vecteur de norme v_0, I et V les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OV} = \vec{v}_0$.
On suppose que $\widehat{IOV} = \frac{\pi}{4}$.

On repère la position du ballon à chaque instant t (exprimé en seconde) par le point $M(t)$ dont les coordonnées sont $(x(t)\,;\,y(t))$; on a $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.
La vitesse du ballon à l'instant t est modélisée par le vecteur $\overrightarrow{v(t)}$ dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_v(t) \\ y_v(t) \end{pmatrix}$ et vérifient $x'(t) = x_v(t)$ et $y'(t) = y_v(t)$.
Le ballon est soumis uniquement à l'accélération terrestre $\vec{g}$ dont les coordonnées sont les dérivées respectives des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v(t)}$. On suppose que les coordonnées de $\vec{g}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ -9{,}81 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v}_0$.
2. **a.** Justifier que la fonction x_v est constante et préciser la valeur de cette constante.
   b. Quelles sont les fonctions qui ont une dérivée égale à cette constante ?
   c. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de t, sachant que $x(0) = 0$.
3. **a.** Quelles sont les fonctions qui ont une dérivée égale à –9,81 ?
   b. En déduire l'expression de $y_v(t)$ en fonction de t.
   c. Dériver la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et en déduire une fonction f telle que $f'(t) = y_v(t)$.
   d. En admettant que la fonction y est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $y(t) = f(t) + C$, où C est une constante, déterminer l'expression de $y(t)$ en fonction de t.
4. La pénalité est réussie si le ballon passe au-dessus de la barre transversale, haute de 3 mètres. La joueuse a-t-elle réussi sa pénalité ?

Situation 2 Approximation graphique TABLEUR

Objectif Utiliser la méthode d'Euler pour approcher une solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$.

On injecte une dose de 3 mL d'un médicament dans le sang d'un patient. À chaque instant t, en heure, la vitesse d'élimination de ce produit est proportionnelle à la quantité $q(t)$, exprimée en mL, de médicament encore présente dans le sang. On admet que l'on a ainsi la relation $q'(t) = -0{,}1 \times q(t)$.
On veut construire une approximation de la courbe représentative de la fonction q.

1. On fixe un nombre réel h et, pour tout entier naturel n, on considère les points $M_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = q(x_n + h)$ en utilisant l'approximation affine suivante :
$q(x_n + h) \approx q(x_n) + hq'(x_n)$.
Exprimer y_{n+1} en fonction de $q(x_n)$ et de h.

2. **a.** On choisit un pas $h = 0{,}25$. Reproduire la feuille de calcul ci-contre dans un tableur. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules B3 et C3 de manière à pouvoir les recopier vers le bas ?

	A	B	C
1	n	x_n	y_n
2	0	0	3
3	1	0,25	2,925
4	2	0,5	2,851875

b. Sélectionner les colonnes B et C et insérer le nuage de points correspondant.

c. À l'aide du graphique obtenu, déterminer une approximation du temps nécessaire pour que le sang du patient ne contienne plus que 1 mL de médicament.

Situation 3 Un phénomène de pollution

Objectif Modéliser une situation à l'aide d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$.

Un bassin destiné à la pisciculture contient 30 000 litres d'eau pure. À cause d'un phénomène de pollution, une eau polluée à 4 % par une substance chimique se déverse dans le bassin de façon continue à la vitesse moyenne de 150 litres par heure. À partir de ce même moment, le bassin se vide à la même vitesse afin de ne pas déborder.
On note $V(t)$ le volume, en litre, de la substance chimique présente à l'instant t, en heure, dans le bassin. On a ainsi $V(0) = 0$.

1. On se place à un instant t_0 ($t_0 \geqslant 0$).
a. Montrer qu'entre les instants t_0 et $t_0 + h$, avec $h > 0$, le volume de la substance chimique que reçoit le bassin est $6h$ litres.

b. Montrer qu'entre les instants t_0 et $t_0 + h$, avec $h > 0$, le volume de la substance chimique qui s'échappe du bassin est égale à $0{,}005 \times V(t_0) \times h$ (on suppose que le taux de pollution reste constant entre t_0 et $t_0 + h$ pour h petit).

c. En déduire que $V(t_0 + h) - V(t_0) = 6h - 0{,}005 \times V(t_0) \times h$, puis le taux d'accroissement, entre les instants t_0 et $t_0 + h$, du volume de la substance chimique dans le bassin.

d. On admet que la fonction $V(t)$ est dérivable en t_0.
Déduire alors de la question précédente l'expression de $V'(t_0)$ en fonction de t_0.

e. En déduire une équation différentielle dont la fonction V est solution.

2. **a.** On a obtenu le résultat ci-contre avec un logiciel de calcul formel. Interpréter et vérifier le résultat obtenu.

RésolEquaDiff(y' + 0.005 y = 6, (0, 0))
→ $y = -1200\, e^{-\frac{x}{200}} + 1200$

b. CALCULATRICE Tracer à la calculatrice la courbe de la fonction V solution du problème, en choisissant des unités adaptées.

c. On estime que la vie des poissons est en danger lorsque que le taux de substance chimique dans l'eau du bassin atteint 2 %. Déterminer graphiquement combien de temps après le début de la pollution ce taux sera atteint.

1. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

1. Définition de l'équation différentielle $y' = f$

Définitions

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- **Résoudre sur I l'équation différentielle $y' = f$**, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$, donc F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Primitive d'une fonction

Définition

Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple

La fonction $F : x \mapsto 4x + 1$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4$ sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 4 = f(x)$.

Remarque

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I.

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété

DÉMO p. 218

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et G une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I (c'est-à-dire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$) sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

Exemple

La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, car $\exp' = \exp$.
Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x + C$, où C est une constante réelle.

Propriété

DÉMO p. 219

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 5$; $(E) : y' = 3x^2 - 4x + 1$.
2. $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$; $(E) : y' = x\mathrm{e}^x$.

Solution commentée

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$, donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme uv avec $u(x) = x - 1$; $v(x) = \mathrm{e}^x$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
Donc $f' = u'v + v'u$ et $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$, donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1 p. 226

Méthode 2 Vérifier qu'une fonction est une primitive

Soit la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$.
On admet que F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

- Vérifier que F est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$.

Solution commentée

Pour vérifier que F est une primitive de f, il suffit de dériver F.

$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x)$.

Ainsi, $F' = f$ et F est bien une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 6 p. 226

Méthode 3 Déterminer les primitives d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 7$.

1. Vérifier que la fonction G, définie par $G(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 7x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 2.

Solution commentée

1. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{3 \times 2x}{2} + 7 = x^2 - 3x + 7 = f(x)$.
Donc G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. G est une primitive de f, donc l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 7x + C$, où C est une constante réelle.

3. $F(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2^3}{3} - \dfrac{3 \times 2^2}{2} + 7 \times 2 + C = 0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} - 6 + 14 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\dfrac{32}{3}$
Donc $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 7x - \dfrac{32}{3}$.

EXERCICE 7 p. 226

2. Primitives et opérations

1. Primitives des fonctions de référence

Fonction $f : x \mapsto \ldots$	Une primitive $F : x \mapsto \ldots$	Sur l'intervalle :
a (constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Remarque

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions de référence.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^4$. $f(x) = x^n$, avec $n = 4$, donc la fonction $F : x \mapsto \frac{x^5}{5}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.

DÉMO en ligne

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

3. Primitives et composition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f de la forme…	Une primitive F :	Conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout x de I ou $u(x) < 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I.
$u'e^u$	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v est une fonction dérivable sur J et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Méthode 1 Déterminer des primitives à l'aide des fonctions de référence

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=x^4-2x^2-2$ et $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ et $I=]0\,;+\infty[$.

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel $n\neq 0$, une primitive sur I de la fonction $x\mapsto x^n$ est $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc $x\mapsto\frac{x^5}{5}$ est une primitive de $x\mapsto x^4$ et $x\mapsto\frac{x^3}{3}$ est une primitive de $x\mapsto x^2$.
Par ailleurs, une primitive sur I de la fonction $x\mapsto -2$ est la fonction $x\mapsto -2x$.
Donc la fonction F, définie par $F(x)=\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3}-2x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+x^{-3}$. Une primitive sur I de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est la fonction $x\mapsto\ln(x)$.
$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ est la dérivée de $x\mapsto\frac{1}{x}$. Donc une primitive sur I de $x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x\mapsto\frac{1}{x}$.
Par ailleurs, pour tout entier $n<-1$, une primitive sur I de la fonction $x\mapsto x^n$ est $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc $x\mapsto\frac{x^{-2}}{-2}$ est une primitive de $x\mapsto x^{-3}$ sur I.
Donc la fonction F, définie par $F(x)=\ln(x)+\frac{1}{x}-\frac{x^{-2}}{2}=\ln(x)+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$, est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 8 p. 226

Méthode 2 Reconnaître la forme d'une fonction pour déterminer une primitive

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=2x\left(x^2+1\right)^4$ et $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}$ et $I=]1\,;+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}$ et $I=\mathbb{R}$.

Solution commentée

1. On reconnaît la forme $u'u^n$, avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$. On a $f=u'u^4$, donc la fonction F définie par $F=\frac{u^5}{5}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a donc : $F(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^5}{5}$.

2. $f(x)=(2x-1)^{-3}$ et on reconnaît la forme $u'u^n$ avec $u(x)=2x-1$ et $u'(x)=2$.
$f=\frac{1}{2}u'u^{-3}$, donc la fonction F, définie par $F=\frac{1}{2}\times\frac{u^{-2}}{-2}$, est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.
On a donc : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(2x-1)^{-2}}{-2}=-\frac{1}{4(2x-1)^2}$.

3. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^{3x}+1$ et $u'(x)=3e^{3x}$.
De plus, pour tout nombre réel x, $u(x)>0$.
$f=\frac{1}{3}\frac{u'}{u}$ donc la fonction F définie par $F=\frac{1}{3}\times\ln(u)$ est une primitive de f sur I.
On a donc : $F(x)=\frac{1}{3}\times\ln\left(e^{3x}+1\right)$.

EXERCICE 11 p. 227

3. Équations différentielles

1. Solution d'une équation différentielle

Définitions

- Une **équation différentielle** est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée.
- Une **solution d'une équation différentielle** est une fonction qui vérifie cette égalité.

Exemple

On considère l'équation différentielle $y' = 2y$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ est une solution de cette équation différentielle, car $f'(x) = 2e^{2x} = 2f(x)$.

2. Résolution d'équations différentielles

Propriété (équation différentielle $y' = ay$)

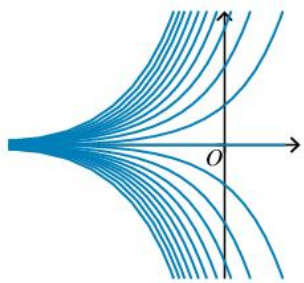
DÉMO p. 218

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

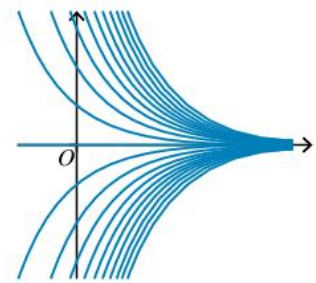
Remarques

- Soit a un réel non nul fixé. Les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ ont les allures suivantes.

Si $a > 0$



Si $a < 0$



- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.

Propriétés (équation différentielle $y' = ay + b$)

Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.

- (E) admet une unique solution particulière constante, qui est la fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

DÉMO p. 219

- Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

DÉMO en ligne

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = y + 1$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{x} - 1$.
Soit g la seule solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.
$g(x) = Ce^{x} - 1$ et $g(0) = 1 \Leftrightarrow Ce^{0} - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Donc $g(x) = 2e^{x} - 1$.

Propriété (équation différentielle $y' = ay + f$)

DÉMO p. 233

Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} + g(x)$, où C est une constante réelle.

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction h est une solution particulière de l'équation (E).

1. $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}$ et $(E) : 6y' + 8y = 0$.
2. $h(x) = \mathrm{e}^{3x+1} - 2$ et $(E) : y' = 3y + 2$.

Solution commentée

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}$, d'où :
$6h'(x) + 8h(x) = 6 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}\right) + 8\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}} = -8\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}} + 8\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}} = 0$, donc h est une solution particulière de (E).

2. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$.
$3h(x) + 2 = 3\left(\mathrm{e}^{3x+1} - 2\right) + 6 = 3\mathrm{e}^{3x+1}$, donc $h'(x) = 3h(x) + 2$ et h est une solution particulière de (E).

EXERCICE 29 p. 228

Méthode 2 Résoudre des équations différentielles

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : y' = 5y$
2. $(E_2) : 4y' + 3y = 0$
3. $(E_3) : y' = -y + 2$

Solution commentée

1. L'équation (E_1) est du type $y' = ay$, donc les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{5x}$, où C est une constante réelle.

2. $(E_2) \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{4}y$. C'est une équation du type $y' = ay$, donc les solutions de l'équation (E_2) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}$, où C est une constante réelle.

3. L'équation (E_3) est du type $y' = ay + b$, donc les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{-x} + 2$, où C est une constante réelle.

EXERCICE 31 p. 229

Méthode 3 Résoudre une équation différentielle avec une condition initiale

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 2$ est solution de l'équation (E).
2. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$.

Solution commentée

1. $g'(x) = -1$, donc $g'(x) - \frac{1}{2}g(x) = -1 - \frac{1}{2}(-x - 2) = \frac{1}{2}x$, donc g est solution de (E).

2. $(E) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$. (E) est une équation de la forme $y' = ay + f$ dont g est une solution particulière, donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + g(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - x - 2$, où C est une constante réelle.

3. $h(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - x - 2$. Par ailleurs, $h(2) = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e} - 4 = 0 \Leftrightarrow C = \frac{4}{\mathrm{e}}$.
Ainsi $h(x) = \frac{4}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - x - 2 = 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1} - x - 2$.

EXERCICE 38 p. 229

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration

- Soit $C \in \mathbb{R}$. La fonction f_C, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_C(x) = Ce^{ax}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f_C'(x) = Cae^{ax}$, donc $f_C'(x) = af_C(x)$.
f_C est donc une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
- On va maintenant montrer que les fonctions f_C sont les seules solutions de (E).

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation (E).
On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$.
Or, pour tout réel x, $g'(x) = ag(x)$, car g est solution de l'équation différentielle (E), donc $h'(x) = 0$.
Ainsi, h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $h(x) = C$, c'est-à-dire $C = g(x)e^{-ax}$.
Alors, $g(x) = Ce^{ax}$.

- En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = ay$ sont bien les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. Quelle formule de dérivée permet de montrer que $f_C'(x) = Cae^{ax}$?
2. Qu'est-ce qui permet de justifier que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. Écrire le détail du calcul permettant d'arriver à $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$.
4. Comment passe-t-on de $C = g(x)e^{-ax}$ à $g(x) = Ce^{ax}$?

Rédiger une démonstration

1. On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et G une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Justifier que la fonction $F = G + C$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- En déduire que F est une primitive de f sur I.
- Réciproquement, considérer une primitive F de f sur I et poser $H = F - G$.
- Justifier que H est dérivable sur I et montrer que sa dérivée est nulle.
- En déduire que la fonction H est constante et exprimer F en fonction de G.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
> Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
On démontre d'abord l'existence.
f est une fonction continue sur I, donc elle admet une primitive sur I.
Soit G une primitive de f sur I et F la fonction définie sur I par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.
- Justifier que F est bien une primitive de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

On démontre ensuite l'unicité.
Pour cela, on suppose que l'on a deux primitives de f sur I, F_1 et F_2.
- Justifier qu'il existe alors un réel C tel que $F_2 = F_1 + C$.
- Appliquer la relation obtenue en x_0 et en déduire que $C = 0$. Conclure.

3 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$.
> Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Montrer que les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Réciproquement, soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- On pose $g(x) = -\dfrac{b}{a}$. Vérifier que g est une solution de (E).
- Justifier que la fonction $f - g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f - g)'(x)$ pour tout réel x.
- En déduire que la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- En déduire une expression de $f - g$, puis de f.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = e^{2x}$.
On admet que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
On note (E_0) l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.
- Démontrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E_0).

2 On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = -\dfrac{2}{1 + e^{-2x}}$.
Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par l'égalité $f(x) = e^{2x} g(x)$.
- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si :

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Démontrer une équivalence
Pour démontrer que deux propositions P et Q sont équivalentes, on peut écrire des propositions successives toutes équivalentes à P jusqu'à ce que l'on obtienne la proposition Q.

Carte mentale

Primitives, équations différentielles

Calculer une primitive d'une fonction

Fonction $f : x \mapsto \ldots$	Une primitive $F : x \mapsto \ldots$
a (constante réelle)	ax
x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x

Fonction f de la forme…	Une primitive F :
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$

Déterminer une primitive d'une fonction

- Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Résoudre sur I l'**équation différentielle** $y' = f$, c'est trouver toutes les primitives F de f sur I.
- Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
- Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle et G une primitive donnée de f sur I.
- Soient F et G deux primitives respectives de f et de g.
  $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf (k réel donné).

Résoudre $y' = ay$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel) sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle.

Résoudre $y' = ay + b$

- L'unique solution particulière constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$ et b réel) est la fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$.
- Les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

où C est une constante réelle.

Résoudre $y' = ay + f$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (a réel et f une fonction) sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{ax} + g(x)$$

où C est une constante réelle et g une solution particulière de l'équation différentielle.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 On considère l'équation différentielle :
$(E) : y' = x^2 - x$.
(a) $f : x \mapsto 2x - 1$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
(b) $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
(c) $f : x \mapsto 1$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2 Une primitive sur $]-3 ; +\infty[$ de la fonction f, définie par $f(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$, est la fonction :
(a) $x \mapsto \frac{2x-1}{x+3}$
(b) $x \mapsto \frac{-2x+1}{x+3}$
(c) $x \mapsto \frac{2x+1}{x+3}$

3 Les primitives sur $]2 ; +\infty[$ de la fonction f, définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$, sont les fonctions :
(a) $x \mapsto C\ln(x-2)$, où $C \in \mathbb{R}$.
(b) $x \mapsto -\frac{1}{(x-2)^2} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
(c) $x \mapsto \ln(x-2) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

4 La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{2x+1}$ telle que $F(0) = 1$ est la fonction définie par :
(a) $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$
(b) $x \mapsto e^{2x+1} - e$
(c) $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$

5 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' = y$ sont les fonctions f définies par :
(a) $f(x) = Ce^{3x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
(b) $f(x) = Ce^{\frac{1}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
(c) $f(x) = Ce^{-3x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

6 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -5y + 3$ sont les fonctions f définies par :
(a) $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{3}{5}$, où $C \in \mathbb{R}$.
(b) $f(x) = Ce^{-5x} - \frac{3}{5}$, où $C \in \mathbb{R}$.
(c) $f(x) = Ce^{-5x} + \frac{3}{5}$, où $C \in \mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 La fonction f, définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = \ln(x) + x$
est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{x+1}{x}$.

2 La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^x$.

3 La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$ est une primitive sur $]1 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2(x-1)^2}$.

4 Les primitives sur $]2 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$ sont les fonctions F définies par :
$F(x) = 2\sqrt{2x-4}$.

5 La primitive sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ qui s'annule en 2 est la fonction $F : x \to \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x-1}{3}\right)$

6 Toutes les courbes représentatives des fonctions solutions de l'équation $y' = ay$ $(a > 0)$ admettent une asymptote horizontale en $+\infty$.

7 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^x(e^x - e^{-x})$
est la seule solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 2$ telle que $f(0) = 0$.

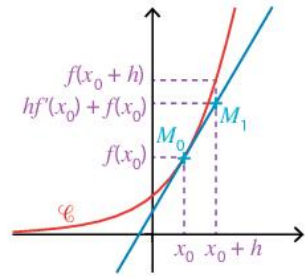
8 La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
est solution de l'équation différentielle $y' = y + 2\sin(x)$.

TP 1 La méthode d'Euler (1) ALGO PYTHON

Objectif Calculer des images à l'aide d'un algorithme.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $M_0(x_0 ; y_0)$ un point de $\mathscr{C}$.
La courbe de f peut être approchée près de M_0 par sa tangente en M_0.
Soit h un nombre réel non nul, on a alors l'approximation suivante, dite approximation d'Euler : $f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$. (1)

Soit f la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ vérifiant $f(1) = 0$.



1. Soit h un nombre réel strictement positif. En utilisant l'approximation (1), écrire une valeur approchée de $f(1 + h)$ en fonction de h, puis une valeur approchée de $f(1 + 2h)$ en fonction de h et $f(1 + h)$.
2. **a.** Soient a un nombre réel tel que $a > 1$ et h un réel tel que $h > 0$.
Recopier et compléter le script de la fonction euler1 ci-contre, dont les arguments sont a et h et qui renvoie une valeur approchée de $f(a)$.
b. À l'aide de cette fonction et en utilisant différentes valeurs de h, déterminer une valeur approchée de $f(2)$, $f(3)$ et $f(7)$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f, puis contrôler les résultats obtenus à la question précédente.
4. Modifier le script précédent pour qu'il renvoie, pour tout $h > 0$, une valeur approchée de $f(a)$ pour tout réel a de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

```
def euler1(a,h):
    x=...
    y=...
    while x<a:
        x=a+h
        y=...
    return y
```

TP 2 La méthode d'Euler (2) ALGO PYTHON

Objectif Représenter les solutions d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + 5$. Pour représenter différentes solutions de cette équation sur l'intervalle $[0 ; 1]$, on peut utiliser la méthode d'Euler (voir le TP 1).
Soient f la solution de l'équation (E) vérifiant $f(0) = 0{,}5$ et n un entier naturel $(n \geqslant 2)$.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $x_k = \frac{k}{n}$ et $y_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. En utilisant l'approximation d'Euler, vérifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:
$$y_k \approx \frac{n+2}{n} y_{k-1} + \frac{5}{n}.$$
2. Écrire le script d'une fonction euler2 d'argument n qui renvoie une liste contenant les valeurs approchées des réels y_k, pour k allant de 0 à n, obtenues grâce à l'approximation précédente.
3. **a.** Programmer la fonction representations d'argument n ci-contre.
b. Tester cet algorithme pour différentes valeurs de n.
c. Quel est le rôle cet algorithme ?

```
from math import exp
import matplotlib.pyplot as pl
def representations(n):
    X=[]
    Y=[]
    for i in range (n+1):
        X.append(i/n)
        Y.append(3*exp(2*i/n)-5/2)
    pl.plot(X,Y)
    pl.plot(X,euler2(n))
    pl.show()
```

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- L'instruction L.append(x) ajoute la valeur de x à la fin de la liste L.
- Dans la bibliothèque matplotlib.pyplot :
  – si X et Y sont deux listes de nombres, l'instruction plot(X,Y) renvoie une courbe reliant les points dont les abscisses sont les nombres de la liste X et les ordonnées ceux de la liste Y.
  – l'instruction show() affiche la fenêtre graphique.

TP 3 Familles de solutions

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Visualiser les solutions d'une équation différentielle à l'aide d'un logiciel de géométrie.

On considère l'équation différentielle (E_a) : $y' = -ay$, où a est une constante réelle positive.

1 **a.** Dans un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur a variant de 0 à 1 avec un pas de 0,01 et un curseur k variant de 0 à 50 avec un pas de 0,10.

b. Écrire dans la barre de saisie : RésolEquaDiff(-ay, 0, k, 50, 0.1)
On obtient le lieu (c'est-à-dire l'ensemble des points) de la représentation graphique d'une fonction solution de (E_a).

c. Activer la trace du lieu et faire varier les curseurs a et k.
- a étant fixé, qu'obtient-on à chaque valeur de k ?
- k étant fixé, que fournit chaque nouvelle valeur de a ? Quel est son impact sur la courbe ?

2 La vitesse d'élimination $y'(t)$ d'un médicament est proportionnelle à la quantité, en mg · L^{-1}, de produit $y(t)$ restant dans le sang : on a $y'(t) = -ay(t)$, où t est le temps en heure et a une constante.
À $t = 0$, on a injecté 40 mg · L^{-1} de médicament à un malade. Une heure plus tard, il ne reste plus que 20 mg · L^{-1} dans le sang du patient.
Comment régler les curseurs a et k pour que la courbe obtenue corresponde aux données ?

TP 4 Une équation différentielle avec second membre

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Résoudre une équation différentielle avec un logiciel de calcul formel.

1 **a.** Avec le menu « Calcul formel » d'un logiciel de géométrie, entrer les instructions suivantes, puis noter dans le tableau les résultats obtenus après l'avoir recopié.

Instruction	Résultat
RésolEquaDiff(y' − 2y = cos(x))	
Simplifier(RésolEquaDiff(y' − 2y = cos(x)))	
RésolEquaDiff(y' − 2y = cos(x), (0, 1))	
Simplifier(RésolEquaDiff(y' − 2y = cos(x), (0, 1)))	

b. On cherche la solution de l'équation différentielle $y' - 2y = \cos(x)$ vérifiant la condition $y(0) = 2$.
Quelle solution est donnée par le logiciel ? Vérifier cette solution par le calcul.

2 Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle avec le logiciel, puis vérifier par le calcul la solution particulière donnée.

a. $y' - y = \sin(x) - 2\cos(x)$, avec $y(0) = 2$.

b. $y' + y = (x^2 - 1)e^x$, avec $y(0) = 0$.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie dynamique

- Le mode Trace permet de visualiser des lieux de points. On l'active en faisant un clic droit sur le lieu ou sur le point et en choisissant « Afficher la trace ». Pour effacer la trace, il suffit de rafraîchir l'image (menu Affichage).

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Calculer mentalement les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto e^{3x}$
2. $g : x \mapsto \sin(5x+2)$
3. $h : x \mapsto \dfrac{7}{x-3}$
4. $i : x \mapsto \sqrt{5x}$

2 Calculer mentalement une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$
2. $g : x \mapsto -3e^{-3x}$
3. $h : x \mapsto 15(5x-2)^2$
4. $i : x \mapsto \dfrac{-8}{(8x-1)^2}$

3 QCM

Choisir la bonne réponse.

Les primitives de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ sont de la forme :

(a) $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$

(b) $x \mapsto \ln(x) + C, C \in \mathbb{R}$

(c) $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

4 Dans chaque cas, reconnaître la forme $u'e^u$ et déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.
2. $f(x) = (3x^2+1)e^{x^3+x+8}$; $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{-2}{xe^{2\ln(x)}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

5 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$?

1. $x \mapsto Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}$.
2. $x \mapsto Ce^{\frac{x}{2}}, C \in \mathbb{R}$.
3. $x \mapsto Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}$.

6 Dans chaque cas, dire si la fonction f donnée est solution sur $\mathbb{R}$ ou non de l'équation différentielle $y' - 3y = -2$.

1. $f(x) = e^{-3x} + \dfrac{2}{3}$
2. $f(x) = 4e^{3x} + \dfrac{2}{3}$
3. $f(x) = e^{3x} - \dfrac{2}{3}$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

7 VRAI OU FAUX

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.
2. Deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et ayant les mêmes primitives sont égales.
3. La fonction exponentielle est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y$.

8 Reconnaître la forme $u' \times u^n$ (avec n entier naturel non nul) et déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5(5x-1)^3$
2. $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$
3. $f(x) = -e^{-x}\left(e^{-x}+1\right)^4$

9 Reconnaître la forme $\dfrac{u'}{u}$ et déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ et $I = \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. $f(x) = \dfrac{-10xe^{-5x^2}}{e^{-5x^2}}$ et $I = \mathbb{R}$.

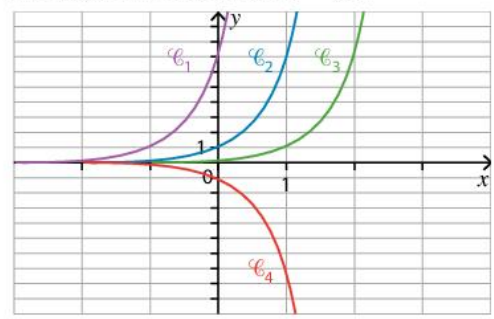
10 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes.

1. $y' - \dfrac{5}{2}y = 0$
2. $2y' - 4y = 0$
3. $y' + 3y = 0$
4. $5y' + y = 0$

11 Dans chaque cas, déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée.

1. $y' = -2y$ avec $y(0) = -3$.
2. $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$.
3. $4y' - 5y = 0$ avec $y(0) = 5$.

12 On a représenté ci-dessous des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$.



• Donner pour chaque courbe une condition initiale vérifiée par la fonction.

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont des fonctions strictement croissantes.
2. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 4y = -1$ telle que $g(0) = \frac{3}{4}$.
   • La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 2.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

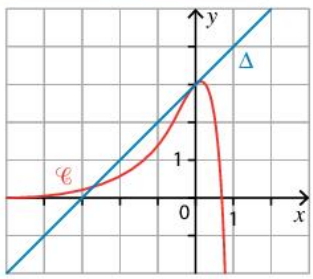
Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

On considère les équations différentielles suivantes :
$$(E_1) : y' = 3y \text{ et } (E_2) : y' = y.$$
La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, égale à la somme de deux fonctions g_1 et g_2 solutions respectives des équations (E_1) et (E_2).
La droite Δ représente la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
• À partir des données du graphique, déterminer l'expression de la fonction g.



Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Une équation différentielle est dite du second ordre lorsqu'elle fait intervenir la dérivée seconde d'une fonction.
Par exemple, l'équation $(E) : y'' + \omega^2 y = 0$, avec ω réel non nul, est une équation différentielle du second ordre.
1. Montrer que les fonctions du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, où A et B sont des constantes réelles, sont solutions de l'équation (E).
2. Présenter des situations concrètes qui peuvent être modélisées par une équation différentielle de ce type.

Equation différentielle $y' = f$ et primitive

1 **Calculer**

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

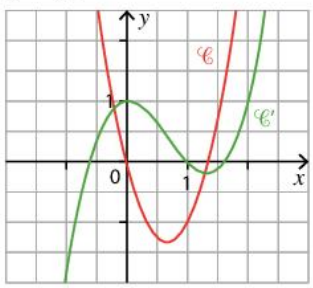
1. $f : x \mapsto 5x^2 - 2x - 5$; $(E) : y' = 10x - 2$
2. $f : x \mapsto 1 - e^{-2x+1}$; $(E) : y' = 2e^{-2x+1}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; $(E) : y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$
4. $f : x \mapsto \cos(x)$; $(E) : y' = -\sin(x)$

2 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation (E) sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{(x-2)^3}{3}$; $(E) : y' = (x-2)^2$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-x^2+1}$; $(E) : y' = xe^{-x^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3(3x+6)}$; $(E) : y' = \dfrac{1}{(3x+6)^2}$ et $I =]-3 ; +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$; $(E) : y' = \dfrac{1}{2x-1}$ et $I = \left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

3 **Représenter**

On donne ci-dessous deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'une représente une fonction f et l'autre une solution de l'équation différentielle $y' = f$.



• Quelle est la courbe qui représente f ? Justifier.

4 On lâche une pomme du haut d'un arbre de 10 mètres. Lors de sa chute :

– la vitesse $v(t)$ (exprimée en $m \cdot s^{-1}$) de la pomme en fonction du temps (exprimé en s) est solution de l'équation différentielle $y' = 9{,}8$;

– la distance $d(t)$ (exprimée en m) parcourue par la pomme est solution de l'équation différentielle $y' = v$.

• Quelle est la vitesse de la pomme lorsqu'elle s'écrase au sol ?

5 QCM

Pour chaque question, donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées. Justifier.

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ est :
   (a) $F : x \mapsto xe^{-x}$
   (b) $F : x \mapsto (-x-2)e^{-x}$
   (c) $F : x \mapsto -\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)e^{-x}$
2. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2e^x$ sont les fonctions :
   (a) $F : x \mapsto 2(e^x + 1) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
   (b) $F : x \mapsto 2xe^x + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
   (c) $F : x \mapsto e^{2x} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
3. L'unique primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 est :
   (a) $F : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} + 1$
   (b) $F : x \mapsto \ln(x)$
   (c) $F : x \mapsto (x-1)\ln(x)$

6 Associer à chaque fonction de la colonne de gauche une de ses primitives sur $\mathbb{R}$ dans la colonne de droite.

$f : x \mapsto 0$	$F : x \mapsto 3x^2 + 2x$
$g : x \mapsto 1$	$G : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3}$
$h : x \mapsto x^3 + x^2$	$H : x \mapsto 6$
$i : x \mapsto 6x + 2$	$I : x \mapsto x + 6$

7 La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

1. Déterminer la fonction f.
2. Écrire toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la fonction h telle que $h' = f$ et $h(0) = 0$.

Calculs de primitives

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = x^3 + x - 12$
3. $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4$
4. $f(x) = 0{,}1x^4 + \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{x}{100}$

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{4}{x^5}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{2}{3}$

10 VRAI OU FAUX

Dire si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. La fonction carré est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x$.
2. La fonction carré est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x+1$.
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet pour primitive sur $]0\,;+\infty[$ la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
4. La fonction $x \mapsto x\sin(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = 10(2x+1)^4$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ et $I = \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
3. $f(x) = \dfrac{-1}{2(x-2)^3}$ et $I =]2\,;+\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{2}{2x-6}$ et $I =]3\,;+\infty[$.

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = -\sin(-x)$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 2\cos(2x+1)$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$
2. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$
3. $f(x) = 6\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+2\right)^5$
4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$

14 **Décollage d'une fusée**

Une fusée décolle verticalement du sol à l'instant $t = 0$. Lors des deux premières minutes de vol, sa vitesse (en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) à l'instant t (en s) est donnée par la formule $v(t) = 0{,}06t^2 + 0{,}8t$ et on note $d(t)$ la distance (en m) qu'elle a parcourue.

1. Sachant que d est une primitive de la fonction v, déterminer l'expression de $d(t)$.
2. À quelle distance de la Terre se trouve la fusée après deux minutes de vol ?

15 On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \left(-x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$ et $F(x) = \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

16 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x.$$

1. Donner une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire toutes les primitives de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$.

17 **Calculer**

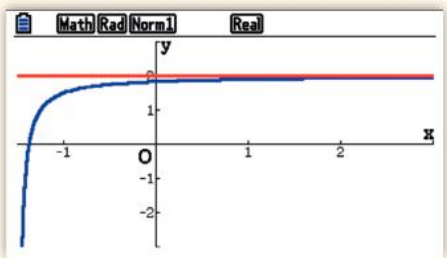
Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I dont on donne une condition initiale.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2$; $I = \mathbb{R}$; $F(0) = 2$.
2. $f(x) = \cos(x)$; $I = \mathbb{R}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$; $I =]0\,;+\infty[$; $F(1) = 1$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0\,;+\infty[$; $F(1) = 2$.
5. $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$; $I = \mathbb{R}$; $F(0) = 0$.

18 PRISE D'INITIATIVE

Soit F une primitive sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ de la fonction f, définie par $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$.

On a tracé, à la calculatrice, la représentation graphique de la fonction F, ainsi que son asymptote horizontale.



- Déterminer l'expression de $F(x)$.

19 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}.$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$:
$$f(x) = x + 4 + \frac{2}{x+1}.$$
2. En déduire une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$.

20 1. Démontrer que la fonction $F : x \mapsto \cos(x) + x\sin(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x\cos(x)$.
2. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

Équation différentielle de la forme $y' = ay$

21 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' = 3y$
2. $y' + 2y = 0$
3. $2y' = y$
4. $3y' - 5y = 0$

22 Associer à chaque équation différentielle de 1 à 4 une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (a) à (d).

1. $y' = -y$
2. $4y' = y$
3. $y' - 4y = 0$
4. $4y' + y = 0$

(a) $x \mapsto e^{4-x}$

(b) $x \mapsto -e^{4x}$

(c) $x \mapsto e^{4-\frac{1}{4}x}$

(d) $x \mapsto 4e^{\frac{1}{4}x}$

23 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
$$y' = 2\,020y.$$
2. Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 2$.

24 VRAI OU FAUX

Soit a un nombre réel non nul et l'équation différentielle $(E) : y' = ay$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est représentée par une courbe qui admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
2. Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique admet une asymptote verticale.
3. Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
4. Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui est constante.

25 Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée

1. $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(0) = 1$.
2. $5y' = y$ et $f(1) = 0$.
3. $y' + y = 0$ et $f'(1) = 2$.

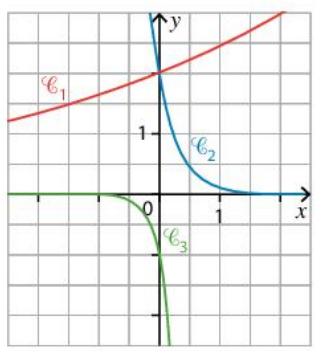
26 **Raisonner**

On considère les équations différentielles :

$(E_1) : y' = -3y$, $(E_2) : y' = 5y$ et $(E_3) : y' = \frac{1}{5}y$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-contre représentent chacune une solution de chacune des équations précédentes dans un repère orthonormé.

• Associer à chaque courbe l'équation différentielle qui lui correspond.



27 ALGO PYTHON

Tuan a écrit le script suivant d'une fonction Python qui retourne la solution d'une équation différentielle.

```
1 from math import exp
2 def solution(a,x_0,y_0):
3     C=y_0/exp(a*x_0)
4     sol=" f est définie par f(x)="
5     sol=sol+str(C)+"e^("+str(a)+"x)"
6     return sol
```

1. Que renvoie l'instruction solution(2,0,1) ?
2. Quelle équation différentielle peut-on résoudre avec cette fonction ?

28 **Datation au carbone 14**

Modéliser, communiquer

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Tant qu'il est en vie, l'organisme d'un être vivant contient la même proportion de carbone 14. À sa mort, la quantité de cet élément chimique décroît.

On note $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 que contient un organisme t années après sa mort.

On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,000121y$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) en prenant comme condition initiale $N(0) = N_0$, où $N_0 \in \mathbb{N}$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel le nombre de noyaux a diminué de moitié. Calculer la demi-vie du carbone 14.

Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

29 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

1. $f(x) = e^{\frac{1+x}{10}}$; $(E) : y' = 0,1y$.
2. $f(x) = e^{3x-2} + 5$; $(E) : y' = 3y - 15$.

30 On considère l'équation différentielle :
$$(E) : y' = -\frac{1}{2}y + 3.$$
1. Donner la seule solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

31 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' = -2y + 5$
2. $y' = y - 3$
3. $2y' + y = 4$
4. $3y' - 6y = 1$

32 Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée.

1. $y' = 3y - 6$ et $f(0) = -1$.
2. $y' = -5y + 4$ et $f(1) = 0$.
3. $y' = y - 1$ et $f(2) = 1$.

33 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' = 0{,}8y + 1{,}6.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
2. Vérifier que toutes les solutions de (E) admettent une asymptote horizontale que l'on précisera.

34 On considère les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{10x} + 5$, où C est une constante réelle.

• Écrire une équation différentielle dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f.

35 **Refroidissement**

Modéliser, communiquer

On place une tasse de thé bouillante dans une pièce où la température est constante et égale à 20 °C. Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de la tasse est proportionnelle à la différence de la température de la tasse et la température de la pièce.
On note $T(t)$ la température (en °C) de la tasse à l'instant t (exprimé en minute).
On suppose que $T(0) = 100$ et, d'après la loi de Newton, il existe une constante réelle k telle que $T'(t) = k(T(t) - 20)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(y - 20)$ et en déduire l'expression de $T(t)$ en fonction de k.
2. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à 40 °C.

a. Démontrer que $k = \dfrac{-\ln(2)}{7}$.

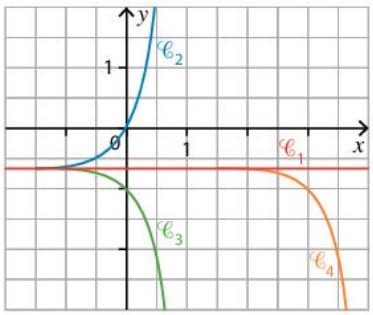
b. Au bout de combien de temps la température du thé devient-elle inférieure à 25 °C ?

36 **Représenter**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' = 3y + 2.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
2. Soit f une solution non constante de l'équation (E). Résoudre l'équation $f(x) = -\dfrac{2}{3}$.
3. On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ représentant chacune une solution de (E).



Déterminer l'expression algébrique de chacune des fonctions représentées.

Équation différentielle de la forme $y' = ay + f$

37 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation (E).

1. $f(x) = e^{-5x+1} + \dfrac{3}{5}$; $(E) : y' = -5y + 3$.
2. $f(x) = 2x + 2$; $(E) : y' = -2y + 4x + 6$.
3. $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$; $(E) : y' = -2y + e^{-2x}$

38 On considère l'équation $(E) : y' = 2y + 2x$.

1. Vérifier que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - \dfrac{1}{2}$, est une solution particulière de l'équation (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

39 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ et l'équation différentielle :

$$(E) : y' = y + e^x.$$

1. Vérifier que la fonction f est une solution particulière de (E).
2. En déduire la seule solution g de l'équation (E) telle que $g(0) = 5$.

40 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - e^{3x}.$$

1. a. Calculer $f'(x)$, puis $f(x) - x^3 + x^2$.

b. En déduire que la fonction f est solution d'une équation différentielle (E) que l'on précisera.

2. Déterminer toutes les solutions de (E).
3. Donner la seule solution de (E) qui s'annule en 0.

41 VRAI OU FAUX

Soit la fonction f définie sur $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(3x^2 - x\right)e^{\frac{1}{x}}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. La fonction f admet des primitives sur I.
2. La fonction $F : x \mapsto \left(6x - 3 + \frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur I.
3. La fonction $F : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur I.
4. La fonction $F : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}} + e$ est une primitive de f sur I.

42 Calculer

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{6x + 3}{x^2 + x + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$
3. $f(x) = 2xe^{-x^2}$

43 Justifier dans chaque cas que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I et déterminer une primitive de f sur I.

1. $f(x) = 2e^{\frac{-5x}{4}}$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x}{\left(e^{2x} + x^2\right)^4}$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{\sqrt{e^x + x}}$; $I = [0 ; +\infty[$

44 Calculer

Déterminer dans chaque cas, sur l'intervalle I donné, la primitive F de la fonction f dont on donne une condition initiale.

1. $I =]0 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$; $F(1) = 1$.
2. $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 3\sin(2x)$; $F(0) = 2$.
3. $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x + 3}$; $F(0) = 0$.

45 On considère les fonctions F et G définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = 1 - x + x\ln(x) \text{ et } G(x) = x(\ln(x) - 1).$$

• Démontrer que F et G sont des primitives de la fonction ln sur $]0 ; +\infty[$.

46 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x - 1)e^{2x}.$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

47 Calculer

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 3x\right)e^{-x}.$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction $F : x \mapsto \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x = 1$.

48 Calculer

Soit la fonction f définie sur $]-4 ; 4[$ par $f(x) = \dfrac{1}{16 - x^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{a}{4 - x} + \frac{b}{4 + x}.$$

2. Déterminer sur $]-4 ; 4[$ l'ensemble des primitives de la fonction f.
3. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0.

49 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{2(x + 1)^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à I, on ait $f(x) = a + \dfrac{b}{(x + 1)^2}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur I.

50 PRISE D'INITIATIVE

1. Justifier que la fonction tangente, définie par le quotient de la fonction sinus par la fonction cosinus, admet des primitives sur l'intervalle $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer ces primitives.
2. Reprendre la même question sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

51 1. Vérifier les résultats suivants obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

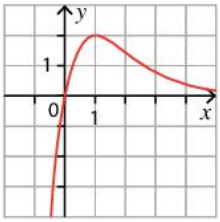
RésolEquaDiff$\left(y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}\right)$
→ $y = c_1 + \tan(x)$

RésolEquaDiff$\left(y' = \dfrac{1}{\cos^4(x)}\right)$
→ $y = c_2 + \dfrac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x)$

2. En déduire une primitive sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{\cos(x)^4} - \dfrac{2}{\cos(x)^2}$.

52 VRAI OU FAUX

On donne la courbe représentative d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.



Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annule en 0.
2. Il existe une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
3. Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
4. Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est négative sur $[1 ; +\infty[$.

53 PRISE D'INITIATIVE

Communiquer

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto \cos^3(x).$$

54 **Modéliser**

Un mobile glisse sans frottement le long d'un axe muni d'un repère $(O ; \vec{i})$. L'accélération instantanée au temps t est donnée par : $a(t) = 4\pi\cos(8\pi t)$.

1. À l'instant $t = 0$, la vitesse initiale du mobile est nulle. Déterminer l'expression de sa vitesse instantanée $v(t)$ en fonction du temps, sachant que $a(t) = v'(t)$.
2. À l'instant $t = 0$, le mobile est en O. Déterminer l'expression de son abscisse $x(t)$ en fonction du temps, sachant que $v(t) = x'(t)$.

55 On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

On note F la primitive de f sur $[0 ; +\infty[$ qui s'annule en 0.

1. On considère la fonction g, définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = F(x) - \frac{1}{2}x.$$

Montrer que la fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Calculer $g(0)$ et en déduire que, pour tout réel strictement positif x, on a $g(x) \geqslant 0$.
3. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction F.

56 VRAI OU FAUX

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{3}{2}y$, avec $y(-2) = e^2$, est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-6y' + 3y = 0$, avec $y(2) = e$, est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' + 3y = 0$, avec $y(2) = \sqrt{e}$, a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

57 PRISE D'INITIATIVE

Soit la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et d la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 3$.

• Déterminer l'expression de la fonction f, sachant que la droite d est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

58 ALGO PYTHON **Approximation**

Chercher, communiquer

1. Le programme ci-dessous permet de tracer une approximation de la courbe de la fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ avec $y(0) = 2$. La fonction odeint de la bibliothèque « scipy » a pour arguments l'équation différentielle, la valeur initiale, et le domaine dans lequel on souhaite tracer la courbe.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 a=-2
6 points=np.linspace(0,50,1000)
7 def equation(Y,points):
8     return a*Y
9 Y=odeint(equation,2,points)
10 plt.plot(points,Y)
11 plt.show()
```

a. À quoi correspondent les arguments de la fonction linspace à la ligne 6 ?

b. Saisir le programme et l'exécuter pour visualiser la courbe.

2. Modifier le programme afin qu'il permette d'obtenir une approximation de la courbe de la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\frac{3}{4}y' + y = 6, \text{ avec } y(1) = \frac{5}{6}.$$

59 **Modéliser, représenter**

Dans le cas de substances radioactives, le taux de variation du nombre $N(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. On admet que la fonction $N(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = -ky$; où k est une constante propre à la substance radioactive.

1. On appelle demi-vie le temps T nécessaire pour que la moitié des atomes radioactifs se désintègrent.

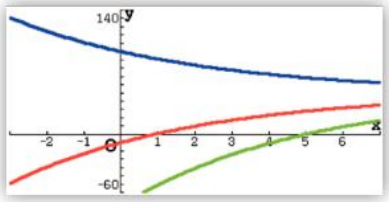
a. Déterminer une relation entre T et k.

b. Sachant que, pour le carbone 14, la demi-vie est égale à 5 730 ans, déterminer une valeur approchée de la constante k.

2. On a retrouvé dans une grotte les restes d'un foyer contenant des morceaux de charbon de bois.
L'étude de cet échantillon a montré que sa proportion en carbone 14 est égale à 13 % de celle d'un échantillon de charbon de bois frais de même masse.
Déterminer l'âge de cet échantillon.

60 **Représenter, communiquer**

Soit (E) l'équation différentielle $5y' + y = 50$.
On a représenté ci-dessous, à la calculatrice, trois courbes représentant chacune une solution de (E).



• Déterminer les expressions des trois fonctions représentées.

61 **Ventilation de l'air**

Modéliser

Depuis 1982, la ventilation de l'air est obligatoire dans les logements français. Lorsque l'extraction de l'air ne se fait pas correctement, le taux de CO_2 augmente, ce qui peut avoir des conséquences sur la santé des personnes sensibles.
La concentration en CO_2 dans l'air est mesurée en ppm (parties par million), 1 ppm valant 10^{-6}.

1. Dans un appartement de volume égal à 400 m^3, une famille absorbe 0,1 m^3 d'oxygène par heure et produit la même quantité de CO_2. La ventilation extrait 100 m^3 d'air par heure. Cet air est remplacé par un air de même volume, de concentrations en CO_2 et en O_2 constantes.
On note $Q(t)$ la concentration en CO_2 dans l'appartement et q la concentration en CO_2 de l'air extérieur (en ppm).
On admet que Q vérifie l'équation différentielle :

$$(E) : Q' = \frac{0,1}{400} - \frac{100}{400}(Q - q).$$

a. Un air extérieur de qualité normale a une concentration en CO_2 environ égale à 350 ppm.
Montrer que l'équation différentielle (E) admet une solution constante Q_0 que l'on déterminera.
b. En déduire les solutions Q de (E).
2. a. Quelle est la limite de $Q(t)$ quand t tend vers $+\infty$?
b. À l'intérieur, une concentration entre 600 ppm et 800 ppm est dite « correcte ». Au-delà de 1 000 ppm, des effets peuvent se faire ressentir chez les personnes fragiles.
Que peut-on dire du système de ventilation de l'appartement ?

62 **Raisonner, communiquer**

Soit f la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : 2y' - 5y = 4$ telle que $f''(1) = \frac{25}{2}$.

1. Démontrer que si y est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E), alors, pour tout réel x, on a :

$$y''(x) = \frac{25}{4}y(x) + 5.$$

2. En déduire les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Déterminer une expression de la fonction f.
5. CALCULATRICE Vérifier les résultats obtenus aux questions 3 et 4 en représentant la courbe et la tangente à la calculatrice.

63 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

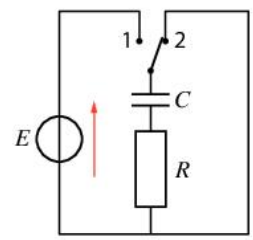
$$f(x) = -9e^{\frac{-1-x}{4}} + 8.$$

1. Calculer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que f soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

64 **Charge d'un condensateur**

Modéliser, raisonner

On considère le montage électrique ci-dessous, composé d'une source de tension continue E de 5 V, d'une résistance R de 2,2 kΩ et d'un condensateur de capacité C de 10 μF.



Avant l'instant $t = 0$, l'interrupteur est en position 2 et le condensateur est déchargé.
À $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 1 et le condensateur se charge.
La tension aux bornes du condensateur est une fonction u (en V) du temps t (en s) définie sur $[0 ; +\infty[$.
On démontre que cette fonction u est une solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$RCu' + u = E.$$

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction u sous la forme $u' = au + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
2. Déterminer la forme générale des solutions u sur $[0 ; +\infty[$ de cette équation différentielle.
3. Le condensateur étant déchargé à l'instant $t = 0$, on a $u(0) = 0$. Déterminer l'unique fonction u correspondante.
4. Au bout de combien de temps (en ms) la tension aux bornes du condensateur atteindra-t-elle 3,15 V ?

65 QCM

Indiquer la (ou les) réponse(s) exacte(s) parmi les réponses proposées et justifier.

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 5$ et f la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

(a) f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

(d) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est –5.

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y - 2y' = 0.$$

(a) La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution de (E).

(b) La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ est la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

(c) La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}$ est la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

(d) La fonction $x \mapsto 2e^{x} + e^{\frac{1}{2}x}$ est une solution de l'équation différentielle $y - 2y' = -2e^{x}$.

3. On considère les équations différentielles :

$$(E) : y' + y = 2\sin(x) \text{ et } (E_0) : y' + y = 0.$$

(a) La fonction $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ est solution de (E).

(b) La fonction $x \mapsto -\cos(x) + \sin(x)$ est solution de (E).

(c) Les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, où C est une constante réelle, sont solutions de (E_0).

(d) La fonction $x \mapsto e^{-x} - \cos(x) + \sin(x)$ est la solution de (E) qui s'annule en 0.

66 **Démonstration**

Raisonner

Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ et g une solution particulière de cette équation sur I.

1. Soit f_1 une solution de (E). On pose $h = f_1 - g$. Montrer que h est une solution de l'équation $(E_0) : y' = ay$.
2. Réciproquement, montrer que si h est une solution de (E_0), alors $f_1 = h + g$ est une solution de (E).
3. En déduire l'expression des solutions de (E) sur I.

67 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = x^2 + x.$$

1. Trouver les valeurs des réels a, b et c tels que la fonction g, définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$, est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

68 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 3y = 2e^{-x}.$$

1. Déterminer une fonction g de la forme $g(x) = ae^{-x}$ (a réel) qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

69 **Courant alternatif**

En courant alternatif, la force électromotrice E varie en fonction du temps t de telle sorte que :

$E(t) = E_0 \cos(\omega t)$, où ω et E_0 sont des réels donnés.

On considère un circuit électrique comprenant une résistance R et une bobine d'inductance L.

L'intensité i est telle que, sur $[0 ; +\infty[$, on a :

$$Li' + Ri = E \qquad (1)$$

1. On prend $E_0 = 2$ V, $\omega = 1$ rad·s^{-1}, $L = 1$H et $R = 7\ \Omega$. Vérifier que la fonction i_1, définie par :

$$i_1(t) = 0{,}28\cos(t) + 0{,}04\sin(t),$$

est une solution de l'équation (1).

2. En déduire les solutions de l'équation (1).

70 **Méthode d'Euler** TABLEUR

Chercher, modéliser, communiquer

Pour construire une approximation de la courbe représentative d'une fonction f en utilisant la méthode d'Euler, on construit une suite de points $M_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_{n+1} = x_n + h$, avec h réel positif, et $y_{n+1} = f(x_n + h)$, en utilisant l'approximation affine :

$$f(x_n + h) \approx f(x_n) + hf'(x_n) \text{ (voir p. 211).}$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y^2 = 4, \text{ avec } y(0) = 0.$$

• Ne connaissant pas la forme générale de la solution de cette équation, utiliser la méthode d'Euler avec $h = 0{,}1$ pour représenter, dans un tableur, une approximation de la courbe représentative de cette solution sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

71 **Élimination d'un médicament**

On injecte 15 mg d'un médicament dans le sang d'un patient. On note $Q(t)$ la quantité de médicament présent dans le sang en mg à l'instant t exprimé en heure. On admet que la fonction Q est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$, où λ est un réel non nul.

1. Déterminer l'expression de $Q(t)$ en fonction de λ.
2. On constate qu'au bout de deux heures, l'organisme du patient contient encore 10 mg de médicament. En déduire la valeur de λ.

72 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. Justifier que la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
2. Déterminer le sens de variation de F. En déduire le signe de la fonction F.
3. ALGO PYTHON On souhaite obtenir une valeur approchée de $F(1)$.

Soit n un entier naturel et $n \geqslant 2$. On pose, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $x_k = \dfrac{k}{n}$ et $y_k = F(x_k)$.

a. En utilisant l'approximation affine d'Euler, justifier que, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $y_{k+1} \approx y_k + \dfrac{\mathrm{e}^{-x_k^2}}{n}$

b. Écrire une fonction Python d'argument n qui renvoie une valeur approchée de $F(1)$.

c. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction pour $n = 10\ 000$?

73 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x(x-1)^2}$.

1. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire la primitive F de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ telle que $F(2) = 10$.

74 PRISE D'INITIATIVE

Déterminer toutes les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)}.$$

75 PRISE D'INITIATIVE

Déterminer toutes les primitives sur $]-1 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

76 1. Soient a et b deux nombres réels.
Dériver la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^x (a\cos(x) + b\sin(x)).$$

2. En déduire toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x \sin(x).$$

77 **Calculer**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Clara affirme que la fonction F, définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

est une primitive de f sur l'intervalle $]-1 ; 1[$.

- A-t-elle raison ? Expliquer.

78 **Sécurité routière**

Lors d'une soirée, Noah a bu à jeun une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à son taux d'alcool dans le sang, exprimé en $\mathrm{g \cdot L^{-1}}$, en fonction du temps t, exprimé en heure.

Comme il faut un certain temps pour que le corps absorbe l'alcool, on peut modéliser son taux d'alcool par une fonction f définie sur $[0{,}05 ; +\infty[$.

On admet que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -y + k\mathrm{e}^{-t}$ et $f(0{,}05) = 0$, où k est une constante positive dépendant de la quantité d'alcool absorbée et la corpulence de l'individu.

1. a. Exprimer, en fonction de k, le nombre réel a tel que la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = at\mathrm{e}^{-t}$$

soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

b. En déduire l'expression de $f(t)$ en fonction de k.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f et vérifier qu'il ne dépend pas de k.

3. Au bout de 3 heures, Noah teste son alcoolémie et obtient un taux d'alcool égal à $0{,}8\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$.

Sachant que Noah est un jeune conducteur et que, selon la loi française, le taux d'alcool maximal autorisé pour les jeunes conducteurs est $0{,}2\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$, combien de temps devra-t-il patienter pour pouvoir prendre le volant et rentrer chez lui ?

79 L'objectif de cet exercice est de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant simultanément :

- $f(-x)f'(x) = 1$ pour tout réel x ;
- $f(0) = -2$.

1. On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant les deux propriétés précédentes et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x)f(x).$$

a. Démontrer que la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

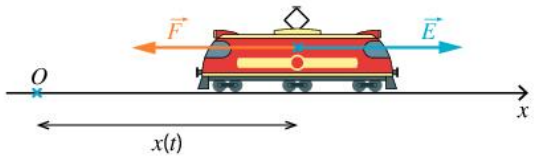
b. Calculer la dérivée de la fonction g et en déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

c. En déduire que la fonction f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

2. Démontrer qu'il existe une unique fonction f solution du problème et donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

80 **Mouvement d'une locomotive**

Une locomotive de 48 tonnes se déplace sur une voie ferrée rectiligne d'origine O. Le moteur de la locomotive génère une force d'entraînement constante $\vec{E}$ de valeur 36 000 kN ; les forces de frottement $\vec{F}$ sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire et le coefficient de proportionnalité est égal à 240 000 $\text{N} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$.



On note $x(t)$ la distance, en kilomètre, parcourue par la locomotive en fonction du temps t, en heure. À l'instant t, sa vitesse est $x'(t)$ et son accélération est $x''(t)$.

Selon les lois de Newton, $\vec{E} + \vec{F} = m\vec{a}$, où le vecteur $\vec{a}$ représente l'accélération de la locomotive et m la masse de la locomotive en kg.

1. Justifier que :

$$48\,000x''(t) + 240\,000x'(t) = 36\,000\,000.$$

2. On note $v(t)$ la vitesse de la locomotive à l'instant t.

a. Démontrer que x est solution de l'équation $(E) : 48\,000y'' + 240\,000y' = 36\,000\,000$ si et seulement si v est solution de l'équation :

$$(E') : y' = -5y + 750.$$

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E').

c. On suppose que $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de t.

3. Étudier le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

4. Au bout de combien de kilomètres la vitesse de la locomotive dépassera-t-elle 120 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

81 **Une équation logistique** Approfondissement

Une équipe de biologistes cherche à étudier l'évolution d'une population de petits rongeurs.

1. Elle étudie d'abord en laboratoire l'évolution d'une population qui compte initialement 50 individus. La taille de la population t années après le début de l'expérience est notée $f(t)$ et exprimée en centaines d'individus. On peut montrer que la fonction f est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4} \text{ ; avec } f(0) = 0{,}5.$$

a. Déterminer l'expression de $f(t)$.

b. Déterminer le sens de variation de f puis la limite de $f(t)$ en $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.

c. Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs ?

2. En réalité, dans le milieu naturel où évolue ce petit rongeur, un prédateur limite la croissance de la population. On note $g(t)$ le nombre de rongeurs, en centaines d'individus vivants t années après le début de l'étude. Pour modéliser l'évolution de cette population, les scientifiques ont utilisé un modèle dit de Verhulst et on admet que la fonction g est solution de l'équation différentielle, appelée équation logistique, $(E) : y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{12}$, et que $g(0) = 20$.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $g(t) > 0$. On définit la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ par $h = \frac{1}{g}$.

Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}.$$

b. Donner toutes les solutions de l'équation (E') et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de g.

c. Déterminer le sens de variation de g puis la limite de $g(t)$ en $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.

82 **Modèle de Gompertz**

Pour étudier la population d'une espèce en voie d'extinction, on note $f(t)$ le nombre (exprimé en millier) d'animaux vivants, à l'instant t (exprimé en année) et on admet que la fonction f, définie sur $[0 ; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -\frac{1}{50}y(4 - \ln(y)) \text{ et que } f(0) = 1.$$

1. On suppose que la fonction f est strictement positive sur $[0 ; +\infty[$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $\ln(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : z' = \frac{1}{50}z - \frac{2}{25}.$$

2. Résoudre l'équation (E'), puis en déduire que, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $f(t) = \text{e}^{4 - 4\text{e}^{\frac{t}{50}}}$.

3. En s'appuyant sur l'étude de la fonction f, que peut-on dire de l'évolution de cette population ?

4. ALGO Soit s un nombre réel tel que $0 < s < 1$.

Une scientifique a écrit l'algorithme suivant.

```
t ← 0
Tant que e^(4−4e^(t/50)) > s :
    t ← t + 1
```

a. Quelle est la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme lorsque $s = 0{,}01$?

b. Quelle est l'utilité de cet algorithme dans le contexte de l'exercice ?

ZOOM SUR... l'utilisation de fonctions vues en classe de première

Certains exercices de bac peuvent faire appel à des notions du programme des années précédentes. Dans ce chapitre, sont fréquemment utilisées les fonctions exponentielles et les fonctions trigonométriques, vues en première.

83 15 min VRAI OU FAUX

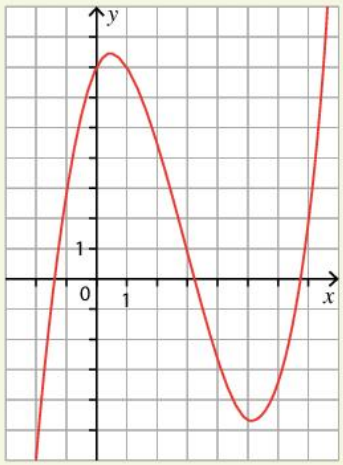
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

1. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

• **Affirmation 1 :** La fonction $G : x \mapsto -6\mathrm{e}^{-2x+1}$ est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

2. Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

• **Affirmation 2 :** La fonction F est convexe sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

3. Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.

On note F la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de f qui vérifie $F(1) = 0$.

• **Affirmation 3 :** Pour tout réel x strictement positif :

$$F(x) = x\ln(x).$$

84 10 min

Dans une pièce à température constante de 20 °C, un liquide a une température initiale égale à 70 °C. Cinq minutes plus tard, cette température est de 60 °C.

On admet que la température du liquide est une fonction $\theta(t)$ du temps t, en minute, dérivable et telle que $\theta'(t) = a(\theta(t) - 20)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = ay - 20a.$$

2. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

85 20 min QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la seule des quatre propositions qui est exacte.

1. Soit une fonction f définie et dérivable sur $[-3 ; -1]$. On note f' sa dérivée et F une de ses primitives. On sait que, pour tout $x \in [-3 ; -1]$, $f'(x) > 0$.

On peut affirmer que, sur l'intervalle $[-3 ; -1]$, la fonction F est :

(a) décroissante. (b) strictement décroissante.

(c) convexe. (d) négative.

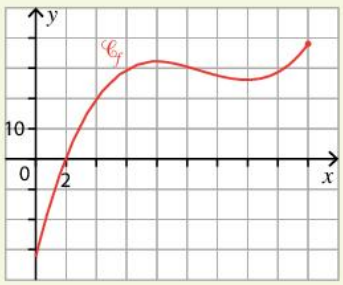
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

Une primitive G de g peut être définie sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $G(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}$ (b) $G(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2}$

(c) $G(x) = (3x+2)\mathrm{e}^{3x+2}$ (d) $G(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$

3. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f, définie et continue sur $[0 ; 18]$.



On peut affirmer que toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 18]$ sont :

(a) négatives sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

(b) négatives sur l'intervalle $[8 ; 12]$.

(c) croissantes sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

(d) croissantes sur l'intervalle $[8 ; 12]$.

4. On considère la fonction H, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \sin(1 + x^2).$$

On peut affirmer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

(a) $h : x \mapsto \sin(1 + x^2)$ (b) $h : x \mapsto \cos(1 + x^2)$

(c) $h : x \mapsto -\cos(1 + x^2)$ (d) $h : x \mapsto 2x\cos(1 + x^2)$

86 15 min

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E') : y' + 2y = 0.$$

2. En déduire que la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$, est solution de (E').

3. Vérifier que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$, est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

87 25 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On s'intéresse aux fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} f'(x) = 4 - (f(x))^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
Pour cela, on définit une suite de points $M_n(x_n ; y_n)$ tels que $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_{n+1} = -0{,}2{y_n}^2 + y_n + 0{,}8 \end{cases}$$

1. Si l'on souhaite automatiser le calcul à l'aide d'un tableur comme-ci-dessous, quelles formules doit-on entrer dans les cellules C2 et C3 pour pouvoir ensuite les recopier vers la droite ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	x_n	0	0,2	0,4		
3	y_n	0	0,8000	1,4720		

2. a. Calculer les coordonnées des points M_n pour n allant de 3 à 7.
b. Placer les points M_0 à M_7 dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour une unité.
c. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
3. a. Pour tout réel x on pose :

$$p(x) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8.$$

Montrer que si $x \in [0 ; 2]$, alors $p(x) \in [0 ; 2]$.
b. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant y_n \leqslant 2.$$

c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
d. La suite (y_n) est-elle convergente ? Justifier.

88 20 min

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{2}y = 10$$

La température est exprimée en degré Celsius (°C) et le temps t en heure.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t > 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 °C.
2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 200\mathrm{e}^{\frac{-t}{2}} + 20$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont 2 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour 20 °C en ordonnée.
a. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
c. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et son asymptote dans le repère sur l'intervalle $[0 ; 7]$.
3. a. Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heure et minute, du moment où la température de l'objet est 50 °C. On laissera les traits de construction apparents.
b. Retrouver ce résultat par le calcul.

89 15 min

Lors d'une course, un cycliste professionnel descend une route rectiligne, pentue et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en seconde et $v(t)$ en mètre par seconde. On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v' + v = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{10}}\right)$.
2. Étudier les variations de v sur $[0 ; +\infty[$ ainsi que sa limite en $+\infty$.
3. La vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

Consolider ses fondamentaux

90 Traitement antibiotique

Trois malades sont placés à l'hôpital sous traitement antibiotique. On note $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ la quantité d'antibiotique, exprimée en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, présente dans le sang de chacun des patients à l'instant t exprimé en heure. On admet que f, g et h sont chacune solution d'une équation différentielle de la forme $(E) : y' = -ky + L$, où k et L sont des nombres réels positifs dépendant de la vitesse de disparition de l'antibiotique dans l'organisme et de la méthode d'administration.

Questions Va piano

Le premier malade subit une unique piqûre d'antibiotique à l'instant $t = 0$ et on suppose que $f(0) = 50$.
Dans ce cas, on admet que $L = 0$ et $k = 0{,}12$.

1. a. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

b. En déduire l'expression de $f(t)$.

2. Au bout de combien de temps la quantité d'antibiotique présente dans le sang sera-t-elle égale à $10\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$?

3. Décrire l'évolution de la quantité d'antibiotique à long terme dans le sang.

Questions Moderato

Le deuxième malade subit une piqûre d'antibiotique à l'instant $t = 0$ et on suppose que $g(0) = 80$.
Dans ce cas, on admet que $L = 0$.

1. Exprimer $g(t)$ en fonction de t et k.

2. La demi-vie de cet antibiotique, notée λ, est le temps au bout duquel la moitié du médicament a disparu de l'organisme.
Exprimer k en fonction de λ.

3. ALGO PYTHON Écrire une fonction Python dont le seul argument est la demi-vie de cet antibiotique et qui renvoie un graphique représentant heure par heure l'évolution de sa quantité dans le sang durant 24 heures.

Questions Allegro

On met le troisième malade sous perfusion pour lui injecter en continu un antibiotique. Dans ce cas, $h(0) = 0$.

1. Exprimer $h(t)$ en fonction de t, k et L.

2. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE À l'aide de deux curseurs k et L créés dans un logiciel de géométrie, déterminer approximativement les valeurs de k et L telles que, au bout d'une heure de perfusion, la quantité d'antibiotique dans le sang soit égale à $10\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

3. À long terme, on souhaite que la quantité d'antibiotique tende vers $80\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
En déduire les valeurs de k et de L.

Se préparer aux études supérieures

91 Population de bactéries

Approfondissement

On étudie une population de bactéries et on note $f(t)$ l'effectif de cette population à l'instant t exprimé en heure.
On suppose que la population initiale est de 100 000 individus.

1. Le modèle de Malthus

On suppose qu'à chaque instant t, l'accroissement $f'(t)$ de cette population par heure est proportionnel à la population $f(t)$ et on note a le coefficient de proportionnalité.

a. Écrire une équation différentielle dont f est solution.

b. Résoudre cette équation différentielle et exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.

c. On suppose que la population de bactéries double toutes les demi-heures.
En déduire la valeur de a.

d. Quelle est la limite de la fonction f ? Au bout de combien de temps la population dépassera-t-elle 10 000 000 ?

2. Le modèle de Verhulst

On suppose ici que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = y\left(\frac{3}{2} - ky\right)$, où k est une constante réelle strictement positive qui dépend de l'environnement et des bactéries.

a. Vérifier l'équivalence suivante :

$$y' = y\left(\frac{3}{2} - ky\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{y}\right) + k.$$

b. En déduire que f est solution de l'équation (E) si et seulement si $\frac{1}{f}$ est solution d'une équation (E') que l'on précisera.

c. Résoudre l'équation (E') puis en déduire l'expression de $f(t)$ en fonction de k.

d. On a constaté que la population de bactéries tend à se stabiliser à 10 000 000 d'individus.
En déduire la valeur de k.

e. Étudier les variations de la fonction f.

f. Justifier que $f'' = \left(\frac{3}{2} - 2kf\right)f'$.

En déduire que la courbe de f admet un point d'inflexion que l'on précisera. Interpréter ce résultat pour décrire la croissance de la population dans ce modèle.

No problem!

1 A riddle for an antiderivative

"My derivative function is $3x^2 + 2x - 1$.
When you compute the output of 0 you find 5."
• Who am I?

2 Room temperature

A thermometer indicates 20 °C in a room. It is placed outside where the temperature is 4 °C. After three minutes, it indicates 8 °C. Newton's law says that the temperature $p(t)$ in °C, with t in minutes, changes according to the time t that elapsed since the change of environment of the thermometer. We have: $p'(t) = k(p(t) - 4)$ with k a constant and $t \geqslant 0$.

1. By convention, we assume that $t = 0$ when changing environment. Here, the change of environment corresponds to the moment when the thermometer is placed outside.
Complete: $p(0) = \ldots$.

2. Assuming that $f(t) = p(t) - 4$, show that $f'(t) = kf(t)$.

3. Deduce that $f(t) = f(0)\mathrm{e}^{kt}$.

4. Then write $p(t)$ in terms of t and calculate constant k.

5. What will be the temperature after 10 minutes?

3 Computers in Great Britain

We denote $n(t)$ the number of couples owning a computer in Great Britain (t in years, $n(t)$ in millions). We assume that:

$$t = 0 \text{ in } 1980 \text{ and } n(0) = 0.01.$$

For t between 1 980 and 2 025, n is a solution of the following differential equation:

$$y' = 0.022y(20 - y).$$

1. We denote $f = \dfrac{1}{y}$.
Show that the previous equation is now:

$$f' = -0.44f + 0.022.$$

2. Prove that function $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0.44t}$, where C is a constant, is a solution of the equation:

$$f' = 0.44f.$$

3. Deduce from the previous question all the solutions of the equation: $f' = -0.44f + 0.022$.

4. Check that the function $t \mapsto \dfrac{20}{1 + 2\,000\mathrm{e}^{-0.44t}}$ is a good approximation of function n.

5. We denote $n(x) = \dfrac{20}{1 + 2\,000\mathrm{e}^{-0.44t}}$.
Find the limit of n when t approaches $+\infty$.
What do you deduce from this result?

4 Maths assembly PAIR WORK

Using the grid below, you have to create at least three triplets that will include information from columns A, B and C. Explain and compare your choices with your classmate.

A: differential equations	B: solutions	C: initial conditions
$y' = \frac{3}{2}y$	$x \mapsto 5\mathrm{e}^{x-1} - 5$	$y(-1) = -1$
$-y' + y = 0$	$x \mapsto -\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$	$y(0) = 1$
$y' + 2y = 3$	$x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}$	$y(-1) = 1$
$y' - 5 = y$	$x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$	$y(0) = -1$

Final exam Past papers

1 A curve with equation $y = f(x)$ passes through the points (0, 2) and (3 , – 1). It is given that $f'(x) = kx^2 - 2x$, where k is a constant. Find the value of k.

2 A curve is such that $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^2 + 5x - 4$.

1. Find the x-coordinate of each of the stationary points of the curve.

2. Obtain an expression for $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ and hence or otherwise find the nature of the stationary points.

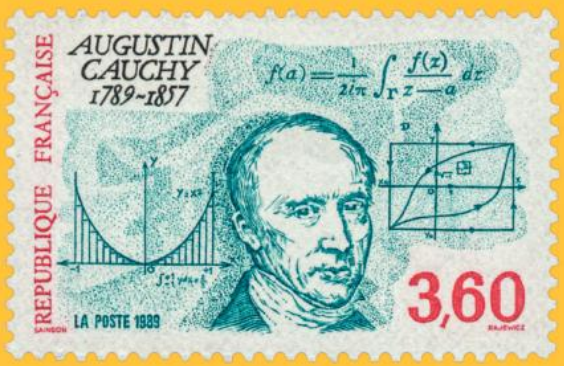
3. Given that the curve passes through the point (6, 2), find the equation of the curve.

CHAPITRE

8 Calcul intégral

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe



Approcher des aires avec des figures géométriques

Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est l'un des fondateurs du calcul différentiel et intégral, lequel trouve ses racines dans deux problèmes qui passionnent les mathématiciens en Europe au XVII^e^ siècle. Le problème de la tangente consiste à retrouver les différentes tangentes d'une courbe quelconque. Celui des quadratures revient à déterminer l'aire engendrée par une courbe. Leibniz et Newton s'aperçoivent que l'aire sous une courbe peut être obtenue en inversant le processus de dérivation. Plus d'un siècle plus tard, Cauchy formalise ces découvertes en s'appuyant sur la notion de limite.

Voici un extrait du début de la leçon 21 des *Leçons sur le calcul différentiel et intégral* (1829) d'Augustin Louis Cauchy.

« Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$ et $x = X$, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, X - x_{n-1}$, qui seront tous de même signe.

Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'origine de ce même élément, à savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, …, enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$, et soit :

$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$

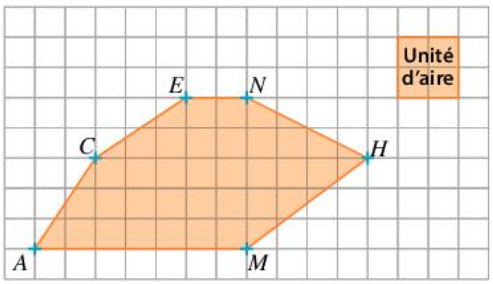
la somme des produits ainsi obtenus. »

Si l'on suppose que la fonction f considérée est positive sur l'intervalle $[x_0 ; X]$, que représente la somme S calculée ici ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

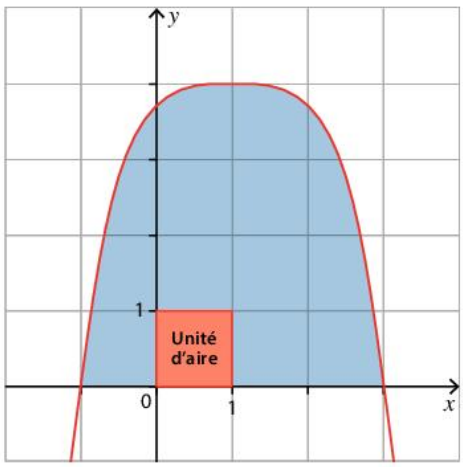
1 Unité d'aire



• Quelle est, en unité d'aire, l'aire du polygone $AMHNEC$?

2 Encadrement d'une aire

• Donner un encadrement par deux nombres entiers de l'aire de la surface colorée ci-dessous, en unité d'aire.



3 Aire d'une surface

Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, calculer en centimètre carré l'aire de la surface délimitée par les droites d'équations :

$$x = 0,\ y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ et } y = -\frac{1}{4}x + 4.$$

4 Positions relatives

Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 3} \text{ et } g(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}.$$

5 Dérivées

Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto (3x - 1)\mathrm{e}^{-3x}$; $I = \mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto (x^2 + 4x)\ln(x)$; $I =]0 ; +\infty[$.
3. $h : x \mapsto \sin(2x)\sqrt{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

6 Primitives (1)

Dans chaque cas, montrer que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $F(x) = (2x - 8)\ln(x)$; $I =]0 ; +\infty[$;
   $f(x) = \dfrac{2x - 8}{x} + 2\ln(x)$.
2. $F(x) = (x^2 + 3x - 4)\mathrm{e}^x$; $I = \mathbb{R}$;
   $f(x) = (x^2 + 5x - 1)\mathrm{e}^x$.
3. $F(x) = (x^2 + 3x - 4)(\ln(x) - 1)$; $I =]0 ; +\infty[$;
   $f(x) = (2x + 3)\ln(x) - x - \dfrac{4}{x}$.
4. $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$; $I =]0 ; +\infty[$;
   $f(x) = \dfrac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

7 Primitives (2)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto 2$
2. $g : x \mapsto 1 - 3x$
3. $h : x \mapsto x^2 + 3x - 2$
4. $j : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$

8 Primitives (3)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $]0 ; +\infty[$.

1. $f : x \mapsto 3\cos(x) - 2$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{4}{x}$

9 Calcul d'aire

On se place dans un repère orthonormé.

• Déterminer, en unité d'aire du repère, l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$, et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 2$.

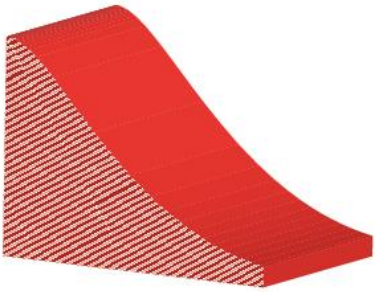
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

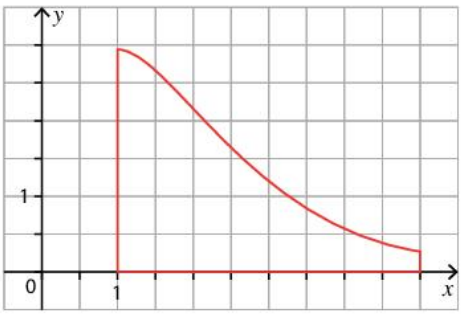
Situation 1 Encadrement d'une aire par la méthode des rectangles

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Introduire la méthode des rectangles à l'aide d'un logiciel de géométrie.

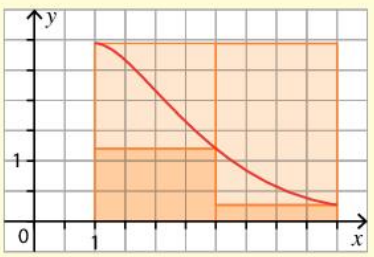
La directrice d'un zoo souhaite faire construire pour les pandas un toboggan dont le schéma en perspective cavalière est donné ci-contre.
Son profil est représenté ci-dessous et la partie courbée est modélisée par la courbe de la fonction f, définie sur l'intervalle $[1;5]$ par $f(x) = 8xe^{-x}$, tracée dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



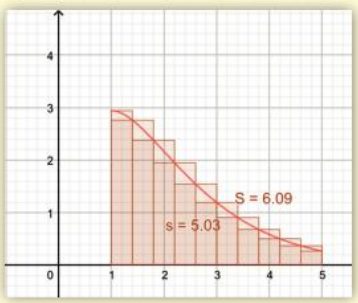


On cherche à déterminer le plus précisément possible l'aire du mur de soutènement du toboggan, hachuré sur le schéma en perspective, afin d'évaluer le coût des travaux.

1. Quelle est la hauteur approximative du toboggan, arrondie au centimètre ?
2. À l'aide du profil ci-dessus, donner un encadrement approximatif de l'aire du mur de soutènement en mètre.



3. Afin de préciser cet encadrement, on partage l'intervalle $[1;5]$ en deux intervalles $[1;3]$ et $[3;5]$ de même amplitude, puis on trace deux « petits » rectangles et deux « grands » comme sur la figure ci-contre.
Expliquer pourquoi l'aire du mur de soutènement est comprise entre la somme des aires des « petits » rectangles et celle des aires des « grands rectangles ».
4. Donner alors un encadrement de l'aire du domaine du mur de soutènement (arrondir les valeurs au cm).
5. En partageant l'intervalle $[1;5]$ en 10 intervalles de même amplitude, on trace dix « petits » rectangles et dix « grands » rectangles comme sur la figure ci-contre. À l'aide d'un logiciel de géométrie, on obtient un encadrement de l'aire du mur de soutènement grâce aux instructions `s=SommeInférieure[f,1,5,10]` et `S=SommeSupérieure[f,1,5,10]`.



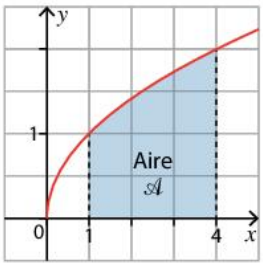
Quel encadrement de l'aire du mur de soutènement cela permet-il d'obtenir ?
6. En prenant exemple sur la question 5, encadrer l'aire du mur de soutènement grâce à 100 rectangles. Que constate-t-on ?
7. Donner un encadrement de cette aire d'amplitude 0,01 m.

Situation 2 Une primitive pour calculer une intégrale

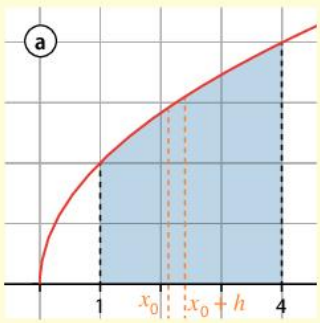
Objectif
Illustrer le lien entre intégrale et primitive.

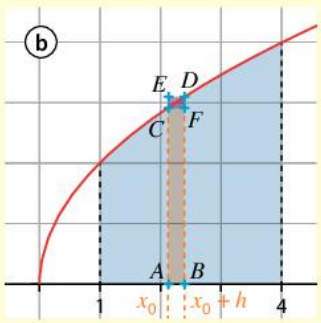
On considère la fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$, notée f.
On cherche la valeur exacte, en unité d'aire du repère, de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[1;4]$, on définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$



1. Soit x_0 un réel de l'intervalle $[1;4]$ et h un réel strictement positif tel que $x_0 + h$ appartienne à $[1;4]$.
Hachurer, après avoir reproduit le schéma (a) ci-dessous, l'aire égale à $F(x_0 + h) - F(x_0)$.





2. À l'aide des rectangles $ABFC$ et $ABDE$ figurant sur le schéma (b) ci-dessus, justifier que :

$$h\sqrt{x_0} \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant h\sqrt{x_0 + h}.$$

3. En déduire que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \sqrt{x_0}$.

On admet que, de manière analogue, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \sqrt{x_0}$.

4. Que peut-on en déduire pour la fonction F ?

5. Justifier que F est la primitive de la fonction racine carrée qui s'annule en 1.

6. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1;4]$, $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \dfrac{2}{3}$.

7. En déduire la valeur exacte, en unité d'aire du repère, de l'aire $\mathscr{A}$.

Situation 3 Une méthode de calcul d'intégrales : l'intégration par parties

Objectif
Découvrir la méthode d'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. On admet que, alors, les fonctions $u'v$ et uv' sont continues sur I.

1. **a.** Montrer que $u'v = (uv)' - uv'$.
b. En déduire que, pour tous réels a et b de I, $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.
Cette égalité est appelée « formule d'intégration par parties ».

2. En posant $u'(t) = t$ et $v(t) = \sin(t)$, puis en appliquant la formule d'intégration par parties, calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

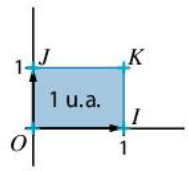
3. Soit x un nombre réel strictement positif.
En posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Que représente alors la fonction F ?

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

1. Aire sous la courbe d'une fonction continue et positive

Définition

Soit un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ et soit K le point de coordonnées (1 ; 1). L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelée **unité d'aire** du repère et est notée u.a.

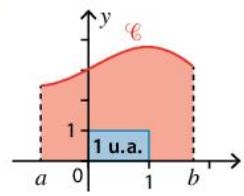


Exemple

Si $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

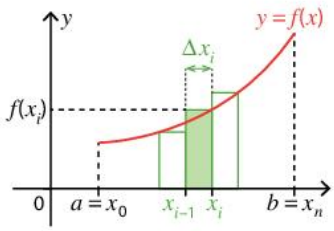
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est appelée **intégrale de a à b de la fonction f**. Elle est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarques

- Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend que de a, b et f. On dit que x est une variable **muette**. On peut également écrire ce nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$, etc. a et b sont les **bornes** de l'intégrale.
- La méthode des rectangles (p. 242) permet le calcul approché d'une intégrale. Elle légitime la notation utilisée : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\int$ ressemble à un « S » et peut se lire « somme »). L'approximation, par des aires de rectangles, vaut $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, Δx_i étant la largeur des rectangles et $f(x_i)$ leur hauteur. Cette somme tend vers $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.



2. Théorème fondamental

Théorème

DÉMO p. 250

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction F est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Propriété (corollaire)

DÉMO p. 251

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$. On a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Ce nombre peut aussi se noter $[F(t)]_a^b$.

Remarques

- Le théorème justifie, dans le cas d'une fonction continue et positive, l'existence de primitives.
- La propriété permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f continue et positive grâce à une primitive de f.
- Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f.

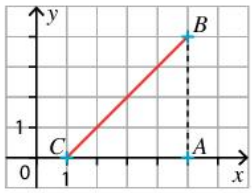
Méthode 1 Calculer des intégrales simples

Dans chaque cas, calculer l'intégrale donnée en s'appuyant sur une représentation graphique.

1. $\int_1^5 (x-1)\,dx$ 2. $\int_{-2}^8 4\,dx$

Solution commentée

1. Soit f la fonction définie sur $[1;5]$ par $f(x) = x - 1$.

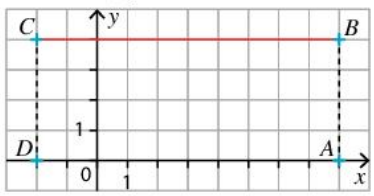


Si $1 \leqslant x \leqslant 5$, alors $x - 1 \geqslant 0$, donc f est bien une fonction continue et positive sur $[1;5]$. Donc $\int_1^5 (x-1)\,dx$ est l'aire sous la courbe de f entre 1 et 5. C'est donc l'aire du triangle rectangle ABC.

$AC = 4$ et, comme B est le point de la courbe représentative de f d'abscisse 5, $B(5;4)$.

On a $AB = 4$. Donc l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AC \times AB}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$ u.a., donc $\int_1^5 (x-1)\,dx = 8$.

2. La fonction g définie sur $[-2;8]$ par $g(x) = 4$ est continue et positive, donc $\int_{-2}^8 4\,dx$ est l'aire sous la courbe de g entre -2 et 8.



Cette aire est l'aire du rectangle $ABCD$, elle est donc égale à :
$10 \times 4 = 40$ u.a., donc $\int_{-2}^8 4\,dx = 40$.

EXERCICE 3 p. 258

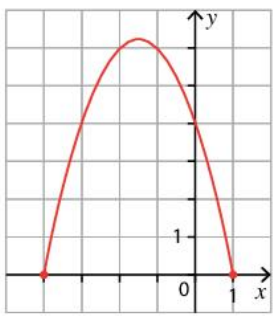
Méthode 2 Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive

Soit f la fonction définie sur $[-4;1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm.
2. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[-4;1]$.
3. Calculer l'aire sous la courbe de f entre -4 et 1, en centimètre carré.

Solution commentée

1. Voir ci-contre.



2. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$, donc $f(x)$ a deux racines : $\frac{3+5}{-2} = -4$ et $\frac{3-5}{-2} = 1$.

$a = -1 < 0$. Donc $f(x)$ est positif entre ses deux racines, donc sur $[-4;1]$.

3. Comme f est une fonction continue et positive sur $[-4;1]$, l'aire sous la courbe de f entre -4 et 1 est égale à $\int_{-4}^1 f(x)\,dx$.

Or, on peut déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 4x$.

On peut donc calculer l'intégrale cherchée à l'aide de cette primitive :

$$\int_{-4}^1 f(x)\,dx = \int_{-4}^1 \left(-x^2 - 3x + 4\right)dx = F(1) - F(-4) = \left[-\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} \times (-4)^3 - 3\frac{(-4)^2}{2} + 4 \times (-4)\right) = \frac{125}{6}.$$

L'aire cherchée est donc égale à $\frac{125}{6}$ u.a.

Or 1 u.a = 0,5 cm × 0,5 cm = 0,25 cm^2, donc l'aire cherchée est égale à $\frac{125}{24}$ cm^2.

EXERCICE 11 p. 258

2. Intégrale d'une fonction continue

1. Définition

Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I et F une primitive de f sur I. On définit l'**intégrale de a à b de f** par : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, aussi noté $[F(x)]_a^b$.

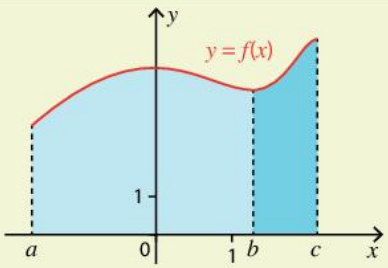
Remarque

Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f : si G est une autre primitive de f, alors $G = F + k$ (k réel), donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$.

2. Propriétés

Propriétés algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels appartenant à I et λ un réel.



DÉMO p. 251

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ • $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles :** $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Linéarité :** $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriétés : intégrales et inégalités

Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$.

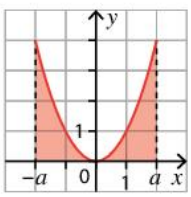
DÉMO en ligne

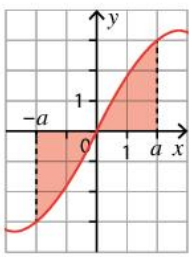
- **Positivité :** si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- **Ordre :** si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriétés : cas particuliers (admis)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 et a un réel appartenant à I.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.





3. Intégration par parties

Propriété

DÉMO p. 243

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et a et b deux réels appartenant à I. On a : $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.

Méthode 1 Calculer une intégrale en utilisant une primitive

Calculer $\int_{-4}^{3}(x^3 - x)\,\mathrm{d}x$.

Solution commentée

On détermine tout d'abord une primitive de la fonction $x \mapsto x^3 - x$ sur l'intervalle $[-4\,;3]$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ en est une. D'où :

$$\int_{-4}^{3}(x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{3} = \frac{81}{4} - \frac{9}{2} - (64 - 8) = \frac{81}{4} - \frac{18}{4} - \frac{224}{4} = -\frac{161}{4}$$

EXERCICE 12 p. 259

Méthode 2 Calculer des intégrales en utilisant des propriétés

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$. Calculer J.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I.

Solution commentée

1. $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$. On pose, pour tout $x \in [0\,;1]$, $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

   Alors $u'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec u strictement positive sur $[0\,;1]$.

   Donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)\right]_0^1 = \ln(\mathrm{e} + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.

2. $I + J = \overbrace{\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x}^{\text{d'après la linéarité de l'intégrale}} = \int_0^1 \frac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$.

3. $I + J = 1 \Leftrightarrow I = 1 - J \Leftrightarrow I = 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.

EXERCICE 20 p. 259

Méthode 3 Utiliser une intégration par parties pour calculer une intégrale

Soit $f : x \mapsto (x - 1)\mathrm{e}^x$. Calculer $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

Solution commentée

On pose, pour tout x appartenant à $[1\,;2]$, $v(x) = x - 1$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

On a donc, pour tout $x \in [1\,;2]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = \mathrm{e}^x$.

u et v sont dérivables sur $[1\,;2]$ et u' et v' sont continues sur $[1\,;2]$.

On peut donc faire une intégration par parties :

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = (2-1)\mathrm{e}^2 - (1-1)\mathrm{e}^1 - \left[\mathrm{e}^x\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right) = \mathrm{e}$$

EXERCICE 28 p. 260

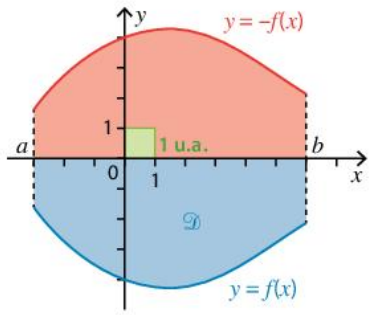
3. Applications du calcul intégral

1. Calcul d'aire

DÉMO en ligne

Propriété

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à $\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$.

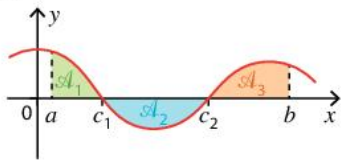


Remarque (fonction de signe non constant)

Il faut connaître le signe de la fonction avant de pouvoir calculer des aires.
Par exemple, sur le schéma ci-contre :

$\mathscr{A}_{\text{totale coloriée}} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

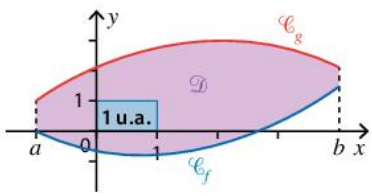
Mais $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \neq \mathscr{A}_{\text{coloriée}}$



Propriété (admise)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$



2. Valeur moyenne

Définition

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

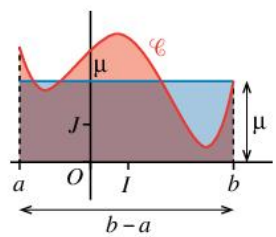
Exemple

Soit f la fonction définie sur $[3\,;5]$ par $f(x) = 2x^2 - 5$. La valeur moyenne de f sur $[3\,;5]$ vaut :

$$\mu = \frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^5 (2x^2 - 5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left(\frac{175}{3} - 3\right) = \frac{83}{3}$$

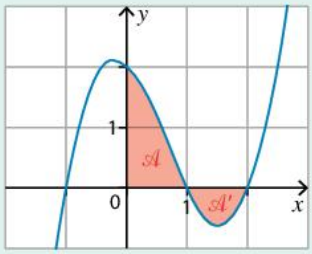
Interprétation

Si f est une fonction continue, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$. Dans le cas où f est positive, l'aire sous la courbe de la fonction f (en rouge) est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur μ (en bleu), c'est-à-dire à l'aire sous la courbe de la fonction constante de valeur μ.



Méthode 1 Calculer une aire en utilisant des intégrales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. On a tracé ci-contre sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 0,8 cm.



1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$.
2. Calculer l'aire de la partie colorée en centimètre carré.

Solution commentée

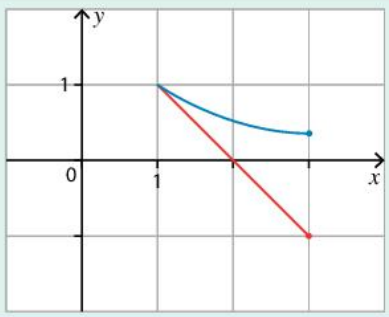
1. Pour tout réel x, on a $(x^2 - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = f(x)$.

2. On calcule séparément les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.
   • Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2 - 1 \leqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.
   Donc $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0 = \frac{13}{12}$.
   • Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant 0$.
   Donc $\mathcal{A}' = \int_1^2 (-f(x))\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(-\frac{16}{4} + \frac{16}{3} + \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{5}{12}$.
   L'aire colorée est donc égale à $\frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{18}{12}$ u.a. $= \frac{3}{2}$ u.a. ; or 1 u.a. = 0,8 cm × 0,8 cm = 0,64 cm^2, donc l'aire colorée est égale à 0,96 cm^2.

EXERCICE 37 p. 260

Méthode 2 Calculer une aire entre deux courbes

On considère les fonctions f et g, définies sur $[1;3]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2 - x$, représentées ci-contre dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.



1. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[1;3]$.
2. En déduire le calcul de l'aire du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$, en centimètre carré.

Solution commentée

1. Pour tout réel $x \in [1;3]$, $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (2 - x) = \frac{1 - 2x + x^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$.
   Pour tout réel $x \in [1;3]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[1;3]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

2. L'aire cherchée vaut donc, en u.a. :
   $\int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)dx = \left[\ln(x) - 2x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \ln(3) - 6 + \frac{9}{2} - \left(\ln(1) - 2 + \frac{1}{2}\right) = \ln(3)$
   Comme 1 u.a. = 1 cm × 1 cm = 1 cm^2, l'aire cherchée vaut $\ln(3)$ cm^2.

EXERCICE 40 p. 261

Méthode 3 Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x$.

• Déterminer sa valeur moyenne μ sur l'intervalle $[0;6]$.

Solution commentée

$$\mu = \frac{1}{6-0}\int_0^6 (-x^2 + 6x)\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left(-\frac{6^3}{3} + 3 \times 6^2 - \left(\frac{0^3}{3} + 3 \times 0^2\right)\right) = 6$$

EXERCICE 44 p. 261

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante dans le cas d'une **fonction croissante**.
La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, la fonction F est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Démonstration

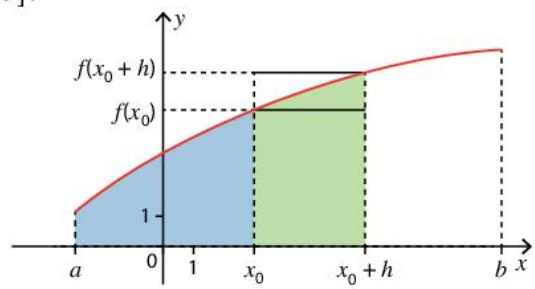
• Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,;b]$.

On pose, pour $x\in[a\,;b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On va montrer que F est dérivable sur $[a\,;b]$.

Soit $x_0\in[a\,;b]$ et soit h un réel non nul tel que $x_0+h\in[a\,;b]$.

• Pour $h>0$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$



Comme f est croissante sur $[a\,;b]$, l'aire sous la courbe de f entre x_0 et x_0+h est comprise entre l'aire des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.

Donc $hf(x_0)\leqslant\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant hf(x_0+h)$.

On a donc, en divisant les membres de l'inégalité par h : $f(x_0)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$ (1)

Comme f est continue sur $[a\,;b]$, $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}f(x_0+h)=f(x_0)$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

• De même, pour $h<0$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{F(x_0)-F(x_0+h)}{-h}=\frac{1}{-h}\left(\int_a^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{-h}\left(\int_{x_0+h}^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\quad(2)$$

Donc $-hf(x_0+h)\leqslant\int_{x_0+h}^{x_0}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant-hf(x_0)$. (3)

On a donc, en divisant les membres de l'inégalité par $-h$: $f(x_0+h)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)$. (1')

Comme f est continue sur $[a\,;b]$, $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}f(x_0+h)=f(x_0)$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

• Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$. (4)

Donc la fonction F est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

1. Justifier que les inégalités ne changent pas de sens aux lignes (1) et (1').
2. Faire une figure dans le cas où $h<0$ et expliquer les lignes (2) et (3).
3. Pourquoi peut-on finalement affirmer que F est dérivable en x_0 à la ligne (4) ?

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

En utilisant les indications suivantes, démontrer cette propriété.

- On pose, pour $x \in [a\,;b]$, $G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
  Que représente la fonction G pour la fonction f ?
- Justifier que $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer les propriétés suivantes.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I.

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

En utilisant les indications suivantes, démontrer ces propriétés.

- En considérant une primitive F de f sur I, exprimer chacune des intégrales concernées.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

Pour chaque question :

- indiquer la propriété qui va permettre d'y répondre ;
- préciser quelles sont les hypothèses permettant d'utiliser cette propriété ;
- justifier que ces hypothèses sont vérifiées ;
- énoncer la conclusion.

1 On considère la suite (u_n) définie de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Soit n un entier naturel. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation la suite (u_n).

2 Calculer $\int_0^1 3xe^x\,\mathrm{d}x$.

3 Déterminer l'aire comprise entre les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto -x^2 + 4x + 3$ et $x \mapsto x^3 + 2x + 3$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Utiliser des propriétés

Une propriété possède des hypothèses et une conclusion. Pour l'utiliser dans une démonstration, il faut s'assurer que ses hypothèses soient vérifiées, soit à l'aide des données de l'énoncé, soit à l'aide de ce qu'on a démontré dans des questions précédentes de l'exercice. On peut alors affirmer que la conclusion de la propriété est vraie.

Carte mentale

Calcul intégral

Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et soient a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soient f une fonction continue sur I et a et b deux réels appartenant à I :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

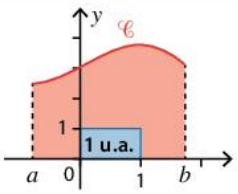
Calculer une intégrale à l'aide de propriétés

Soient f une fonction continue sur I ; a, b et c trois réels appartenant à I et λ un réel.

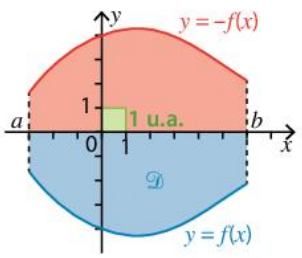
- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles :**
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Linéarité :**
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- **Positivité :**
si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- **Ordre :**
si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Calculer des aires

- **f continue et positive sur $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

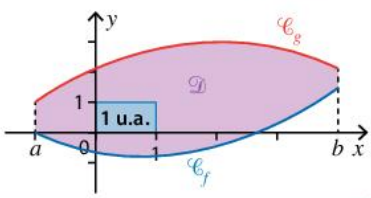


- **f continue et négative $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$.



- **$g \geqslant f$ sur $[a\,;b]$.**
L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à :

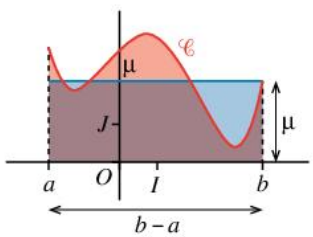
$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x.$$



Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ $(a<b)$.
On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Si $f \geqslant 0$, l'aire du rectangle bleu est égale à $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

CORRIGÉS DES EXERCICES

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

1 Dans un repère orthonormé, l'aire sous la courbe de la fonction cube sur l'intervalle $[1;6]$ en unité d'aire vaut :

(a) 323,75 (b) 1 295 (c) 105

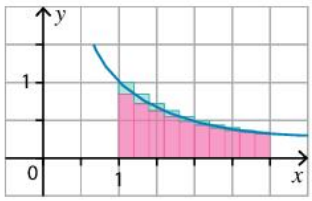
2 $I = \int_{-1}^{1}(x-2)(x+3)^9\,\mathrm{d}x$. On peut dire :

(a) que l'intégrale I est positive.

(b) que l'intégrale I est négative.

(c) qu'on ne peut pas connaître le signe de I sans la calculer.

3 On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f continue, positive et décroissante sur $[1;3]$.



On pose $I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

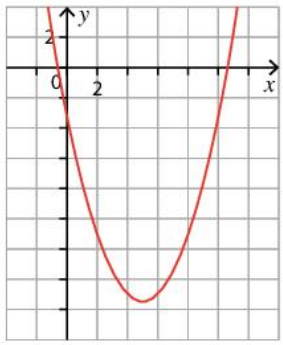
Alors :

(a) $\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{10}f\left(1+\frac{2k}{10}\right) \leqslant I \leqslant \sum_{k=0}^{9}\frac{2}{10}f\left(1+\frac{2k}{10}\right)$

(b) $\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{10}f\left(1+\frac{k}{10}\right) \leqslant I \leqslant \sum_{k=0}^{9}\frac{2}{10}f\left(1+\frac{k}{10}\right)$

(c) $\sum_{k=0}^{9}\frac{2}{10}f\left(1+\frac{2k}{10}\right) \leqslant I \leqslant \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{10}f\left(1+\frac{2k}{10}\right)$

4 L'aire du domaine délimité par la courbe rouge représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=4$ et $x=8$ est égale à :



(a) $\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $f(8)-f(4)$

(c) $\int_4^8(-f(x))\,\mathrm{d}x$

5 a et b sont deux réels. $\int_0^1 \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

(a) $\mathrm{e}^{a+b}-\mathrm{e}^b$

(b) $\frac{\mathrm{e}^{a+b}}{a+b}-\frac{\mathrm{e}^b}{b}$

(c) $\frac{\mathrm{e}^{a+b}-\mathrm{e}^b}{a}$

6 On considère $I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. I est égale à :

(a) $I = \left[\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(b) $I = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(c) $I = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

1 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{\mathrm{e}}$

2 $x \mapsto \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$ est une primitive de la fonction carré sur $[2;3]$.

3 $x \mapsto \int_2^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction inverse sur $[2;7]$.

4 $\int_1^2\left((x-2)^{17}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ est négatif.

5 L'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction cube, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$ vaut $\int_{-1}^0 x^3\,\mathrm{d}x$.

6 La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0;2]$ est égale à e^2-1.

7 L'aire du domaine délimité par les courbes de la fonction carré, de la fonction cube et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est égale à :

$$\int_0^1\left(x^3-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

8 $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

9 $\int_{-2}^3 3x\,\mathrm{d}x = x\int_{-2}^3 3\,\mathrm{d}x$

10 $\int_{-1}^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 x^2\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^2 2x\,\mathrm{d}x$

TP 1 La méthode des rectangles ALGO PYTHON

Objectif
Encadrer une aire par la méthode des rectangles.

Lorsqu'on souhaite calculer une intégrale mais qu'on n'est pas capable de déterminer une primitive de la fonction à intégrer à l'aide des formules connues, on peut s'aider d'un programme pour encadrer cette intégrale.
On souhaite par exemple encadrer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Par définition, comme la fonction à intégrer est positive, I est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
La méthode des rectangles permet de réaliser cet encadrement en découpant l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de même amplitude égale à $\frac{1}{n}$. Ainsi, I est comprise entre la somme des aires des n « petits » rectangles et la somme des aires des n « grands » rectangles. Plus le nombre n de rectangles est important, plus l'amplitude de l'encadrement de I est petite.

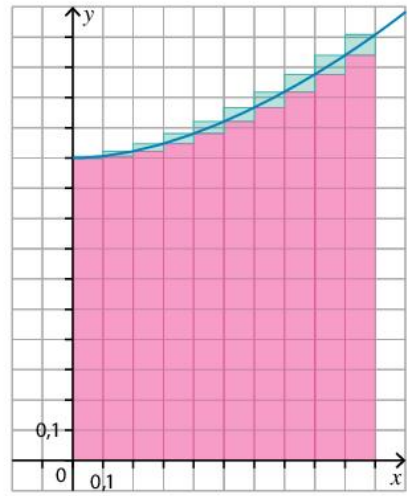


Illustration dans le cas $n = 10$

1. Écrire une fonction en Python qui renvoie l'image d'un réel x par la fonction f.
2. Recopier puis compléter le programme suivant afin qu'il calcule la somme des aires des n « petits » rectangles.

```
def petits_rectangles(n):
    s=0
    for k in range(...):
        s=s+...*...
    return ...
```

3. Écrire une fonction en Python qui renvoie la somme des aires des n « grands » rectangles.
4. Utiliser ces fonctions pour donner l'encadrement décimal à 10^{-4} près de I.
5. Modifier ces fonctions afin de déterminer l'encadrement décimal à 10^{-3} près de $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour calculer une racine carrée, on utilise la commande sqrt, qui se trouve dans la bibliothèque math.
- La boucle Pour s'écrit de la manière suivante.
Boucle avec un compteur k variant de a à b :

```
for k in range(a,b+1):
    instructions
```

- On définit une fonction informatique de la manière suivante.

```
def fonction(arguments):
    instructions
    return(résultats)
```

TP 2 Calcul formel

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Déterminer des primitives et des intégrales à l'aide du calcul formel.

Lorsqu'on n'est pas capable de déterminer les primitives d'une fonction à l'aide de formules connues, on peut s'aider d'un logiciel de calcul formel, qui permet parfois d'expliciter ces primitives ainsi que de calculer des valeurs d'intégrales.

1. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer la valeur exacte de $\int_1^5 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
2. **a.** En procédant à deux intégrations par parties successives, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$.
   b. Vérifier le résultat l'aide d'un logiciel de calcul formel.

TP 3 Encadrement d'une intégrale

TABLEUR

Objectif Encadrer une intégrale que l'on ne sait pas calculer à l'aide d'un tableur.

On souhaite obtenir un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

La méthode des rectangles permet de réaliser cet encadrement en découpant l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de même amplitude égale à $\frac{1}{n}$.

1. Soient k un entier compris entre 0 et $n-1$ et f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   Expliquer pourquoi $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. On a commencé la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	100						
2						=SOMME($B$4:B4)		
3	k	(1/n)×f((k+1)/n)	(1/n)×f(k/n)		Somme de gauche	Somme de droite		
4	0	0,009999	0,01		0,009999	0,01	=SOMME($C$4:C4)	
5	1	0,009996002	0,009999		0,019995002	0,019999		

   a. Quelle formule a-t-on pu saisir dans les cellules B4 et C4 ?
   b. Expliquer les formules saisies dans les cellules E4 et F4.
   c. Construire une telle feuille de calcul afin de déterminer l'encadrement décimal de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ à 10^{-3} près.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie, option calcul formel

Dans le module *Calcul formel* d'un logiciel de géométrie (menu *Affichage*) :

- l'instruction `Intégrale (f(x),x)` détermine l'ensemble des primitives de la fonction f ;
- l'instruction `Intégrale (f(x),x,x_min,x_max)` calcule l'intégrale de la fonction f entre les bornes $x_{\min}$ et $x_{\max}$.

Tableur

- Lorsqu'on rentre une formule, comportant des noms de cellules, et qu'on l'étire, le nom des cellules se « décale » si le nom de la cellule ne comporte pas de « $ ».
- Lorsqu'on met un « $ » devant la lettre ou le nombre définissant la cellule, par recopie vers la droite ou la gauche (ou le haut ou le bas), la référence à la colonne (ou la ligne) ne change pas.

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Calculer le plus rapidement possible.

1. $F(1)-F(-1)$ si $F(x)=2x^2$.
2. $F(1)-F(-1)$ si $F(x)=x^3$.
3. $G\left(e^2\right)-G(e)$ si $G(x)=\ln(x)$.
4. $G(50)-G(8)$ si $G(x)=\sqrt{x}$.

2 Calculer le plus rapidement possible.

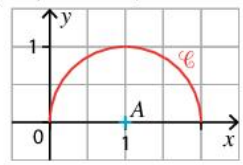
1. $\int_{-8}^{11} 1\,dx$
2. $\int_{-1}^{1} 4\,dx$
3. $\int_{0}^{5} -7\,dx$
4. $3\int_{6}^{3} \pi\,dx$
5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(v)\,dv$
6. $\int_{-4}^{0} |a|\,da$
7. $\int_{-2}^{2} t^5\,dt$
8. $\int_{25}^{36} \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds$

3 Calculer le plus rapidement possible :
$\int_1^2 (x+2)(x-4)dx - \int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 x dx$.

4 Sans chercher à la calculer, donner le signe de chaque intégrale suivante.

1. $I=\int_{0,2}^{1} \ln(x)\,dx$
2. $J=\int_{3}^{1} t^{23}\,dt$
3. $K=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (u-3)\,du$
4. $M=\int_{0}^{0,9} \left(e^{t^2}-1\right)dt$

5 La fonction f, définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, est représentée par le demi-cercle $\mathscr{C}$ ci-dessous, de centre $A(1;0)$ et de rayon 1.



• Donner la valeur de $\int_0^2 f(x)\,dx$.

6 Calculer, en unité d'aire dans un repère orthonormé, l'aire sous la courbe de la fonction cube sur l'intervalle $[0;2]$.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

7 Calculer les intégrales suivantes.

1. $I=\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx$
2. $K=\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$
3. $M=\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2+4}\,dx$
4. $J=\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$
5. $L=\int_0^1 10x^4\left(x^5+3\right)^2\,dx$
6. $N=\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

8 1. Donner le signe de :

$$T=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\,dx.$$

2. Calculer la valeur exacte de T.

9 Comparer les intégrales suivantes sans chercher à les calculer.

1. $\int_0^1 x^2\,dx$ et $\int_0^1 e^x dx$
2. $\int_{10}^{100} x^{2019}\,dx$ et $\int_{10}^{90} x^{2019}\,dx$
3. $\int_{-7}^{0} x^{2019}\,dx$ et $\int_0^7 x^{2019}\,dx$

10 Parmi les intégrales suivantes, laquelle ou lesquelles semblent nécessiter une intégration par parties pour être calculées ?

$I=\int_0^1 e^{-4x}\,dx$ $\quad J=\int_0^1 (2x+1)e^x\,dx$

$K=\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ $\quad L=\int_0^1 4\ln(x)\,dx$

11 Calculer, en unité d'aire dans un repère orthonormé, l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y=x^2$ et les droites d'équations $y=0$ et $x=1$.

12 On se place dans un repère orthonormé. On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ définies sur $\mathbb{R}$.
Parmi les calculs suivants, lequel ou lesquels permettent de calculer l'aire comprise entre les courbes représentatives de f et de g et les droites d'équations $x=0,5$ et $x=1,5$?

(a) $\int_{0,5}^{1,5} (g(x)-f(x))\,dx$

(b) $\int_{0,5}^{1} (f(x)-g(x))\,dx - \int_1^{1,5} (f(x)-g(x))\,dx$

(c) $\int_{0,5}^{1} (g(x)-f(x))\,dx - \int_1^{1,5} (g(x)-f(x))\,dx$

(d) $\int_{0,5}^{1,5} (f(x)-g(x))\,dx$

13 VRAI OU FAUX

Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. $\int_{-5}^{5} x^2\,dx = 2\int_0^5 x^2\,dx$
2. $\int_0^{2020} x^5\,dx = \int_{-2020}^{0} x^5\,dx$
3. $\int_{-10}^{10} x^3\,dx = 0$

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si la proposition est vraie ou fausse.

• La fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $x \mapsto \int_1^x (t-2)^7 (1-t)^{13}\,dt$ est décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

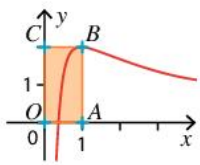
Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Dans le repère orthonormé ci-contre d'origine O, la courbe rouge a une équation de la forme $y = \dfrac{a+b\ln(x)}{x}$ $(x>0)$, où a et b sont deux réels. Soient $A(1\,;0)$ et $B(1\,;2)$.
Le point B appartient à la courbe rouge et la tangente à la courbe en ce point coupe l'axe des ordonnées en $C(0\,;2)$. Anatole prétend que $OABC$ est un rectangle et que la courbe rouge partage ce rectangle en deux domaines d'aires égales.
• Que doit-on en penser ?



Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Au XVII^e siècle, les mathématiciens Blaise Pascal et John Wallis (ci-contre) s'intéressent au calcul de l'aire sous la parabole d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0\,;a]$, notée ici $\mathcal{A}_a$, a étant un réel strictement positif. Ils utilisent la méthode des rectangles en découpant l'intervalle $[0\,;a]$ en n intervalles de même amplitude, utilisant ainsi les points de la parabole d'abscisses $k \times \dfrac{a}{n}$, pour k allant de 0 à n.

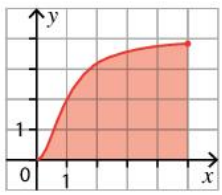
1. En appliquant cette méthode, justifier que :
$$\frac{a^3}{n^3}\left(0^2+1^2+\ldots+(n-1)^2\right) \leqslant \mathcal{A}_a \leqslant \frac{a^3}{n^3}\left(1^2+\ldots+n^2\right).$$

2. Rechercher la valeur de la somme des carrés des n premiers entiers naturels et déduire de l'encadrement précédent la valeur de $\mathcal{A}_a$.

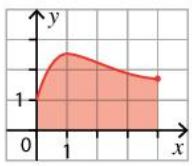
3. Effectuer des recherches sur la quadrature d'une parabole et expliquer le lien avec la notion d'intégrale. Retrouver alors la valeur de $\mathcal{A}_a$ par une autre méthode.

Aire sous la courbe d'une fonction positive

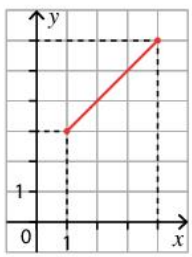
1 Donner un encadrement, le plus précis possible, par deux nombres entiers de l'aire de la surface colorée ci-dessous, en unité d'aire du graphique.



2 Donner une estimation de l'aire de la surface colorée ci-dessous, en unité d'aire du graphique.



3 La courbe d'une fonction f, définie sur l'intervalle $[1;4]$, est représentée ci-dessous par un segment dans un repère orthonormé.



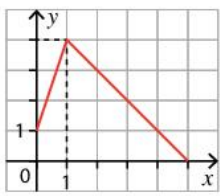
• Calculer $\int_1^4 f(t)\,dt$.

4 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x$.
Déterminer, par une méthode graphique :

a. $\int_0^1 g(x)\,dx$

b. $\int_1^3 g(x)\,dx$

5 La courbe d'une fonction f, définie sur l'intervalle $[0;5]$, est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé.

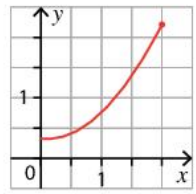


• Calculer $\int_0^5 f(u)\,du$.

6 On considère la fonction f de l'exercice 5.

• Comparer $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_2^3 f(x)\,dx$.

7 On a représenté ci-dessous la fonction g, définie par $g(x) = 0{,}5x^2 + \frac{1}{x+3}$ sur $[0;2]$, dans un repère orthonormé.

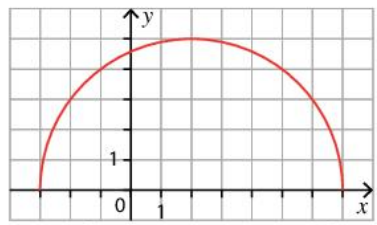


• À l'aide du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 g(x)\,dx$ sans calculer l'intégrale et en utilisant des rectangles.

8 On considère la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = |x|$, et sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

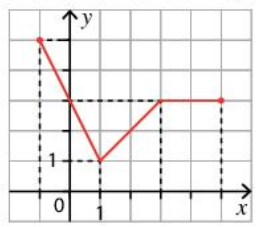
• Calculer, en unité d'aire du repère, l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -3$ et $x = 1$, et la courbe représentative de f.

9 La courbe d'une fonction h, définie sur l'intervalle $[-3;7]$, est représentée par le demi-cercle ci-dessous dans un repère orthonormé.



Déterminer : a. $\int_{-3}^7 h(a)\,da$ b. $\int_2^7 h(v)\,dv$

10 **Calculer**
La courbe d'une fonction s, définie sur l'intervalle $[-1;5]$, est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Déterminer :

a. $\int_3^5 s(t)\,dt$ b. $\int_{-1}^3 s(t)\,dt$ c. $\int_{-1}^5 s(t)\,dt$ d. $\int_0^1 s(t)\,dt$

11 **Calculer**
On considère la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$r(x) = \frac{1}{2}x + 4.$$

• Déterminer, en unité d'aire du repère, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de la fonction r, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

Calcul et propriétés des intégrales

12 **Calculer**

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_1^4 \frac{3}{x}\,dx$
2. $J = \int_0^2 \left(-4t^2+1\right)dt$
3. $K = \int_{-1}^1 (1+s)^2\,ds$
4. $L = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2y}\,dy$

13 Sans chercher à la calculer, donner le signe de chaque intégrale suivante.

1. $I = \int_0^1 e^{-x^3}\,dx$
2. $J = \int_3^1 (\ln(t))^4\,dt$
3. $K = \int_{-2}^{-1} ue^u\,du$
4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$
5. $L = \int_4^1 (1-x)\sqrt{x+1}\,dx$

14 **Calculer**

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$
2. $J = \int_0^5 \frac{1}{u+2}\,du$
3. $K = \int_1^2 \frac{-2}{x^3}\,dx$
4. $L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\,dy$

15 Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^2 \left(-2t^3+4t^2-5t\right)dt$
2. $J = \int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\,du$
3. $K = \int_1^2 6x\left(x^2+4\right)^3\,dx$
4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)dy$

16 On note I l'intégrale $\int_0^1 \frac{3x+4}{x+1}\,dx$.

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $\frac{3x+4}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième de I.

17 **Calculer**

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^1 -3e^{-3x}\,dx$
2. $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi\sin(\pi x)\,dx$
3. $K = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\,dy$
4. $L = \int_{-1}^1 15t^4\left(t^5+2\right)^3\,dt$

18 1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t)\,dt$.

2. Démontrer que, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$, $2-t \leqslant \frac{1}{t}$.
3. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\ln(x) \geqslant -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$.

19 PRISE D'INITIATIVE

Calculer $\int_1^3 \frac{2x^3-x^2+4}{x}\,dx$.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

1. On pose $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\ln(2)$.

2. Soit $I_2 = \int_0^1 g(x)\,dx$.

Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire la valeur de I_2.

21 On considère une fonction k définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_0^1 k(t)\,dt = \frac{1}{4} \text{ et } \int_0^2 k(t)\,dt = 4.$$

• Déterminer $\int_1^2 k(t)\,dt$.

22 1. Justifier que, pour tout $x \in [1;10]$, $e^x \leqslant e^{x^2}$.

2. En déduire une inégalité concernant $\int_1^{10} e^{x^2}\,dx$.

23 Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-6		1		3		5
$f(x)$	4	↗	7	↘	-3	↗	-1

1. Donner le signe de $\int_{-6}^1 f(t)\,dt$.
2. Donner le signe de $\int_3^5 f(t)\,dt$.
3. Donner un encadrement de $\int_{-6}^1 f(t)\,dt$.
4. Donner un encadrement de $\int_3^5 f(t)\,dt$.
5. Peut-on connaître le signe de $\int_1^3 f(t)\,dt$?

24 1. Justifier que, pour tout x appartenant à $[0;1]$:

$$\ln(1+x^2) \geqslant 0.$$

2. a. Déterminer le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x^2.$$

b. En déduire le signe de g sur $[0;1]$.

3. Déterminer alors un encadrement de :

$$I = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx.$$

25 1. Montrer que la fonction $x \mapsto \left(x^2+x\right)\ln(x)$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto x+1+(2x+1)\ln(x)$ sur $[1;2]$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 g(x)\,dx$.

26 1. Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$, est impaire.
2. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, conjecturer une périodicité de la fonction, puis valider cette conjecture par le calcul.
3. a. Comparer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ et $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx$.
b. Comparer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Intégration par parties

27 En utilisant une intégration par parties, calculer :
$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx.$$

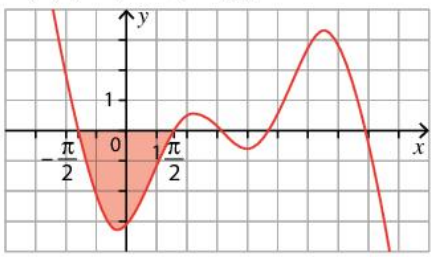
28 En utilisant une intégration par parties, calculer :
$$\int_0^{1} xe^{x}\,dx.$$

29 En utilisant une intégration par parties, calculer :
$$\int_1^{e} x\ln(x)\,dx.$$

30 Pour tout réel x strictement positif, on pose :
$$I(x) = \int_1^{x} \ln(t)\,dt.$$
1. En posant, pour t strictement positif, $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$ et en utilisant une intégration par parties, calculer $I(x)$.
2. En déduire la primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

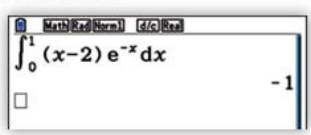
31 En utilisant une intégration par parties, calculer :
$$\int_0^{1} xe^{-2x}\,dx.$$

32 La courbe ci-dessous est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-\pi)\cos(x)$.



1. Justifier que f est négative sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer, en unité d'aire du repère, l'aire du domaine coloré à l'aide d'une intégration par parties.

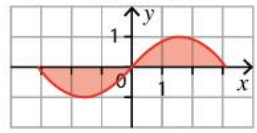
33 On donne la copie d'écran suivante.



• La valeur affichée est-elle une valeur exacte ou approchée du résultat ? Justifier.

Calcul d'aires

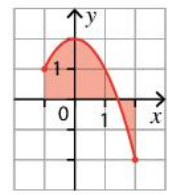
34 On considère la surface colorée ci-dessous construite, dans un repère orthonormé, avec la courbe de la fonction f définie sur $[-\pi;\pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.



• Calculer son aire en unité d'aire du repère.

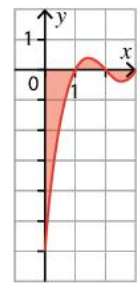
35 QCM
Dans chacun des cas suivants, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé.
Indiquer, en justifiant, quel calcul permet de déterminer l'aire de la surface colorée, en unité d'aire du repère.

1. Pour tout x appartenant à $[-1;2]$, $f(x) = -x^2 + 2$.



a. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$
b. $\int_{-1}^{1,4} f(x)\,dx - \int_{1,4}^{2} f(x)\,dx$
c. $\int_{-1}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx - \int_{\sqrt{2}}^{2} f(x)\,dx$

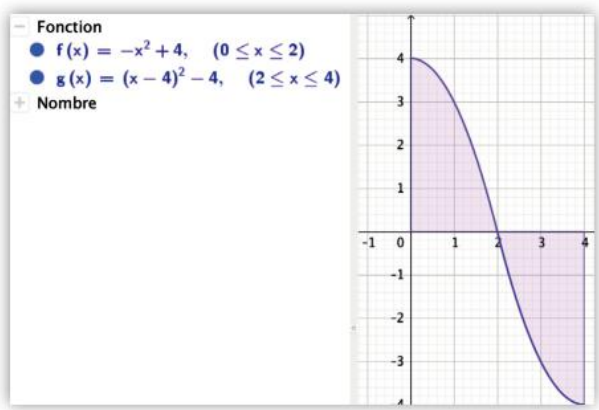
2. Pour tout x appartenant à $[0;3]$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.



a. $\int_0^{3} f(x)\,dx$
b. $\int_0^{1} f(x)\,dx - \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{3} f(x)\,dx$
c. $-\int_0^{1} f(x)\,dx + \int_1^{2} f(x)\,dx - \int_2^{3} f(x)\,dx$

36 On pose $A = \int_1^{e} \frac{1}{x}\,dx$.
• Donner une interprétation graphique de A et calculer sa valeur.

37 Le repère ci-dessous est orthonormé.
Déterminer l'aire de la surface colorée en unité d'aire du repère.



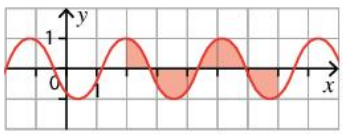
38 VRAI OU FAUX

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Soient a et b deux réels et f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$. Alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est égal, dans un repère orthonormé, à l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$, en unité d'aire du repère.
2. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et impaire, alors pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.
3. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et paire, alors pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

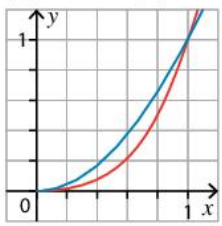
39 Communiquer

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x + 4)$.



• $\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x$ semble t-elle positive ou négative ? Argumenter.

40 On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.



1. En utilisant, après les avoir justifiées, les positions relatives de ces deux courbes, identifier la courbe représentative des fonctions f et g.
2. Déterminer l'aire, en unité d'aire du repère, du domaine délimité par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

41 1. Dans un repère orthonormé, représenter le domaine du plan compris entre la courbe représentative de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $x = 1$.
2. Calculer l'aire de ce domaine en unité d'aire du repère.

42 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 12 \text{ et } g(x) = 4x - 16.$$

1. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire, en unité d'aire d'un repère orthonormé, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :

a. $x = 5$ et $x = 6$; b. $x = 2$ et $x = 3$.

43 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 2 \text{ et } g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

1. Montrer que $f(x) - g(x) = (x - 1)(x + 5)$.
2. En déduire le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. On se place dans un repère orthonormé. Déterminer, en unité d'aire du repère, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :

a. $x = -2$ et $x = 1$; b. $x = 2$ et $x = 3$.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

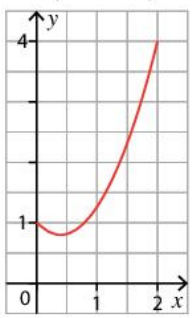
44 Soit f la fonction définie sur $[3 ; 7]$ par $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$.

• Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[3 ; 7]$.

45 Calculer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0 ; 2]$. En donner une valeur approchée au centième.

46 1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (2x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}$. Calculer $h'(x)$.
2. En déduire la valeur moyenne sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ de la fonction f définie par $f(x) = (-2x^2 + 5x - 2)\mathrm{e}^{-x}$. En donner une valeur approchée au millième.

47 On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x\ln(x^2 + 0{,}5) + 1$, définie sur $[0 ; 2]$.



1. Estimer graphiquement la valeur moyenne de la fonction f sur $[0 ; 2]$.
2. CALCULATRICE Vérifier à l'aide d'une calculatrice.

48 1. Montrer que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
2. Montrer que la valeur moyenne de la fonction ln sur $[\mathrm{e} ; 2\mathrm{e}]$ vaut $\ln(4)$.
3. On cherche à déterminer s'il existe un ou des réels a strictement positifs tels que la valeur moyenne de la fonction ln sur $[a ; 2a]$ soit nulle.

a. Montrer que c'est le cas si et seulement s'il existe un ou des réels a tels que $\ln(4a) = 1$.
b. Résoudre cette équation et conclure.

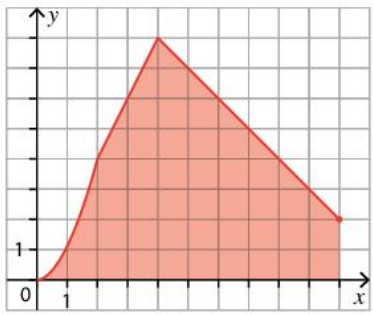
49 **Calculer**

En remarquant que, pour tout réel x strictement positif, $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x)$, calculer l'intégrale :

$$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

50 La fonction f, définie sur $[0\,;10]$ et représentée ci-dessous dans un repère orthonormé, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \leqslant x < 4 \\ -x+12 & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$$



• Calculer, en unité d'aire du repère, l'aire de la surface colorée sur le graphique.

51 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

1. Tracer sur une feuille à grands carreaux (carrés de 0,8 cm de côté) l'allure de la courbe représentative de f en prenant comme unité 2 grands carreaux sur chaque axe.

2. On pose $I = \int_1^4 f(x)\,dx$.

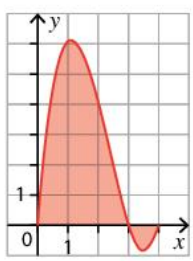
a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I = 7 - \frac{1}{2}I.$$

b. Déterminer la valeur de I.

3. En déduire l'aire, en cm^2, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, et la courbe représentative de f.

52 On considère la surface colorée ci-dessous, construite avec la courbe de la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par $f(x) = x(x-3)(x-4)$ dans un repère orthonormé.



• Calculer son aire en unité d'aire du repère.

53 **Chercher**

1. Donner le tableau de signes sur $[-5\,;5]$ de la fonction : $x \mapsto -x^2 - x + 6$.

2. En déduire une méthode de calcul et la valeur de :

$$\int_{-5}^{5} \left|-x^2 - x + 6\right| dx.$$

54 On considère la fonction H, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$H(x) = \int_0^x \sqrt{t}\,dt.$$

• Déterminer le sens de variation de H sur $[0\,;+\infty[$.

55 En remarquant que, pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

calculer l'intégrale $\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$.

56 On considère la fonction q, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$q(x) = x\ln(x).$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction Q, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$Q(x) = ax^2\ln(x) + bx^2$$

soit une primitive de q sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^4 q(x)\,dx$.

57 Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_4^{25} \left(\frac{5}{\sqrt{x}} + 3x\right) dx$

2. $J = \int_{-2}^{3} \cos(\pi x)\,dx$

3. $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$

4. $L = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\,dt$

58 **Calculer**

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$

2. $J = \int_0^1 \frac{t^4}{(t^5+1)^3}\,dt$

3. $K = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$

4. $L = \int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$

59 On note I l'intégrale $\int_0^1 \frac{3x+1}{x+1}\,dx$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\frac{3x+1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur exacte de I.

60 PRISE D'INITIATIVE

Comparer, sans les calculer, les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \text{ et } J = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

61 On considère la fonction F, définie sur $[1;2]$ par :

$$F(x)=\int_1^x (2-t)\ln(t)\,dt.$$

1. Que représente F pour la fonction $t\mapsto(2-t)\ln(t)$?
2. Déterminer le sens de variation de F sur $[1;2]$.
3. Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $F(x)$ pour x appartenant à $[1;2]$.

62 **Calculer**

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I=\int_1^2 \frac{3}{x^4}\,dx$
2. $J=\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,dx$
3. $K=\int_0^1 (1+u)^3\,du$
4. $L=\int_0^1 ye^{y^2+1}\,dy$

63 ALGO PYTHON

On considère la fonction suivante écrite en Python.

```
from math import log

def fonction(a,b,n): # a>=1, b>a, n entier naturel non nul
    inf=0
    sup=0
    x0=a
    x1=a+(b-a)/n
    for k in range(1,n+1):
        inf=inf+(log(x0))*(b-a)/n
        sup=sup+(log(x1))*(b-a)/n
        x0=x1
        x1=x0+(b-a)/n
    return(inf,sup)
```

1. Que renvoie fonction(1,2,3) ?
2. Quel est le rôle de cette fonction ?
3. L'exécution de cette fonction donne :

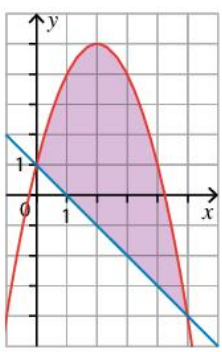
```
>>> fonction(1,2,100)
(0.38282445857472924, 0.3897559303803287)
```

Interpréter ce résultat à l'aide d'une intégrale.

4. Comment modifier cette fonction pour approcher la valeur de $\int_0^{10} e^{x^3}\,dx$?

64 Calculer, en unité d'aire du repère, l'aire de la surface colorée ci-dessous, construite dans un repère orthonormé, avec les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=5-(x-2)^2 \text{ et } g(x)=-x+1.$$



65 VRAI OU FAUX

On considère la fonction G, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

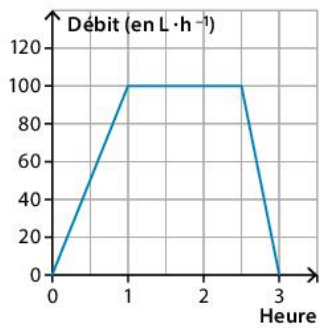
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. $G(0)=1$
2. Pour tout réel x, $G'(x)=e^{-x^2}$.
3. Pour tout réel x, $G(x)$ est positif.
4. G est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. PRISE D'INITIATIVE $G(1)\leqslant 1$

66 **Débit de pluie**

Représenter, communiquer

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction d qui représente le débit de pluie tombée en une nuit dans une piscine.



1. Décrire ce phénomène pluviométrique.
2. L'aire sous la courbe représente la quantité d'eau tombée dans cette piscine entre minuit et 3 h. Calculer cette quantité.
3. Calculer le débit d'eau moyen entre minuit et 3 h.

67 On souhaite trouver la valeur exacte de l'intégrale :

$$J=\int_0^1 \frac{x^2+3}{x+1}\,dx.$$

1. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a transformé ci-contre l'expression de la fonction à intégrer.
Justifier que ce résultat est correct.

ElémentsSimples$\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)$

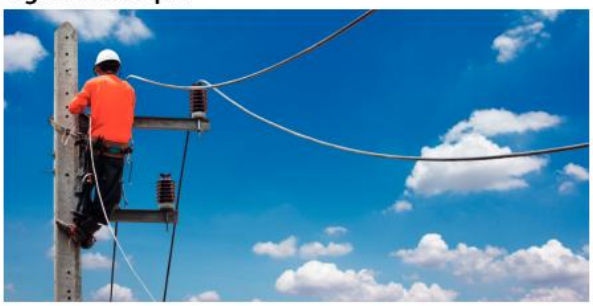
→ $x-1+\frac{4}{x+1}$

2. En déduire que la valeur cherchée est bien celle donnée ci-contre.

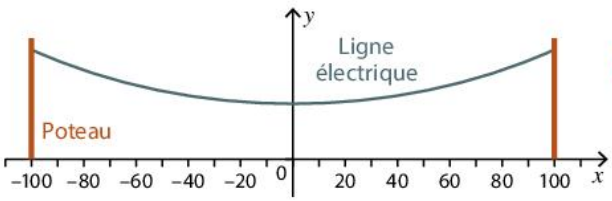
Intégrale$\left(\frac{x^2+3}{x+1},0,1\right)$

→ $\frac{8\ln(2)-1}{2}$

68 Ligne électrique



La hauteur d'une ligne électrique fixée à deux poteaux distants de 200 m peut être modélisée, comme sur le schéma ci-dessous, par la fonction h définie sur l'intervalle $[-100\,;100]$ par $h(x)=15\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{100}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\right)$.



• Déterminer la hauteur moyenne de la ligne électrique.

69 ALGO PYTHON Méthode de Monte-Carlo

On donne la fonction suivante, écrite en Python.

```
from random import random
import matplotlib.pyplot as plt
def Monte_Carlo(n):
    u=0
    for i in range(n):
        x=random()
        y=random()
        if y<=x**2:
            u=u+1
            plt.plot(x,y,'r.')
    plt.show()
    return u/n
```

1. Exécuter cette fonction avec différentes valeurs de n et analyser son fonctionnement afin d'en déterminer l'objectif.
2. Adapter cette fonction afin d'approcher la valeur de $\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

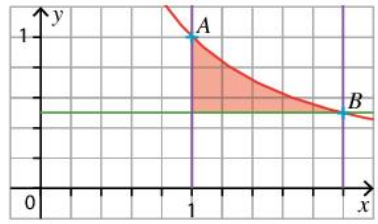
70

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_1.
2. Simplifier puis calculer u_0+u_1.
3. En déduire la valeur de u_0.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n+u_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^n-1}{n}$.
5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}\left(\mathrm{e}^t-1\right)}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

71

On se place dans un repère orthonormé. La surface colorée ci-dessous est comprise entre la courbe de la fonction inverse et les droites d'équations $x=1$, $x=2$ et $y=0{,}5$.



1. Extraire des informations données un majorant de l'aire de cette surface.
2. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième, de l'aire de cette surface en unité d'aire du repère.

72 Mouvement d'un mobile

Un mobile se déplace le long d'une droite à une vitesse constante $v_0=3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Au temps $t_0=0$ et durant 10 s, il est soumis à une accélération constante $a=0{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On dit alors que le mouvement est un mouvement rectiligne uniformément accéléré.
L'expression de la vitesse instantanée v en fonction du temps t est $v(t)=at+v_0$, où le temps t est exprimé en s, l'accélération a en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et les vitesses v et v_0 en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1. a. Donner l'expression de la vitesse instantanée du mouvement décrit ci-dessus.
b. Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.
c. Déterminer graphiquement en combien de temps le mobile aura atteint une vitesse instantanée de $4{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
d. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. a. À l'aide du graphique, donner une approximation de l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction v et les droites d'équations $x=2$ et $x=8$, en unité d'aire du repère.
b. Calculer la valeur exacte de cette aire.
3. L'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré exprime, en fonction du temps, la distance d parcourue par le mobile dans l'intervalle de temps $[0\,;t]$.
a. Sachant que $d(t)=\int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x$, déterminer l'équation horaire de ce mobile.
b. Calculer la distance parcourue durant les deux premières secondes.
c. Que représente la valeur trouvée à la question 2.b ?

73

1. Soit x un réel. Déterminer $f(x)=\int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f.
3. En déduire une primitive de la fonction $x\mapsto x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

74 On considère les intégrales :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(x)\,dx \text{ et } S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin(x)\,dx.$$

1. En effectuant deux intégrations par parties successives, démontrer que $C = \dfrac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$.

2. a. En utilisant la démonstration précédente, exprimer S en fonction de C.

b. En déduire la valeur de S.

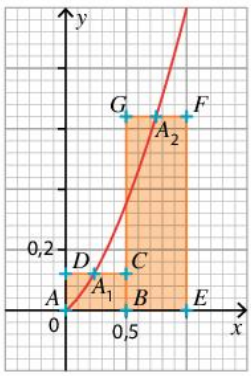
75 On note I l'intégrale $\int_0^2 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;2]$, $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = ax + \dfrac{b}{x+1}$.

2. En déduire la valeur exacte de I.

76 ALGO PYTHON CALCULATRICE **Méthode des milieux**

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $[0;1]$. La méthode des milieux consiste à approcher l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et 1 par la somme d'aires de n rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur : $f\left(\dfrac{\frac{k}{n}+\frac{k+1}{n}}{2}\right)$ (image du milieu de l'intervalle) comme illustré sur le graphique ci-dessus pour $n = 2$.



1. Calculer la somme des aires des rectangles $ABCD$ et $GBEF$, puis comparer avec le résultat donné par la calculatrice pour le calcul de l'intégrale.

2. a. Recopier et compléter les fonctions Python suivantes afin qu'elles permettent de réaliser cette approximation à l'aide de n rectangles.

```
from math import sqrt

def f(x):
    return(...)

def milieux(n):
    S=0
    for k in range(...):
        S=S+...*...
    return S
```

b. Utiliser ces fonctions pour obtenir une approximation de l'aire souhaitée avec 1 000 rectangles et comparer avec le résultat donné par la calculatrice.

77 Calculer les intégrales suivantes.

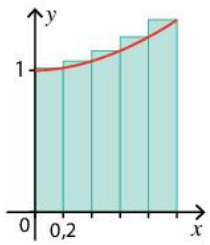
1. $I = \int_1^2 \dfrac{3}{2x+1}\,dt$

2. $J = \int_1^3 \dfrac{2}{3}t^2\left(t^3+4\right)^7\,dt$

3. $K = \int_{-3}^{-2} \dfrac{1}{t+1}\,dt$

4. $L = \int_0^1 5xe^{3x^2}\,dx$

78 CALCULATRICE On considère la fonction f, définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.



1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;1]$.

2. On a représenté cette fonction ci-contre dans un repère orthonormé. On a partagé l'intervalle $[0;1]$ en 5 intervalles et on a approché par excès l'aire sous la courbe de f à l'aide de la somme des aires des « grands rectangles », notée $\sum_{k=1}^{5} 0{,}2 \times f\left(\frac{k}{5}\right)$.

Déterminer cette valeur approchée à l'aide d'une calculatrice.

3. De façon analogue, quelle formule permet d'approcher l'aire sous la courbe de f par défaut ?

4. À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement de l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

79 **Représenter**

On considère la fonction f définie sur $[-2;6]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 \text{ si } -2 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 2x \text{ si } 1 \leqslant x < 3 \\ 2x-3 \text{ si } 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

2. Calculer $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$.

80 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^n t\sqrt{t^2+1}\,dt$.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} t\sqrt{t^2+1}\,dt$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}.$$

a. Démontrer que, pour tout réel t, $f'(t) = 3t\sqrt{t^2+1}$.

b. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = \int_0^n \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties et pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de u_n, puis en fonction de n.

c. Calculer $\int_0^1 \dfrac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$.

81 On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$
3. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

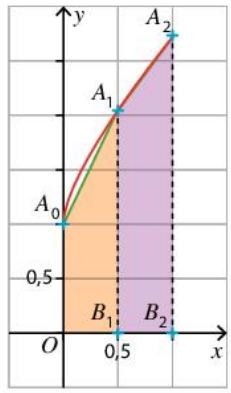
82 Soit f la fonction définie pour tout réel x par :
$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$
1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
c. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1;5]$.
2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^n f(x) dx$.
Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.
a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geqslant 0$.
b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$ où α et β sont des réels. Déterminer les réels α et β tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire I_n en fonction de n.
c. Déterminer la limite de I_n. Donner une interprétation graphique de cette limite.

83 On considère les fonctions f et g définies sur $[3;7]$ par :
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x-3}{x-2}.$$
On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
• Calculer l'aire, en cm^2, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 7$.

84 On considère les intégrales :
$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(3x)dx \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin(3x)dx.$$
• Déterminer les valeurs de C et de S à l'aide d'intégrations par parties.

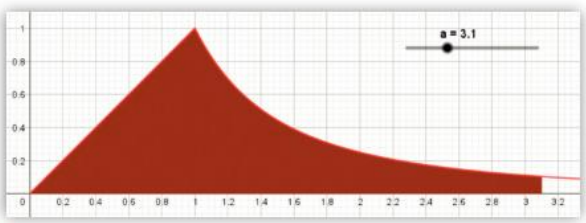
85 On considère la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
1. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.
2. Soit a un réel supérieur ou égal à 2.
Existe-t-il une ou des valeurs de a telles que : $\int_0^2 f(x)dx = \int_2^a f(x)dx$? Si oui, la (ou les) déterminer.

86 ALGO PYTHON **Méthode des trapèzes**
La méthode des trapèzes consiste approcher l'aire sous la courbe d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ par la somme d'aires de trapèzes. Par exemple, pour approcher $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$, on a, sur la figure ci-dessous, partagé l'intervalle $[0;1]$ en deux et fait apparaître deux trapèzes $OA_0A_1B_1$ et $B_1A_1A_2B_2$.



1. Calculer la somme des aires de ces deux trapèzes.
2. a. Écrire un algorithme en langage naturel permettant d'approcher cette intégrale à l'aide de l'aire de n trapèzes.
b. Le programmer en Python pour obtenir une approximation de l'aire souhaitée en unité d'aire du repère.
c. Comparer avec le résultat donné par un logiciel de calcul formel.

87 On considère la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
On se place dans un repère orthonormé.
Soit a un réel positif ou nul, on note $S(a)$ l'aire, en unité d'aire du repère, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$, représentée ci-dessous dans un cas particulier avec un logiciel de géométrie.



1. Démontrer que la fonction $a \mapsto S(a)$ admet une limite finie en $+\infty$.
2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

88 On considère l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos(x)dx$.
• Déterminer la valeur de I à l'aide d'intégrations par parties.

89 **Raisonner**

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$
a. Dresser le tableau de variation de g.
b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ, puis que :
$$1{,}89 < \lambda < 1{,}90.$$
c. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1 + x^2}.$$
a. Dresser le tableau de variation de f.
b. Vérifier que $f(\lambda) = \dfrac{1}{2\lambda^2}$.

En déduire un encadrement de $f(\lambda)$ d'amplitude 2×10^{-3}.
c. Tracer la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal en prenant 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On considère la fonction F définie sur $[1 ; +\infty[$ par :
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$
1. Montrer que F est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et préciser l'expression de $F'(x)$ pour $x \in [1 ; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de F.
2. a. Vérifier que, pour $t \geqslant 1$, on a :
$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln(t)}{t^2}.$$
b. Pour $x \geqslant 1$, on pose :
$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt.$$
À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.
c. Pour $x \geqslant 1$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,dt$.
À l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité :
$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \text{ pour } t \geqslant 1,$$
calculer $J(x)$.
d. Déduire de ce qui précède que, pour $x \geqslant 1$, on a :
$$\ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}.$$
e. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$, avec ℓ réel.
Sans calculer ℓ, vérifier que $\ln(2) \leqslant \ell \leqslant 1$.
3. Soit G la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par :
$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x).$$
a. Calculer $G'(x)$ pour $x \geqslant 1$.
b. Vérifier que, pour tout $x \geqslant 1$, $G(x) = 0$.
c. En déduire une relation que vérifie la fonction F.

90 On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^n\,dt$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?
4. a. Calculer I_1.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. En déduire les valeurs de I_2 et de I_3.
5. a. CALCULATRICE Conjecturer, à l'aide d'une calculatrice, la limite ℓ de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.
b. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\ell = 0$ en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n) établie à la question 4.b.

91 ALGO PYTHON **Algorithme de Brouncker**

Soit (S_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul :
$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$
a. Calculer I_1.
b. Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que, pour tout t appartenant à $[0 ; 1]$, $t^{n-1}(1+t) - t^{n-1} = t^n$, montrer que $I_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + I_{n-1}$.
c. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \ln(2) - S_n$.
2. a. Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que, pour tout t appartenant à $[0 ; 1]$, $\dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$, montrer que :
$$0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
b. En déduire un encadrement de I_n par deux suites.
c. Que peut-on alors dire concernant (I_n) ?
d. Que peut-on en déduire concernant (S_n) ?
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$
b. Le mathématicien anglais William Brouncker (1620-1684) a proposé un algorithme de calcul de $\ln(2)$, traduit ci-dessous en Python.

```
def Brouncker(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+1/((2*k+1)*(2*k+2))
    return  S
```

Expliquer en quoi cet algorithme est pertinent.
c. CALCULATRICE Programmer cette fonction pour $n = 1\,000$ et comparer le résultat avec l'affichage de la valeur approchée de $\ln(2)$ par la calculatrice.

Exercices de synthèse

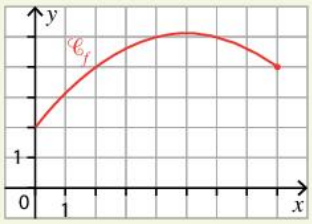
ZOOM SUR... les QCM

Parfois, certains exercices sont construits sous la forme d'un QCM. Il est important de bien lire la consigne, car la stratégie doit s'adapter au contexte selon que :
– les réponses doivent être justifiées ou non ;
– des retraits de points sont effectués en cas de réponses fausses ou non.

92 20 min QCM

Pour chaque question, choisir la seule réponse vraie, en justifiant.

1. On considère une fonction f définie sur $[0 ; 8]$ dont la courbe représentative est dessinée ci-dessous.



On a :

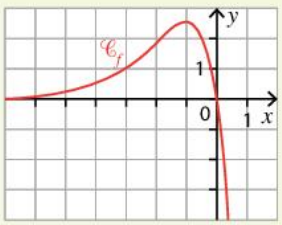
(a) $8 \leqslant \int_2^4 f(x)\,dx \leqslant 9$

(b) $8 \leqslant \int_2^4 f(x)\,dx \leqslant 10$

(c) $\int_2^4 f(x)\,dx = f(4) - f(2)$

(d) $\int_2^4 f(x)\,dx = 9$

2. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative dans un repère orthonormé.



On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Une expression de $F(x)$ peut être :

(a) $(-7 - 7x)e^x$

(b) $-7e^x$

(c) $-7xe^x$

(d) $(-7 + 7x)\ e^x$

3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire du repère, du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f définie à la question 2, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$. On a :

(a) $3 < \mathscr{A} < 4$ (b) $5 < \mathscr{A} < 6$

(c) $\mathscr{A} < 0$ (d) $\mathscr{A} > 7$

93 30 min

Une entreprise vend des voitures télécommandées. Les ventes mensuelles varient entre 1 000 et 5 000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1;5]$, la recette mensuelle est modélisée par $r(x) = 6 + x + 2\ln(x)$.

a. Montrer que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

b. Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

3. Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par :

$$g(x) = 2\ln(x).$$

a. En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive G de la fonction g.

b. En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

c. Donner l'arrondi à une dizaine d'euros près de la recette mensuelle moyenne lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

94 10 min

Une entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole).
On admet que la fonction g, définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$, modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

1. Donner une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 100]$.

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 100]$.

3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

95 1h15 ALGO

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$, alors $u_4 = -17$.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en affectant à U la valeur de u_1, il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ← ...
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0{,}7$ puis pour $u_1 = 0{,}8$. Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0{,}7$	Pour $u_1 = 0{,}8$
0,4	0,6
0,2	0,8
−0,2	2,2
−2	10
−13	59
−92	412
−737	3 295
−6 634	29 654
−66 341	296 539
−729 752	326 1928
−8 757 025	39 143 135
−113 841 326	508 860 754

Quelle semble être la limite de cette suite :
a. si $u_1 = 0{,}7$? b. si $u_1 = 0{,}8$?

Partie B

On considère la suite (I_n), définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.

3. En effectuant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4. a. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.

b. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, par :
$1! = 1$
$2! = 2\times1$
et si $n \geqslant 3$: $n! = n\times(n-1)\times\ldots\times1$.
On a ainsi, par exemple :
$3! = 3\times2\times1 = 3\times(2\times1) = 3\times2!$
$4! = 4\times3\times2\times1 = 4\times(3\times2\times1) = 4\times3!$
$8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$
$= 8\times(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1) = 8\times7!$
Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1)\times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \text{ et } I_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

2. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.

a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}7$.

b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}8$.

96 25 min

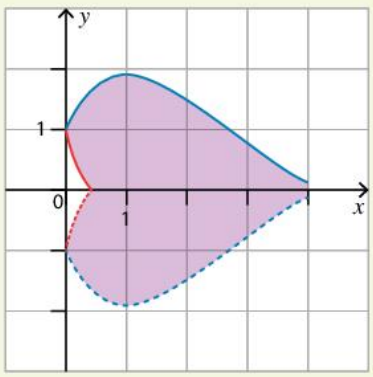
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = (3{,}6x + 2{,}4)\mathrm{e}^{-0{,}6x} - 1{,}4$$

et la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}$ (en bleu) et $\mathscr{C}'$ (en rouge) respectivement représentatives des fonctions f et g, ainsi que leurs symétriques (respectivement en pointillés bleus et pointillés rouges) par rapport à l'axe des abscisses dans un repère orthonormé.



1. Démontrer que la fonction F, définie par :

$$F(x) = (-6x - 14)\mathrm{e}^{-0{,}6x} - 1{,}4x,$$

est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;4]$.

2. En déduire l'arrondi au centième près, en unité d'aire du repère, du domaine colorié sur la figure, délimité par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$.

Consolider ses fondamentaux

97 Une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t} + 1$.

On pose, pour tout réel x, $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Questions Va piano

1. Montrer que, pour tout réel t, $f'(t) = (2-t)\mathrm{e}^{-t}$.
2. Justifier que le tableau de variation de f est le suivant.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$1+\mathrm{e}^{-2}$	↘	1

3. En s'appuyant sur ce tableau, justifier que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2{,}5$.
4. Vérifier que, pour tout réel x :
$$g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Questions Moderato

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
2. En étudiant les variations de f, démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) \geqslant 0$.
3. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.
4. Justifier que pour tout $t \geqslant 2$, $f(t) \geqslant 1$.
5. Soit x un réel supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$.

b. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

6. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Questions Allegro

1. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t-1)\mathrm{e}^{-t}$.
2. Soit x un réel. Déduire de ce qui précède une expression de $g(x)$ en fonction de x.
3. Retrouver ce résultat en utilisant une intégration par parties.
4. Étudier la fonction g et déterminer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

Se préparer aux études supérieures

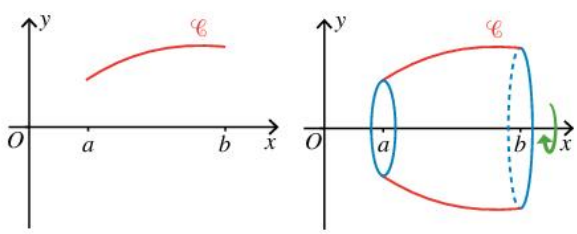
98 Limite d'une suite Approfondissement

On considère la suite S, définie pour tout entier naturel n non nul par $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

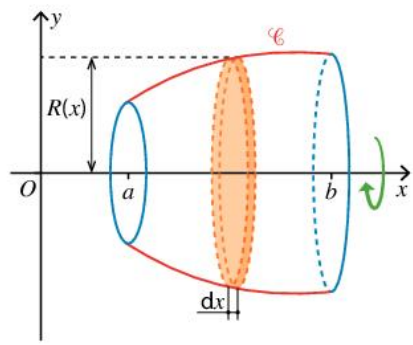
1. Soit k un entier quelconque supérieur ou égal à 1. Justifier que $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$
3. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\ln(n)+\frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln(n)+1$.
4. En déduire la limite de la suite (S_n).

99 Calcul d'un volume à l'aide d'une intégrale

En faisant tourner une courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Ox), on obtient un solide de révolution, comme ci-dessous.



Plus $\mathrm{d}x$ est petit, plus le solide orange est proche d'un cylindre de hauteur $\mathrm{d}x$. Son volume est approximativement donné par $\pi R(x)^2\,\mathrm{d}x$:



Selon le même principe que la méthode des rectangles, plus l'écart $\mathrm{d}x$ sera petit et plus la somme des volumes des « cylindres » orange sera proche du volume $\mathscr{V}$ du solide complet.

Autrement dit, la somme des $\pi R(x)^2\,\mathrm{d}x$ (pour x allant de a à b) tend vers $\mathscr{V}$ quand $\mathrm{d}x$ tend vers 0, ce que l'on peut traduire par :
$$\mathscr{V} = \int_a^b \pi R(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

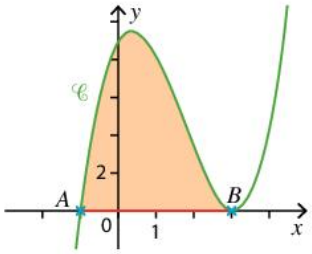
1. Retrouver la formule du volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r vue au collège.
2. Retrouver la formule du volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon r vue au collège.

No problem!

1 Area

The diagram on the right shows a sketch of the curve $\mathscr{C} : y = (x-3)^2(x+1)$.

• Calculate the shaded area between point A, where $\mathscr{C}$ intersects the x-axis, and point B, where $\mathscr{C}$ touches the x-axis.



2 Integration by parts

A park occupies an area between a straight road modelled by the function $y = 0$, another road which follows a path modelled by the function $y = e^x \sin(x)$ and a straight road modelled by $x = 2$.

1. Draw a diagram representing the path in a rectangular coordinate system.

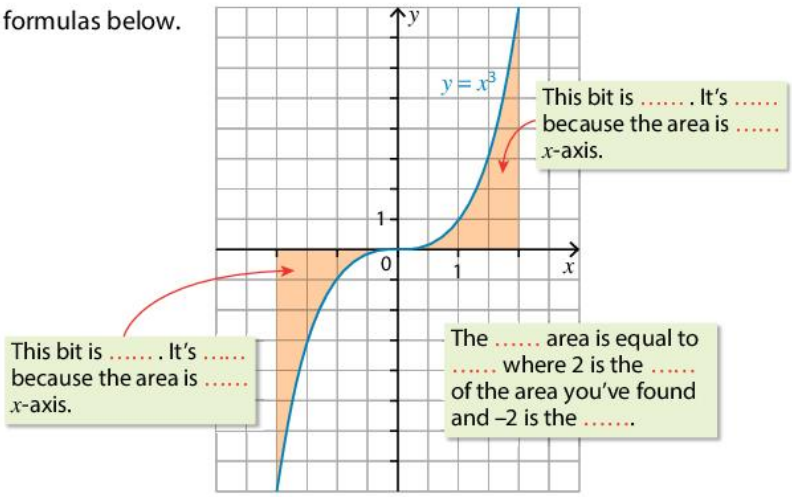
2. Use integration by parts twice to show that the area $\mathscr{A}$ of the park satisfies the equation: $\mathscr{A} = \left[e^x \sin(x)\right]_0^2 - \left[e^x \cos(x)\right]_0^2 - \mathscr{A}$.

3. Hence find the area of the park between the boundaries at $x = 0$ and $x = 2$ correct to three decimal places.

3 Gap-fill PAIR WORK

Fill the gaps using words, expressions or formulas below.

- right-hand side
- negative
- above
- below
- left-hand side
- positive
- $\int_0^2 x^3\,dx = 4$
- $\int_{-2}^0 x^3\,dx = -4$
- total
- $\int_{-2}^2 x^3\,dx = 0$

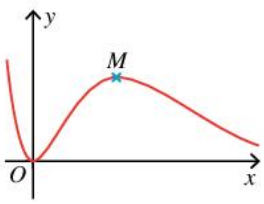


Final exam Past papers

1 The diagram on the right shows the curve $y = x^2e^{2-x}$ and its maximum point M.

1. Show that the x-coordinate of M is 2.

2. Find the exact value of $\int_0^2 x^2e^{2-x}\,dx$.



2 **1.** Find each of the following, simplifying your answer wherever possible.

a. $\int 7e^{5-\frac{3}{4}x}\,dx$ **b.** $\int \sin\left(\frac{2x}{3}+5\right)dx$ **c.** $\int \frac{8}{(9-10x)^3}\,dx$

2. Given that $a > 0$ and that $\int_a^6 \frac{1}{4x+3}\,dx = 1.986$, find the value of the constant a. Give your answer correct to one decimal place.

CHAPITRE

9 Combinatoire et dénombrement

Ressources en +

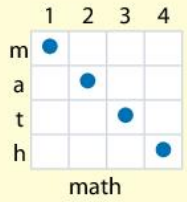
Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Utiliser des échiquiers pour dénombrer

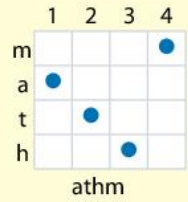
Édouard Lucas

Édouard Lucas (1842-1891) est un mathématicien français, connu notamment pour ses travaux en arithmétique sur les nombres premiers.
Avec ses amis Charles-Ange Laisant et Henri Auguste Delannoy, il contribue grandement au développement des « récréations mathématiques », de petits jeux qu'ils pensent comme un préambule à l'exploration plus rigoureuse des mathématiques

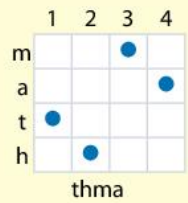
Lucas développe le concept d'arithmétique figurative et utilise l'échiquier dans un grand nombre de recherches arithmétiques, ainsi que pour résoudre des problèmes de permutation.
Par exemple, pour écrire un mot formé avec les lettres m, a, t et h, on place, sur un échiquier de 16 cases, quatre jetons de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne ne contiennent qu'un seul jeton. La position du jeton sur chaque ligne donne la position de chaque lettre dans le mot ainsi écrit.



math



athm



thma

Avec les contraintes énoncées plus haut, peut-on écrire un mot contenant deux lettres identiques ? Combien de mots différents peut-on écrire en utilisant cette méthode ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Ensembles complémentaires

On considère les deux ensembles A et B suivants.
$A = \{0 ; 4 ; 7 ; 5 ; 2 ; 9\}$;
$B = \{1 ; 5 ; 8 ; 2 ; 9 ; 3 ; 6\}$.

1. Déterminer les ensembles suivants.
   a. $C = A \cap B$ b. $D = A \cup B$.
2. Déterminer le complémentaire de l'ensemble C dans l'ensemble D. Le noter E.
3. Déterminer le complémentaire de l'ensemble C dans l'ensemble A. Le noter F.
4. Déterminer le complémentaire de l'ensemble C dans l'ensemble B. Le noter G.
5. Comparer les ensembles $F \cup G$ et E.
6. Dessiner un diagramme pour les ensembles A et B, puis représenter $F \cup G$ sur ce diagramme.

2 Détermination d'ensemble

On donne $B = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$ et $C = \{c ; f ; h ; a ; k ; e\}$.

1. Donner un ensemble A pour lequel on a :
   $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ et $A \not\subset B$.
2. Dessiner un diagramme pour représenter les ensembles A, B et C.

3 Dénombrement

Dans une classe de 30 élèves, 25 élèves pratiquent la natation, 11 élèves pratiquent le judo et 8 élèves pratiquent à la fois la natation et le judo.

1. Combien d'élèves pratiquent seulement la natation ? seulement le judo ?
2. Quel est le nombre d'élèves qui ne pratiquent ni la natation ni le judo ?

4 Partition

On donne $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. Dans chacun des cas suivants, établir en justifiant si les ensembles A, B et C forment une partition de E.

1. $A = \{0 ; 1 ; 2\}$; $B = \{3\}$; $C = \{4 ; 5 ; 6\}$.
2. $A = \{0 ; 2 ; 4 ; 6\}$; $B = \{1 ; 3 ; 5\}$; $C = \{0\}$.
3. A est l'ensemble des entiers pairs de E ; B est l'ensemble des entiers impairs de E ; $C = \{0\}$.

5 Issues d'une expérience aléatoire

On considère l'ensemble des conjonctions de coordination de la langue française :
E = {mais, ou, et, donc, or, ni, car}.
On écrit chacun de ces mots sur une carte que l'on place dans un sac. On tire une carte du sac au hasard.
Déterminer le nombre d'issues réalisant les événements suivants.

1. A : « le mot se termine par la lettre r ».
2. B : « le mot commence par la lettre o ».
3. C : « le mot contient la lettre c ».
4. $A \cap B$
5. $B \cup C$
6. $\overline{B}$

6 Arbre de dénombrement (1)

Pour former un nombre à deux chiffres, on procède de la façon suivante :
– pour le chiffre des dizaines, on pioche dans un sac contenant trois jetons numérotés respectivement 2, 3 et 4 ;
– pour le chiffre des unités, on pioche dans un sac contenant deux jetons numérotés respectivement 0 et 1.

• À l'aide d'un arbre, déterminer la liste des nombres que l'on peut ainsi former.

7 Arbre de dénombrement (2)

Un antivol de vélo possède un code de trois chiffres, chaque chiffre étant 0, 1, 2 ou 3.

• À l'aide d'un arbre de dénombrement, déterminer le nombre de codes possibles.

8 Simplifications

Simplifier les calculs suivants sans utiliser la calculatrice.

1. $\dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 3}$
2. $\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$
3. $\dfrac{(n+1) \times n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$
4. $\dfrac{(n+2) \times (n+1) \times n \times \ldots \times 2}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2}, n \in \mathbb{N}.$

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Lancers de dés

Objectif
Voir les notions de principe additif et principe multiplicatif.

On considère trois dés octaédriques (à huit faces) parfaitement équilibrés.

- Le premier dé possède quatre faces jaunes, deux faces rouges et deux faces bleues.
- Le deuxième dé possède cinq faces jaunes, deux faces rouges et une face bleue.
- Le troisième dé possède une face jaune, trois faces rouges et quatre faces bleues.

On lance ces trois dés et on note pour chacun d'eux la couleur de la face sur laquelle il s'est posé.

1. Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?
On pourra s'aider d'un arbre.
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les lancers permettant de réaliser la condition donnée.
   a. Les trois faces sont rouges.
   b. Les trois faces sont de la même couleur.
   c. Il y a exactement deux faces jaunes.
   d. Les trois faces sont de couleurs différentes.

Situation 2 Activités en centre aéré

Objectif
Introduire la notion de k-uplets.

Marie est animatrice dans un centre aéré et doit s'occuper de huit enfants en extérieur. Elle organise pour cela des jeux et des activités.
Chaque enfant se voit attribuer au hasard une couleur distincte parmi les couleurs suivantes : jaune, rose, vert, bleu, orange, fuchsia, turquoise et marron.

1. De combien de façons peut-on attribuer ces huit couleurs aux huit enfants ? On pourra s'aider d'un arbre de dénombrement.
2. Les enfants font une partie d'une variante des chaises musicales.
Sept chaises sont alignées et, quand la musique commence, les enfants dansent. Ils doivent courir s'asseoir dès que la musique s'arrête. Le dernier ne trouvant pas de place est le perdant.
   a. À l'aide des lettres J, R, V, B, O, F, T et M (qui sont les initiales des couleurs attribuées à chaque enfant), écrire trois dispositions possibles.
   b. De combien de façons les enfants pourront-ils être positionnés sur les chaises à l'arrêt de la musique ?
3. Une course en sac est organisée dans le jardin. Les trois premiers gagnent un lot : le lot « or », le lot « argent » et le lot « bronze ».
Combien de trios d'élèves gagnants peut-on dénombrer ?
4. Le beau temps perdurant, trois parties de cache-cache sont organisées.
Le « loup » est tiré au sort à chaque partie, parmi les huit enfants. Un même enfant pourra donc être plusieurs fois le loup.
Combien de triplets de loups pourra-t-il y avoir eu à l'issue des trois parties ?

Situation 3 Pierre, feuille, ciseau, puits

Objectif
Dénombrer des parties.

Un jeu comporte quatre cartes où sont dessinées quatre images : un puits, une feuille, une pierre et un ciseau.
Une main est un ensemble de cartes choisies parmi les quatre disponibles. L'ensemble vide constitue une main ne comportant aucune carte.

1. Combien de mains comportent :
   a. une carte ? **b.** deux cartes ?
2. **a.** Une main de trois cartes est-elle un triplet ?
   b. Enumérer toutes les mains de trois cartes.
3. On considère les ensembles suivants :
   • A : « ensemble des mains contenant l'image d'un puits » ;
   • B : « ensemble des mains contenant l'image d'une feuille » ;
   • C : « ensemble des mains contenant l'image d'une pierre » ;
   • D : « ensemble des mains contenant l'image d'un ciseau ».
   a. À l'aide d'un arbre dont les nœuds sont les ensembles A, B, C, D et leurs complémentaires, représenter toutes les mains possibles.
   b. En déduire le nombre total de mains.
4. Un jeu comporte 52 cartes.
   a. Combien y a-t-il de couples dans un ensemble de 52 éléments ?
   b. Combien de couples peut-on générer avec une main de deux cartes ?
   c. En déduire le nombre de mains de deux cartes.

Situation 4 Calcul de combinaisons ALGO PYTHON

Objectif
Générer le triangle de Pascal à l'aide d'un algorithme.

Soit n un entier naturel. On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$.

1. Que représentent les nombres $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$ pour E ? En déduire leurs valeurs.
2. CALCULATRICE On suppose que $n = 4$. À l'aide de la calculatrice, déterminer $\binom{4}{2}$ et $\binom{4}{3}$.
3. On suppose que $n = 5$.
   a. Combien de parties de E à trois éléments contiennent le nombre 1 ?
   b. Combien de parties de E à trois éléments ne contiennent pas le nombre 1 ?
   c. En déduire la valeur de $\binom{5}{3}$.
4. Quelle relation peut-on écrire entre $\binom{5}{3}$, $\binom{4}{2}$ et $\binom{4}{3}$?
5. Jennifer a écrit la fonction Python ci-dessous. La fonction `L.append(n)` ajoute le caractère `n` comme dernier élément de la liste `L`.

```
def combinaisons(n):
    L=[[1,1]]
    for i in range(1,n):
        C=[1]
        for k in range(1,k+1):
            C.append(L[i-1][k-1]+L[i-1][k])
        C.append(1)
        L.append(C)
    return L
```

   a. Que renvoie cette fonction lorsqu'on écrit dans la console l'instruction `combinaisons(1)` ? l'instruction `combinaisons(3)` ?
   b. Quel est le rôle de cette fonction ?

1. Principes additif et multiplicatif

1. Ensemble fini et cardinal

Définition

Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini.**
Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E, noté Card(E).

Exemple

$E = \{a\ ;\ e\ ;\ i\ ;\ o\ ;\ u\ ;\ y\}$ est un ensemble fini à six éléments et Card(E) = 6.

Remarques

- Card(∅) = 0
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble ℕ des entiers naturels ; l'ensemble des réels de l'intervalle [0 ; 1], etc.

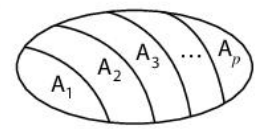
2. Principe additif

DÉMO en ligne

Propriété

Soient A_1, A_2, …, A_p, p ensembles finis deux à deux disjoints. On a :

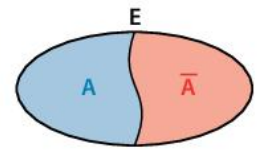
$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_p)$$



DÉMO en ligne

Corollaire

Soient A une partie d'un ensemble E fini et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
On a : $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



3. Principe multiplicatif

Définition et propriété

E et F sont deux ensembles non vides.

- Le **produit cartésien** de E par F, noté E × F, est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

DÉMO en ligne

- Lorsque les ensembles E et F sont finis, Card(E × F) = Card(E) × Card(F).

Remarque

Le signe × dans Card(E × F) désigne le produit cartésien des ensembles E et F, alors que celui dans Card(E) × Card(F) symbolise la multiplication de deux entiers.

Exemple

Soient $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $F = \{1\ ;\ 2\}$. Alors $E \times F = \{(a\ ;\ 1)\ ;\ (a\ ;\ 2)\ ;\ (b\ ;\ 1)\ ;\ (b\ ;\ 2)\ ;\ (c\ ;\ 1)\ ;\ (c\ ;\ 2)\}$.
et $F \times E = \{(1\ ;\ a)\ ;\ (2\ ;\ a)\ ;\ (1\ ;\ b)\ ;\ (2\ ;\ b)\ ;\ (1\ ;\ c)\ ;\ (2\ ;\ c)\}$.

Définition et propriété

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et E_1, E_2, …, E_k, k ensembles non vides.

- Toute liste ordonnée $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k, est appelée ***k*-uplet** (ou ***k*-liste**).
- L'ensemble de ces k-uplets est le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$.

DÉMO en ligne

- Lorsque les ensembles E_1, E_2, …, E_k sont finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k).$$

Remarque

Un 2-uplet est un **couple** et un 3-uplet est un **triplet**.

Méthode 1 Utiliser les principes additif et multiplicatif

Pour chacune des questions suivantes, indiquer le principe de dénombrement à utiliser et effectuer le calcul.

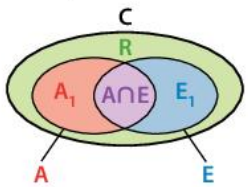
1. La carte d'un restaurant propose cinq entrées différentes et trois plats. Paula, ne souhaitant pas prendre les deux, hésite entre une entrée ou un plat. Combien a-t-elle de choix possibles ?
2. Dans le même restaurant, la carte propose également trois desserts. Jules décide de choisir le menu « entrée, plat et dessert ». Combien de menus différents Jules peut-il composer ?
3. Dans une classe de 35 élèves, 20 étudient l'allemand, 15 l'espagnol et 8 aucune de ces deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

Solution commentée

1. Il y a cinq choix d'entrées et trois choix de plats. D'après le principe additif, cela fait donc huit choix possibles.

2. Jules doit choisir successivement une entrée, un plat et un dessert. D'après le principe multiplicatif, cela donne $5 \times 3 \times 3 = 45$ menus différents.

3. On peut représenter la situation à l'aide du diagramme ci-dessous.



On note A l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand, A_1 l'ensemble des élèves qui n'étudient que l'allemand, E l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol, E_1 l'ensemble des élèves qui n'étudient que l'espagnol, R l'ensemble des élèves qui n'étudient aucune des deux langues et C l'ensemble des élèves de la classe.
On a $C = A_1 \cup (A \cap E) \cup E_1 \cup R$.
À l'aide du principe additif, on peut en déduire que :
$\text{Card}(C) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A \cap E) + \text{Card}(E_1) + \text{Card}(R)$
$= \text{Card}(A \cup E) + \text{Card}(R) = \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cap E) + \text{Card}(R)$
soit $35 = 20 + 15 - \text{Card}(A \cap E) + 8$, d'où $\text{Card}(A \cap E) = 8$.
Il y a donc huit élèves qui étudient l'allemand et l'espagnol.

EXERCICE 7 p. 292

Méthode 2 Déterminer des produits cartésiens

1. On considère les ensembles $A = \{3 ; 2 ; 1\}$ et $B = \{0 ; 3\}$. Déterminer $A \times B$ et $B \times A$.
2. On considère l'ensemble $C = \{(6 ; 2) ; (6 ; 4) ; (5 ; 2) ; (5 ; 4) ; (10 ; 2) ; (10 ; 4) ; (3 ; 2) ; (3 ; 4)\}$. Écrire C sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles.
3. On considère les ensembles $E = \{a\}$, $F = \{b ; d\}$, $G = \{a ; b ; c\}$. Déterminer $G \times E \times F$.

Solution commentée

1. $A \times B = \{(3 ; 0) ; (3 ; 3) ; (2 ; 0) ; (2 ; 3) ; (1 ; 0) ; (1 ; 3)\}$
$B \times A = \{(0 ; 3) ; (0 ; 2) ; (0 ; 1) ; (3 ; 3) ; (3 ; 2) ; (3 ; 1)\}$.

2. $C = \{6 ; 5 ; 10 ; 3\} \times \{2 ; 4\}$

3. $G \times E \times F = \{(a ; a ; b) ; (b ; a ; b) ; (c ; a ; b) ; (a ; a ; d) ; (b ; a ; d) ; (c ; a ; d)\}$

EXERCICE 9 p. 292

2. k-uplets d'un ensemble fini

1. Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments

Définition

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide.
Un **k-uplet** (ou **k-liste**) **d'éléments de E** est un élément du produit cartésien :

$$E^k = E \times E \times \ldots \times E \quad (k \text{ facteurs})$$

Exemple

$(a\,;b\,;r\,;a\,;c\,;a\,;d\,;a\,;b\,;r\,;a)$ est un 11-uplet de l'ensemble des 26 lettres $E = \{a\,;b\,;c\,;\ldots\,;z\}$.

Théorème

DÉMO en ligne

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de k-uplets de E est n^k, soit $\text{Card}\left(E^k\right) = n^k$.

Exemple

On dispose de trois boîtes notées A, B et C et cinq jetons de couleurs différentes que l'on doit ranger dans les boîtes. On note $T = \{A\,;B\,;C\}$ l'ensemble des boîtes. Les différents rangements possibles sont des 5-uplets de T. Par exemple, $(A\,;B\,;B\,;A\,;C)$ signifie que l'on a rangé le premier jeton dans la boîte A, le deuxième dans la boîte B, etc. Il y a alors $3^5 = 243$ rangements possibles.

2. k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations

Théorème

DÉMO en ligne

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) \quad (k \text{ facteurs}).$$

Exemple

On dispose de trois jetons et de cinq boîtes notées A, B, C, D et E. On doit ranger les jetons dans les boîtes, une boîte ne pouvant pas contenir deux jetons. On dispose de cinq possibilités pour le premier jeton, de quatre possibilités pour le deuxième et de trois possibilités pour le troisième. Les rangements possibles sont dont les 3-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $T = \{A\,;B\,;C\,;D\,;E\}$.
Leur nombre est $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Définition

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments tout n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple

Les permutations de l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\}$ sont :
$(a\,;b\,;c)$, $(a\,;c\,;b)$, $(b\,;c\,;a)$, $(b\,;a\,;c)$, $(c\,;b\,;a)$ et $(c\,;a\,;b)$.

Théorème et définition

DÉMO en ligne

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geqslant 1$) est le nombre noté $n!$ (qui se lit « **factorielle n** » ou « **n factorielle** »), défini par : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Remarque

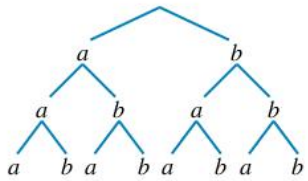
On convient que $0! = 1$.

Méthode 1 Dénombrer des k-uplets d'un ensemble fini

1. Établir la liste des triplets de l'ensemble $E = \{a ; b\}$.
2. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à l'aide des lettres A, E, I, O et U ?
3. Une grille est quadrillée avec 60 carreaux rectangulaires. On colorie chaque carreau en rouge, vert ou bleu. Combien de grilles différentes peut-on ainsi réaliser ?

Solution commentée

1. On peut s'aider d'un arbre de dénombrement.
Les triplets de E sont donc : $(a ; a ; a)$, $(a ; a ; b)$, $(a ; b ; a)$, $(a ; b ; b)$, $(b ; a ; a)$, $(b ; a ; b)$, $(b ; b ; a)$ et $(b ; b ; b)$.



2. Cela revient à chercher le nombre de 3-uplets d'un ensemble à 5 éléments.
Il y en a $5^3 = 125$.

3. Cela revient à chercher le nombre de 60-uplets d'un ensemble à 3 éléments. Il y en a 3^{60}.

EXERCICE 17 p. 293

Méthode 2 Dénombrer des k-uplets d'éléments distincts

Une compétition de jeux vidéo en ligne oppose six joueurs notés J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 et J_6.
À la fin, un classement est établi et il n'y a pas d'ex æquo. Le meilleur joueur reçoit une médaille d'or, le deuxième une médaille d'argent et le troisième une médaille de bronze.

- Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Solution commentée

On note E l'ensemble des joueurs : $E = \{J_1 ; J_2 ; J_3 ; J_4 ; J_5 ; J_6\}$.
Comme il n'y a pas d'ex æquo, un podium correspond à un triplet d'éléments distincts de E.
Il y a six choix possibles pour la médaille d'or, puis cinq pour la médaille d'argent, puis quatre pour la médaille de bronze. Il y a donc $6 \times 5 \times 4 = 120$ podiums possibles.

EXERCICE 20 p. 293

Méthode 3 Dénombrer et utiliser des permutations

1. Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) de sept lettres distinctes avec les lettres du mot « produit » ?
2. Parmi ces mots, combien commencent par une voyelle ?

Solution commentée

1. Cela équivaut à écrire une permutation des lettres du mot « produit ».
On peut donc former 7! = 5 040 mots.

2. Parmi les mots obtenus, il y a ceux qui commencent par « o », « u » ou « i ».
Dans chacun de ces trois cas, il faut compléter les six dernières lettres du mot par les six lettres restantes, ce qui constitue à chaque fois une permutation de six lettres.
Il y a donc 6! = 720 façons de compléter derrière chaque voyelle.
Le nombre de mots commençant par une voyelle est donc $3 \times 6! = 2\,160$.

EXERCICE 27 p. 294

3. Parties d'un ensemble et combinaisons

1. Nombre de parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un **sous-ensemble** de E, ou que F est **inclus** dans E) signifie que tous les éléments de F sont éléments de E.
On note alors $F \subset E$.

Remarque

Il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un k-uplet. Par exemple, $\{1 ; 2\} = \{2 ; 1\}$ est une partie à deux éléments, tandis que $(1 ; 2)$ et $(2 ; 1)$ sont des couples distincts.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a ; b ; c\}$. Les ensembles $A = \{a ; c\}$ et $B = \varnothing$ sont des parties de E.

Théorème

DÉMO en ligne

Soit n un entier naturel. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$, c'est-à-dire 2^n.

Remarque

On appelle mot de longueur n sur l'alphabet $A = \{a ; b\}$ un n-uplet d'éléments de A. Par exemple, $(a ; b ; b ; a)$ est un mot de longueur 4 sur l'alphabet A. Il y a 2^n mots de longueur n.

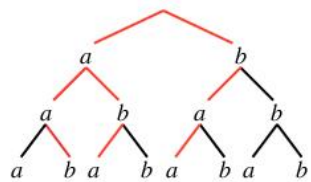
2. Combinaison

Définition

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle **combinaison de k éléments de E** toute partie de E ayant k éléments.

Exemple

On considère les mots de longueur 3 formés avec les lettres de l'alphabet $A = \{a ; b\}$. Construire un mot contenant exactement deux lettres a revient à déterminer la position des deux lettres a dans le mot de trois lettres (en rouge sur l'arbre ci-contre), c'est-à-dire une combinaison de deux éléments de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$. Il y en a trois.



Propriété

DÉMO p. 285

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments, noté $\binom{n}{k}$, est donné par $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Exemples

- Dans l'arbre précédent, il y a trois chemins contenant exactement deux lettres a : $\binom{3}{2} = 3$.
- $\binom{33}{5} = \dfrac{33 \times 32 \times \ldots \times 29}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 237\ 336$.

Remarque

Pour calculer ces nombres « à la main », on utilise la première formule (qui est l'écriture simplifiée de la seconde). Sinon, la calculatrice permet de les déterminer.

Méthode 1 Dénombrer des parties d'un ensemble

On considère l'ensemble E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

1. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E.
2. Combien y en a-t-il ? Quelle formule peut-on vérifier ?
3. Déterminer le nombre de parties à deux éléments de l'ensemble E. En déduire $\binom{4}{2}$.

Solution commentée

1. Les parties de E sont :
∅ ; E ; {1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {1 ; 2} ; {1 ; 3} ; {1 ; 4} ; {2 ; 3} ; {2 ; 4} ; {3 ; 4} ; {1 ; 2 ; 3} ; {1 ; 2 ; 4} ; {1 ; 3 ; 4} ; {2 ; 3 ; 4}.
2. Il y en a 16. On retrouve Card(E) = 2^4 = 16.
3. Il y a six parties de E à deux éléments. On a donc $\binom{4}{2} = 6$.

EXERCICE 36 p. 294

Méthode 2 Calculer et interpréter des combinaisons

1. À l'aide de la calculatrice, calculer $\binom{12}{4}$ puis interpréter cette valeur en termes de nombre de parties d'ensemble.
2. Même question pour $\binom{6}{2}$ et $\binom{10}{10}$.

Solution commentée

1. • Sur Casio : MENU Exe-Mat OPTN PROB 1 2 F3 (nCR) 4

• Sur TI : 1 2 math PROB 3:Combinaison 4

• Sur NumWorks : Dénombrement binomial(n,k) k parmi n $\binom{12}{4}$

On obtient 495. C'est le nombre de parties à quatre éléments dans un ensemble à douze éléments.

2. $\binom{6}{2} = 15$. Il y a donc quinze parties à deux éléments dans un ensemble à six éléments.

$\binom{10}{10} = 1$. Il y a une seule partie à dix éléments dans un ensemble à dix éléments (c'est l'ensemble lui-même).

EXERCICE 44 p. 295

Méthode 3 Identifier des combinaisons

Dans un jeu de 32 cartes, une « main » est constituée de cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent le valet de pique ?

Solution commentée

1. C'est le nombre de combinaisons à cinq éléments dans un ensemble à 32 éléments : $\binom{32}{5} = 201\,376$.
2. Une carte étant le valet de pique, les quatre autres cartes sont prises parmi les 31 restantes.

Le nombre de mains contenant le valet de pique est donc $\binom{31}{4} = 31\,465$.

EXERCICE 37 p. 294

4. Propriétés des combinaisons

1. Propriétés

Propriétés

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- $\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il y a n parties ayant un élément.

DÉMO en ligne

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
- $\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.
- Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

DÉMO p. 298

Exemple

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$. Il y a donc autant de façons de choisir sept objets parmi dix que trois objets parmi dix.

Propriété

Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

DÉMO p. 285

2. Relation et triangle de Pascal

Théorème (relation de Pascal)

Pour tous entiers naturels $n \geqslant 2$ et k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

DÉMO p. 284 et 298

On peut ainsi calculer les $\binom{n}{k}$ à l'aide du tableau ci-contre, appelé **triangle de Pascal**.

À l'intersection de la ligne n et de la colonne k, on lit l'entier $\binom{n}{k}$.

On commence par écrire les « 1 » de la première colonne et de la diagonale, puis on utilise la relation de Pascal, suivant le schéma :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…									

Remarque

Pour tous réels a et b et pour tout entier $n \geqslant 1$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. La formule ainsi obtenue est appelée formule du binôme de Newton et les $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Méthode 1 Utiliser des combinaisons dans un problème de dénombrement

Une urne contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule noire ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?

Solution commentée

1. Un tirage simultané de trois boules représente une combinaison de trois éléments parmi neuf. Il y a donc $\binom{9}{3} = 84$ tirages possibles.

2. Le nombre de tirages possibles avec trois boules blanches est $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$.

   Le nombre de tirages possibles avec trois boules vertes est $\binom{3}{3} = 1$.

   Il ne peut pas y avoir trois boules noires. Alors, d'après le principe additif, il y a $4 + 1 = 5$ tirages possibles contenant trois boules de même couleur.

3. On dénombre d'abord le nombre de tirages sans boule noire : $\binom{7}{3} = 35$.

   Le nombre de tirages contenant au moins une boule noire est donc $84 - 35 = 49$.

4. Cinq boules ont un numéro impair. Le nombre de tirages d'une de ces boules est donc $\binom{5}{1} = 5$.

   Les deux autres boules sont à tirer parmi les quatre restantes, soit $\binom{4}{2} = 6$.

   Alors, d'après le principe multiplicatif, le nombre de tirages contenant un seul numéro impair est $5 \times 6 = 30$.

EXERCICE 38 p. 295

Méthode 2 Utiliser les coefficients du triangle de Pascal

Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 8$ et donner la valeur de :

a. $\binom{4}{3}$ b. $\binom{5}{3}$ c. $\binom{7}{3}$ d. $\binom{8}{3}$

Solution commentée

a. On cherche $\binom{4}{3}$ dans le triangle.

$\binom{4}{3} = 4$

b. $\binom{5}{3} = 10$

c. $\binom{7}{3} = 35$

d. $\binom{8}{3} = 56$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

EXERCICE 43 p. 295

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Pour tous entiers naturels $n \geqslant 2$ et k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration

- Soit E un ensemble contenant n éléments et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de E.

- Soit a un élément de E.

Parmi toutes les parties à k éléments de E, il y en a de deux sortes :

– celles qui contiennent l'élément a. Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de $(k-1)$ éléments d'un ensemble à $(n-1)$ éléments. Leur nombre est donc égal à $\binom{n-1}{k-1}$.

– celles qui ne contiennent pas l'élément a. Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à $(n-1)$ éléments. Leur nombre est donc égal à $\binom{n-1}{k}$.

- Le principe additif permet alors de conclure que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

1 Soient A une partie à k éléments de E contenant l'élément a et B l'ensemble des éléments de A différents de a.

a. Quel est le cardinal de B ?

b. Expliquer pourquoi B est une combinaison de $(k-1)$ éléments d'un ensemble de $(n-1)$ éléments.

c. En déduire que le nombre de parties à k éléments de E contenant l'élément a est égal à $\binom{n-1}{k-1}$.

2 Soit A' une partie à k éléments de E ne contenant pas l'élément a.

a. Quel est le cardinal de A' ?

b. Expliquer pourquoi A' est une combinaison de k éléments d'un ensemble de $(n-1)$ éléments.

c. Pourquoi peut-on appliquer le principe additif ?

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments, noté $\binom{n}{k}$, est donné par :
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Soit E un ensemble de cardinal n. Indiquer ce que représente le nombre $\binom{n}{k}$ pour l'ensemble E.
- Donner le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E.
- Pour obtenir un k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E, il suffit d'abord de choisir une combinaison de k éléments de E, puis de les ordonner. En déduire que $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \binom{n}{k} \times k!$
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété ci-contre.
En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

Pour tout entier naturel n, on a : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

- Vérifier l'égalité pour $n = 0$.
- Soit E un ensemble contenant n éléments. Donner le nombre de parties de E.
- Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Quel est le nombre de parties à k éléments de E ?
- Conclure à l'aide du principe additif.

Utiliser différents raisonnements

1 Une urne contient cinq bulletins rouges et trois bulletins blancs.
On tire simultanément deux bulletins de l'urne. On note E l'ensemble de tous les tirages possibles.
On note A l'ensemble des tirages qui contiennent au moins un bulletin rouge et B l'ensemble des tirages qui ne contiennent que des bulletins rouges.

a. Décrire par une phrase l'ensemble $\overline{A}$.
b. Calculer le cardinal de $\overline{A}$.
c. Décrire par une phrase l'ensemble $\overline{B}$.
d. Calculer le cardinal de B, puis en déduire le cardinal de $\overline{B}$.

2 On dispose de cinq jetons. Chaque jeton porte une lettre différente de l'ensemble $\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$. À l'aide de ces jetons, on construit des mots de cinq lettres.

a. Combien de mots commençant par la lettre a peut-on écrire ?
b. Combien de mots commençant par la lettre a et finissant par la lettre e peut-on écrire ?
c. Combien de mots commençant par la lettre a ou finissant par la lettre e peut-on écrire ?

Formuler la négation d'une proposition

Soit x un élément d'un ensemble.

- La négation de l'affirmation « il existe au moins un x tel que la propriété est vraie » est « pour tout x, la propriété est fausse ».
- La négation de l'affirmation « pour tout x, la propriété est vraie » est « il existe au moins un x tel que la propriété est fausse ».

Connecteurs « et » et « ou »

P_1 et P_2 sont deux propriétés.

- « P_1 et P_2 » est vérifiée si les deux propriétés sont vérifiées simultanément.
- « P_1 ou P_2 » est vérifiée si au moins l'une des propriétés est vérifiée.

Carte mentale

Combinatoire et dénombrement

Déterminer le cardinal d'un ensemble fini

- Le nombre n d'éléments d'un ensemble E est noté **Card(E)**.
- $\text{Card}(\varnothing) = 0$.
- **Principe additif.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :
$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_p)$$
- Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ est l'ensemble de tous les k-uplets $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$, avec $x_i \in E_i$.
- **Principe multiplicatif.** Si les ensembles E_i sont finis, alors :
$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)$$

Modéliser à l'aide de k-uplets d'un ensemble E

- Un **k-uplet $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$** de E avec tous les $x_i \in E$ est un élément de l'ensemble :
$E^k = E \times \ldots \times E$ (k facteurs).
Par exemple, $(a ; b ; c ; a ; c ; a)$ et $(b ; a ; c ; a ; c ; a)$ sont deux 6-uplets distincts de $E = \{a ; b ; c\}$
- Le nombre de k-uplets d'un ensemble E à n éléments est :
$$\boldsymbol{n^k = \text{Card}(E^k).}$$

Modéliser à l'aide de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments

- Un **k-uplet d'éléments deux à deux distincts** de E est $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$ avec tous les $x_i \in E$ et $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_k$.
- Le **nombre de k-uplets** de E deux à deux **distincts** est :
$$n(n-1) \ldots (n-k+1) \text{ (k facteurs).}$$
- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.
- Le **nombre de permutations** d'un ensemble non vide à n éléments est :
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Modéliser à l'aide de combinaisons

- F est une **partie** de E signifie que tous les éléments de F sont éléments de E. On note **$F \subset E$.**
- Le **nombre de parties** d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.
- Une **combinaison** de k éléments parmi les n éléments de E est une partie de E ayant k éléments.
- Le **nombre de combinaisons** de k éléments parmi n éléments est :
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	…
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	$\binom{n-1}{k-1}$ +	$\binom{n-1}{k}$	1		
4	1	4	= $\binom{n}{k}$	4	1	
…						

CORRIGÉS DES EXERCICES

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

1 Le nombre de façons de ranger quatre DVD sur deux étagères est :
(a) 2^4 (b) 4^2 (c) $\binom{4}{2}$

2 Sans calculatrice, le nombre $\binom{7}{4}$ est égal à :
(a) 45 (b) 35 (c) 30

3 Sans calculatrice, $\frac{12!}{13!}$ est égal à :
(a) 13 (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{12}{13}$

4 Sans calculatrice, $\frac{8! - 6!}{5!}$ est égal à :
(a) 330 (b) $\frac{2!}{5!}$ (c) $\frac{7}{15}$

5 Sans calculatrice, l'égalité vraie est :
(a) $\binom{24}{6} = \binom{23}{5} + \binom{23}{6}$
(b) $\binom{24}{6} = \binom{23}{5} + \binom{23}{4}$
(c) $\binom{24}{6} = \binom{24}{5} + \binom{24}{4}$

6 On considère les ensembles :
$A = \{x ; y ; z\}$ et $B = \{u ; v ; w\}$.
(a) Card(A × B) = 6
(b) Card(A × B) = 3
(c) Card(A × B) = 9

7 Trois garçons et trois filles se rendent au stade pour voir un match de rugby. Ils s'assoient sur le même rang.
Ils peuvent s'asseoir :
(a) de 720 façons différentes.
(b) de 620 façons différentes.
(c) de 520 façons différentes.

8 Douze lévriers numérotés de 1 à 12 s'apprêtent à se lancer au départ d'une course. On appelle « quinté », dans l'ordre ou le désordre, les numéros de cinq premiers lévriers arrivés.
Par exemple, {3 ; 5 ; 11 ; 2 ; 7} est un quinté mais on ne sait pas dans quel ordre sont arrivés les lévriers.
Le nombre de quintés possibles est :
(a) 792 (b) 732 (c) 7 920

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

1 Soit n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.
Affirmation : Le nombre de parties non vides de E est 2^{n-1}.

2 Soit E un ensemble fini non vide dont un des éléments est noté x_1.
Affirmation : Il y a autant de parties de E contenant x_1 que de parties ne le contenant pas.

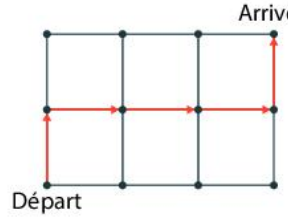
3 **Affirmation :** Le nombre de points du plan à coordonnées entières $(x ; y)$ tels que :
$10 \leqslant x < 40$; $10 \leqslant y < 40$; $x < y$ est 900.

4 On tire au hasard et simultanément cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Une main est un ensemble de cinq cartes.
Affirmation : Il y a 32^5 mains possibles.

5 Soient $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et n un entier naturel non nul.
Affirmation : On peut former n^6 nombres à n chiffres avec les chiffres de A.

6 **Affirmation :** Il y a 127 façons de choisir une ou plusieurs personnes dans un groupe de sept personnes.

7 **Affirmation :** Chercher le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le schéma ci-dessous revient à calculer $\binom{5}{2}$.



TP 1 Générer des permutations ALGO PYTHON

Objectif
Travailler sur des listes de listes.

On considère l'ensemble E = {1 ; 2 ; 3}.
On cherche à écrire une fonction Python donnant toutes les permutations de E.

1. On a écrit la fonction permutation_3 ci-dessous, dont l'argument L est une liste de trois nombres distincts.

```
1 def permutation_3(L):
2     p = [L]
3     z = p[0][:]
4     for j in range(0,2):
5         z.append(z.pop(0))
6         p.append(z[:])
7     return p
```

a. Expliquer la ligne 3 du programme.

b. Lorsqu'on écrit dans la console permutation_3([1,2,3]), obtient-on toutes les permutations de E ?

2. Pour dénombrer toutes les permutations de E, on propose la méthode suivante.

• Étape 1 : on part de la permutation (1 ; 2 ; 3), on met le premier terme de la liste à la fin et on obtient (2 ; 3 ; 1). On recommence et on obtient (3 ; 1 ; 2).

• Étape 2 : maintenant, en partant de (1 ; 2 ; 3), on met le deuxième terme de la liste à la fin et on obtient (1 ; 3 ; 2).

On procède de la même manière en partant des permutations (2 ; 3 ; 1) et (3 ; 1 ; 2) obtenues à l'étape 1.

a. Expliquer pourquoi, à l'étape 1, on s'arrête à (3 ; 1 ; 2).

b. Vérifier que, par cette méthode, on dénombre bien toutes les permutations de E.

3. On a commencé à écrire la fonction permutation_3bis ci-contre dont l'argument L est une liste de trois nombres distincts.

```
1 def permutation_3bis(L):
2     p = [L]
3     for k in range(0,...):
4         for i in range(0, len(p)):
5             z = ...
6             for j in range(0,...):
7                 z.append(z.pop(...))
8                 p.append(z[:])
9     return p
```

a. Recopier et compléter le script pour qu'il retourne toutes les permutations de L.

b. Tester le programme en recopiant et complétant le tableau ci-dessous, puis vérifier qu'il renvoie bien toutes les permutations de L lorsqu'on écrit permutation_3bis([1,2,3]) dans la console.

p	k	i	j
[[1,2,3]]	0	0	0
[[1,2,3],[2,3,1]]			
...			

4. En modifiant la fonction permutation_3bis, écrire une fonction permutation_n dont l'argument L est une liste de n nombres distincts et qui renvoie toutes les permutations de L.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

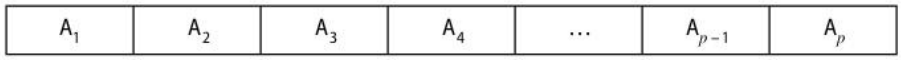
- Dans une liste de listes L=[[.],[.],...,[.]] :
  – L[0][0] est le premier élément de la première liste, L[0][1] est le deuxième élément de la première liste, L[1][0] est le premier élément de la deuxième liste, etc.
  – L[0][:] est la première liste de L.
- Dans une liste L, l'instruction L.pop(k) renvoie l'objet de rang k et enlève cet objet de la liste.

```
>>> L=[1,2,3]
>>> L.pop(0)
1
>>> L
[2, 3]
```

TP 2 Dénombrement de partitions TABLEUR

Objectif
Utiliser le tableur pour dénombrer des partitions.

On rappelle que des parties A_1, A_2, …, A_p non vides d'un ensemble E constituent une partition de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est égale à E.



On se propose de déterminer le nombre de partitions en p sous-ensembles d'un ensemble E à n éléments, avec $1 \leqslant p \leqslant n$. On notera S_p^n ce nombre, appelé nombre de Stirling.

1 Quelques cas particuliers

Pour $n = 2$. L'ensemble E = $\{a ; b\}$ peut être schématisé de la façon suivante : a b.

Il y a une seule façon d'avoir une partition en une partie : a b, donc $S_1^2 = 1$.

Il y a également une seule partition en deux parties : a | b, donc $S_2^2 = 1$.

a. À l'aide de schémas analogues, déterminer S_2^3, S_3^3 et S_3^4.

b. Vérifier que $S_2^3 = S_1^2 + 2S_2^2$ et $S_3^4 = S_2^3 + 3S_3^3$.

2 On admet que les nombres S_p^n, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, vérifient la relation $S_p^n = S_{p-1}^{n-1} + pS_p^{n-1}$.

On souhaite automatiser le calcul de ces nombres jusqu'à $n = 10$ à l'aide d'un tableur.

a. Créer une feuille de calcul comme ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	1									
3	2	1	1								
4	3	1									
5	4	1									
6	5	1									
7	6	1									
8	7	1									
9	8	1									
10	9	1									
11	10	1									

b. Pourquoi a-t-on rempli la colonne B avec des « 1 » ?

c. Interpréter le nombre situé dans la cellule C3 ? Comment s'écrit-il ?

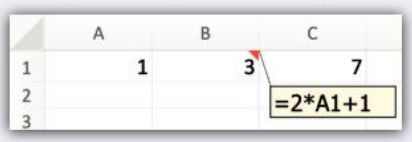
d. Quelle formule doit-on écrire dans la cellule C3 de manière à pouvoir la recopier vers la droite et vers le bas et remplir ainsi le tableau ?

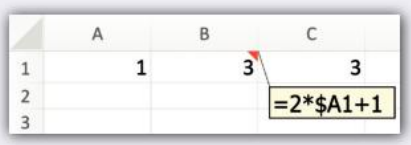
3 Un groupe de dix personnes participe à une chasse au trésor. L'organisateur de cette chasse décide de faire quatre groupes non nécessairement de même taille.
De combien de façons peut-il former ces groupes ? On s'aidera de la feuille de calcul précédente pour répondre.

Boîte à outils

Tableur

- Lorsqu'on place le symbole $ devant la lettre et/ou le chiffre d'une cellule, cela permet de fixer la colonne, la ligne, ou les deux, ce qui est utile lorsqu'on recopie par la suite.
- Dans l'exemple ci-dessous, sans $, la valeur de C1 se calcule à partir de celle de B, tandis qu'avec $, c'est la valeur de A1 qui est toujours utilisée pour le calcul de celle de C1.





Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Calculer mentalement les nombres suivants.

a. $4!$ b. $5!$ c. $\frac{10!}{9!}$ d. $\frac{7!}{9!}$

2 Calculer mentalement les nombres suivants.

a. $\binom{15}{2}$ b. $\binom{6}{3}$ c. $\binom{100}{100}$ d. $\binom{2020}{2019}$

3 Calculer mentalement les nombres suivants.

a. $\binom{4}{2}\times\binom{8}{2}$ b. $3!\times\binom{10}{3}$

c. $\frac{7!}{2!\times 5!}$ d. $\binom{9}{7}$

4 On considère deux parties A et B d'un ensemble E telles que :

$\text{Card}(E) = 70$, $\text{Card}(A) = 27$ et $\text{Card}(B) = 30$.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre d'éléments n'appartenant pas à $A \cup B$.

1. Si $A \cap B = \varnothing$.
2. Si $A \subset B$.
3. Si $\text{Card}(A \cap B) = 20$.

5 VRAI OU FAUX

Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

1. $4! \times 3! = 12!$
2. $2020! = 2020 \times 2019!$
3. $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$
4. $\binom{2020}{7} + \binom{2020}{8} = \binom{2021}{8}$

6 Déterminer le plus rapidement possible la valeur de la somme suivante.

$$\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}$$

7 Soit $E = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$.

1. Donner le nombre de permutations de E.
2. Combien de parties de trois chiffres contient E ?
3. Avec les chiffres de E, combien peut-on écrire :

a. de nombres compris entre 100 et 999 ?

b. de nombres strictement inférieurs à 1 000 ?

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

8 On considère l'ensemble $E = \{m\ ;\ a\ ;\ t\ ;\ h\ ;\ s\}$.

1. Combien de parties contient l'ensemble E ?
2. Combien de parties de deux lettres contient E ?
3. Combien de mots de trois lettres différentes peut-on écrire avec les lettres de E ?

9

1. Démontrer l'égalité suivante.

$$31! + 32! = 33 \times 31!$$

2. Soit n un entier naturel. Factoriser $n! + (n+1)!$

10

Dans une école, sur un porte-manteau, 20 patères sont alignées. Le matin en arrivant, les élèves posent leurs manteaux, tous sur des patères différentes. Déterminer le nombre de façons qu'ils ont de les accrocher s'il y a :

a. 20 enfants ; b. 19 enfants ; c. 17 enfants.

11 QCM

Donner la seule réponse correcte parmi les trois proposées.

1. Un éleveur de chiens possède quatre mâles et trois femelles. Le nombre de couples qu'il peut former pour la reproduction est égal à :

(a) 12 (b) 7 (c) 21

2. Une course cycliste compte 20 participants. Les trois premiers à l'arrivée montent sur les trois marches du podium. Le nombre de podiums possibles est égal à :

(a) 6 840 (b) 1 140 (c) 8 000

3. On tire simultanément trois boules dans une urne contenant six boules numérotées de 1 à 10. Le nombre de tirages possibles est :

(a) 120 (b) 720 (c) 1 000

12 Pour organiser un jeu télévisé, la productrice choisit au hasard quatre candidats parmi 100 personnes comprenant 60 femmes et 40 hommes.

1. Combien a-t-elle de choix possibles ?
2. Par souci de parité, elle souhaite que, parmi les candidats, il y ait exactement deux femmes et deux hommes. Sous cette condition, combien lui reste-t-il de choix possibles ?

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Soient les ensembles $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ et $F = \{a ; b\}$.
   • Le nombre de parties de l'ensemble E est égal au nombre de mots de quatre lettres que l'on peut écrire avec les lettres de F.
2. Au basket-ball, un entraîneur décide de choisir les cinq joueurs qu'il aligne sur le parquet parmi les 20 joueurs de son effectif.
   • Il a $\frac{20!}{15!}$ possibilités s'il ne tient pas compte des postes occupés par les joueurs.
3. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Alors $\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-3} = \binom{n}{3}$.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Au poker, chaque joueur reçoit une main composée de cinq cartes distribuées au hasard. Le jeu contient quatre couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique) et chaque couleur contient une carte de chaque hauteur (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as).
Un carré est constitué de quatre cartes de même hauteur. Un full est une main contenant un brelan (trois cartes de même hauteur) et une paire (deux cartes de même hauteur). Une suite est une main composée de cinq cartes de hauteurs consécutives (par exemple « 9,10, valet, dame, roi, as » ou « 1, 2, 3, 4, 5 »). Une couleur est une main composée de cinq cartes de même couleur.
• Calculer le nombre :
a. de mains comportant un carré ; b. de fulls ; c. de suites ; d. de couleurs.

Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

On dit qu'un ensemble E est dénombrable lorsqu'il existe un moyen d'associer à chaque élément de E un et un seul entier naturel. On dit qu'on établit une « bijection » entre $\mathbb{N}$ et E.
Par exemple, l'ensemble P des nombres pairs positifs ou nul est dénombrable car, à chaque nombre n de P, on peut associer le nombre $\frac{n}{2}$ qui est un entier naturel et cet entier est bien unique.

1. Rechercher comment démontrer que les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. L'ensemble $[0 ; 1]$ est-il dénombrable ? Justifier.
3. Faire des recherches sur la notion de bijection.

Principes additif et multiplicatif

1

Soient F l'ensemble des fauteuils d'une salle de cinéma et S l'ensemble des spectateurs qui se présentent pour assister à une séance.
Comparer les cardinaux des ensembles F et S dans chacun des cas suivants. On supposera qu'un fauteuil ne peut pas accueillir plus d'un spectateur.
1. Tous les spectateurs entrent et occupent tous les fauteuils.
2. Tous les spectateurs entrent et n'occupent pas tous les fauteuils.
3. Certains spectateurs ne peuvent pas entrer car les fauteuils sont tous déjà occupés.

2 L'éclairage d'un local est assuré par un ensemble A d'ampoules électriques commandées par un ensemble I d'interrupteurs.
Comparer les cardinaux des ensembles A et I dans chacun des cas suivants.
1. Chaque interrupteur commande une seule ampoule et il n'y a pas de va-et-vient (système permettant d'éteindre et allumer une lampe à partir de deux interrupteurs placés d'un bout à l'autre d'une pièce ou d'un couloir).
2. Chaque interrupteur commande une seule ampoule et il y a un va-et-vient.
3. Certains interrupteurs commandent plusieurs ampoules et il n'y a pas de va-et-vient.

3 Soient A et B deux ensembles tels que :
$\text{Card}(A) = 12$, $\text{Card}(B) = 15$ et $\text{Card}(A \cap B) = 7$.
• Déterminer $\text{Card}(A \cup B)$.

4 Le tableau ci-dessous donne le nombre d'éléments de deux sous-ensembles M et V d'un ensemble E, ainsi que celui de leurs complémentaires dans E.

	V	$\overline{V}$
M	40	12
$\overline{M}$	76	22

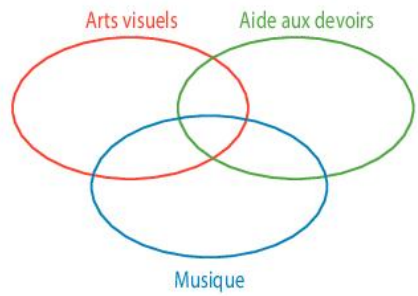
1. Que signifie le nombre 76 ?
2. Déterminer $\text{Card}(V \cup M)$.

5 Combien faut-il écrire de chiffres en tout pour écrire tous les nombres de 1 à 256 ?

6 Un imprimeur utilise 612 caractères pour numéroter les pages d'un livre.
• Quel est le nombre de pages du livre ?

7 Une salle de fitness compte 150 adhérents.
75 d'entre eux suivent les cours collectifs et 112 utilisent les appareils de musculation.
• Combien d'adhérents de cette salle suivent les cours collectifs et utilisent les appareils de musculation ? On pourra s'aider d'un diagramme ou d'un tableau.

8 **Représenter**
Un centre périscolaire propose trois activités aux jeunes qui le fréquentent : aide aux devoirs, arts visuels et musique, chaque inscrit devant choisir au moins une activité.
On sait que 45 inscrits demandent au moins de l'aide aux devoirs, 66 font au moins de la musique et 72 au moins des arts visuels.
Six jeunes sont inscrits aux arts visuels et à l'aide aux devoirs, 21 aux arts visuels et à la musique, 12 à l'aide aux devoirs et à la musique.
Enfin, 15 jeunes sont inscrits aux trois options.
• Recopier et compléter le diagramme ci-dessous et en déduire le nombre total d'inscrits dans ce centre.



9 On considère les ensembles :
$A = \{u ; w\}$ et $B = \{0 ; 1\}$.
• Déterminer $A \times B$ et $B \times A$.

10 On considère l'ensemble A des points M du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ dans un repère sont des entiers vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 12 \end{cases}$$

• Montrer que A est le produit cartésien de deux ensembles E et F que l'on définira et dont on donnera le cardinal.

11 On lance trois dés (rouge, vert, bleu) numérotés de 1 à 6 et on note, dans l'ordre, le résultat obtenu sur le dé rouge, puis le vert, puis le bleu.
1. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
2. Quel est le cardinal de cet ensemble ?

12

Dans un restaurant d'entreprise, le repas comporte un plat et un dessert. Le menu propose au choix deux plats et trois desserts.

• De combien de manières peut-on composer un repas ?

13 Dans une machine à laver, le sélecteur de températures et le sélecteur de durée comportent chacun trois positions.

• De combien de programmes de lavages dispose-t-on avec cette machine à laver ?

k-uplets d'un ensemble fini

14 À l'aide d'un arbre, faire la liste des triplets de l'ensemble {1; 2 ; 3 ; 4}.

15 Combien de nombres à cinq chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?

16 On appelle phrase musicale un ensemble ordonné de quatre notes.

La partition représentée ci-dessous montre trois phrases musicales.

1. Combien de phrases musicales différentes de quatre notes peut-on réaliser avec les notes *do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* et *si* ?
2. Combien de phrases musicales différentes de quatre notes commençant par *do-mi* ou *mi-do* peut-on écrire ?

17 Pour aller à son travail, Léo rencontre sur son trajet sept feux tricolores. Chaque feu peut avoir la couleur rouge (R), orange (O) ou vert (V).

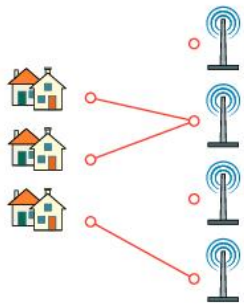
On note F = {R ; O ; V} l'ensemble des différentes couleurs d'un feu.

1. Écrire un 7-uplet d'éléments de F.
2. Un trajet étant une succession de couleurs des feux, combien de trajets différents Léo peut-il faire pour se rendre à son travail ?

18 **Raisonner**

Trois villages peuvent être rattachés à une des quatre antennes-relais du secteur.

Le schéma suivant représente une liaison possible entre les villages et les antennes.



• Combien y a-t-il de liaisons possibles, sachant que plusieurs villages peuvent être rattachés à la même antenne ?

19 VRAI OU FAUX

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant.

1. On joue n fois à Pile ou Face. Le nombre de résultats possibles est 2^n.
2. Dans un questionnaire, on doit répondre par « oui » ou « non » à chacune des huit questions.
Le nombre de réponses possibles pour l'ensemble du questionnaire est 8^2.
3. On doit ranger cinq objets dans trois boîtes.
Il y a 5^3 rangements possibles.
4. Le nombre de mots de sept lettres écrits avec les lettres A et S est 2^7.

20 Une association doit élire les trois membres de son bureau (président, secrétaire et trésorier) parmi sept candidats. Une même personne ne peut pas cumuler les postes.

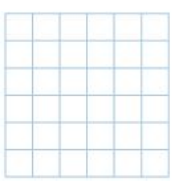
• Combien de bureaux différents peuvent être élus ?

21 Le digicode d'un immeuble est composé des cinq chiffres de 0 à 4 et des lettres A, B et C.

1. Combien de codes contenant quatre caractères tous différents peut-on composer ?
2. Combien de codes à trois chiffres différents suivi d'une lettre peut-on composer ?

22 On doit remplir la grille ci-contre avec des 0 ou des 1.

• Combien de grilles différentes peut-on remplir ?



23 Une commerciale travaillant en Nouvelle-Aquitaine doit se rendre dans trois villes différentes parmi Bordeaux, Périgueux, La Rochelle, Pau et Bayonne.

• Combien de trajets différents peut-elle effectuer ?

24 Dans une pièce de théâtre, il y a six rôles à pourvoir, qui peuvent être joués par n'importe lesquelles des douze personnes de la troupe.
• Combien de distributions possibles des rôles peut-on avoir ?

25 Écrire toutes les permutations des éléments de l'ensemble $\{a\,;b\,;c\,;d\}$.

26 Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) écrit en modifiant l'ordre des lettres du mot d'origine.
• Écrire les anagrammes du mot « lire »

27 Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres des mots suivants ?
1. « deux »
2. « facteurs »
3. « factorielle »

28 **Calculer**
1. Calculer $n!$ pour $n \in \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$.
2. Simplifier :
a. $\dfrac{6!}{3!}$
b. $\dfrac{9!}{11!}$
c. $\dfrac{20!}{3!\times 5!\times 2!}$
3. Simplifier $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

29 ALGO PYTHON
Recopier, puis compléter la fonction Python ci-dessous de telle sorte qu'elle renvoie la valeur de $n!$ pour un entier naturel n donné.

```
def factorielle(n):
    f=1
    for i in range(...,...):
        f=...
    return f
```

30 Écrire à l'aide de factorielles les nombres suivants.
1. $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$
2. $(n+1)(n+2)\ldots 2n$

31 1. De combien de façons peut-on faire asseoir dix personnes sur une rangée de dix chaises ?
2. Ce nombre change-t-il si les chaises sont disposées en deux rangées de cinq ?

32 Une ronde est une danse en cercle.
• De combien de façons peut-on disposer huit personnes pour danser une ronde ?

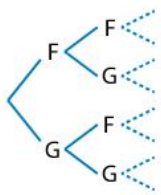
33 On dispose de sept porte-manteaux.
• De combien de façons peut-on ranger sept manteaux sans les empiler ?

Parties d'un ensemble et combinaisons

34 On considère l'ensemble :
$$E=\{x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4\,;x_5\}.$$
1. Écrire les parties de E à deux éléments.
2. Écrire les couples de E.

35 On désigne par A, B et C les ensembles de lettres utilisées respectivement pour écrire les mots « fil », « fusil » et « fusible ».
1. Déterminer les ensembles A, B et C.
2. Écrire toutes les inclusions qui existent entre ces trois ensembles.

36 **Représenter**
L'arbre incomplet ci-dessous représente les compositions possibles d'une famille de quatre enfants dans l'ordre des naissances. F désigne une fille et G désigne un garçon.



1. Recopier et compléter l'arbre.
2. Combien de compositions obtient-on ?
3. À l'aide de l'arbre, dénombrer le nombre de compositions avec :
a. une fille et trois garçons ;
b. deux filles et deux garçons.
4. Écrire chacun des nombres trouvés à la question précédente à l'aide des coefficients $\binom{n}{k}$.

37

Au poker, on appelle « main » tout ensemble de cinq cartes.
On considère un jeu de 52 cartes.
1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant l'as de pique ?

38 Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher. Il y a trois boules blanches, numérotées de 1 à 3, cinq boules rouges numérotées de 1 à 5 et sept boules vertes numérotées de 1 à 7.
On tire simultanément trois boules de l'urne.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. On note B l'ensemble des boules blanches, R celui des boules rouges et V celui des boules vertes.
a. Donner le nombre de tirages simultanés de trois boules :
• dans B ; • dans R ; • dans V.
b. À l'aide du principe additif, en déduire le nombre de tirages unicolores dans l'urne.

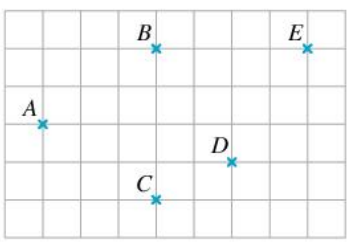
39 Associer à chacune des définitions le calcul qui lui correspond.

• Définitions
1. Nombre de tirages de p objets parmi n.
2. Nombre de tirages successifs avec remise de p objets parmi n.
3. Nombre de tirages successifs sans remise de p objets parmi n.
4. Nombre de tirages successifs sans remise de n objets parmi n.

• Calculs

(a) $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (b) $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ (c) n^p (d) $n!$

40 **Chercher, modéliser**
Dans le plan, on considère cinq points non alignés comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Combien de vecteurs ayant pour extrémités ces points peut-on tracer ? On comptera le vecteur nul.
2. Combien de droites passant par deux de ces points peut-on tracer ?

41 Le proviseur doit constituer un groupe de cinq élèves pour aller présenter leur lycée dans les collèges voisins.
1. Six élèves sont candidats. Combien de manières de constituer le groupe y a-t-il ?
2. Dix élèves sont candidats dont quatre sont en seconde et six en terminale. Le groupe de représentants doit être composé de deux élèves de seconde et trois élèves de terminale.
a. Parmi les candidats, combien peut-on former de couples d'élèves de seconde ? de triplets d'élèves de terminale ?
b. Conclure en utilisant le principe multiplicatif.

42 Le père de Colin a rangé les jouets de celui-ci dans un sac en toile opaque. Le sac contient une petite voiture, une balle, un sifflet, un bateau et un camion.
1. Colin prend trois jouets, un par un, dans le sac, sans les remettre. Combien de triplets de trois jouets peut-il obtenir ?
2. Un autre jour, il prend un jouet, joue un instant avec puis le remet dans le sac et recommence ainsi trois fois. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. Le jour suivant, il attrape trois jouets en même temps dans le sac. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Propriétés des combinaisons

43 En utilisant le triangle de Pascal, calculer :
a. $\binom{4}{2}$ b. $\binom{5}{2}$ c. $\binom{6}{3}$ d. $\binom{6}{4}$

44 CALCULATRICE
1. Traduire les nombres suivants en nombres de parties d'ensemble.
a. $\binom{6}{1}$ b. $\binom{15}{15}$ c. $\binom{12}{2}$ d. $\binom{12}{10}$ e. $\binom{30}{0}$
2. Calculer les nombres précédents :
a. à l'aide de la calculatrice ;
b. sans la calculatrice.

45 **Choisir la bonne formule**
1. À l'aide des formules du cours, écrire le calcul de $\binom{2\,021}{2\,020}$ de trois façons différentes.
2. Pour chacune des écritures trouvées, compter le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer le calcul.

46 Expliquer le résultat ci-dessous, obtenu à la calculatrice.

$\binom{2020}{5}+\binom{2020}{4} \approx 2.79576\text{E}14$

$\binom{2021}{5} \approx 2.79576\text{E}14$

47 **Calculer**
Effectuer le calcul ci-dessous sans calculatrice.

$$\left(\binom{10}{9}-\binom{10}{0}\right)\times\left(\binom{10}{1}+\binom{10}{10}\right)$$

48 PRISE D'INITIATIVE
Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n non nul.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

49 Une enquête sur la fréquentation de trois réseaux sociaux sur Internet (F, T et I) a donné les résultats suivants.
• 6 200 000 internautes utilisent au moins F, 4 500 000 utilisent au moins T et 2 500 000 utilisent au moins I.
• 3 000 000 utilisent F et T, 1 500 000 utilisent F et I et 800 000 utilisent T et I.
• 500 000 utilisent les trois réseaux.
1. Calculer le nombre d'internautes qui utilisent exactement deux réseaux sociaux.
2. Quel est le nombre d'internautes qui utilisent au moins l'un des trois réseaux ?

50 On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3\}$.
1. a. Écrire toutes les parties de E.
b. Écrire tous les couples de E.
c. Écrire tous les triplets d'éléments distincts de E.
2. Combien de nombres à trois chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?
3. On peut écrire 6 561 k-uplets de E. Quelle est la valeur de k ?

51 **Modéliser**
Un lycée propose dix spécialités aux élèves de première générale.
1. Combien y a-t-il de combinaisons possibles de trois spécialités pour un élève de première générale ?
2. Tristan a choisi la spécialité mathématiques, mais hésite pour les deux autres entre SVT, NSI, physique-chimie, anglais et SES.
Combien a-t-il de combinaisons possibles ?

52 **Octet informatique**
En informatique, un octet est une liste de huit chiffres constituée uniquement de 0 et de 1.
1. Combien d'octets différents peut-on former ?
2. Calculer le nombre d'octets différents commençant par 1 et finissant par 0.
3. Dénombrer le nombre d'octets comportant exactement :
a. une fois le chiffre 1 ; b. cinq fois le chiffre 1.
4. Combien de messages de cinq octets différents peut-on écrire ?

53 **Modéliser, calculer**
On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 52 cartes.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Dénombrer les tirages qui comportent un as et un roi. En déduire la probabilité d'un tel tirage.
3. Une paire est un tirage constitué de deux cartes de même hauteur.
a. Combien y a-t-il de paires d'as ? En déduire le nombre total de paires.
b. Calculer la probabilité d'obtenir une paire.
4. Quel est le plus probable : tirer deux cœurs ou tirer une paire ?

54 **Chromosomes**
Modéliser, chercher

L'espèce humaine possède 23 paires de chromosomes. Chaque cellule reproductrice (aussi appelée gamète) contient un chromosome de chaque paire choisi de façon aléatoire.
Lors de la reproduction, l'ovule de la mère et le spermatozoïde du père fusionnent pour former une cellule appelée zygote qui, par divisions successives, engendrera un embryon. Le zygote contient ainsi 23 paires de chromosomes et chaque paire est constituée d'un chromosome provenant de la mère et d'un chromosome provenant du père.
1. Combien un être humain peut-il produire de gamètes différents ?
2. Combien de zygotes différents un couple peut-il engendrer ?

55 ALGO PYTHON
1. On a écrit la fonction Python suivante pour simuler une expérience aléatoire.

```
1 import random
2 def tirage():
3     L=range(1,7)
4     return random.sample(L,3)
```

L'instruction random.sample (L, k) renvoie un k-uplet d'éléments différents de la liste L.
a. Combien de résultats différents la fonction tirage peut-elle renvoyer ?
b. Parmi tous les tirages précédents, combien contiennent les chiffres 1, 3 et 5 ?
2. a. Recopier et compléter le script de la fonction frequence suivante, d'argument n, pour qu'elle renvoie la fréquence d'apparition des listes contenant les chiffres 1, 3 et 5.

```
6  def frequence(n):
7      k=0
8      for i in range(...):
9          z=tirage()
10         z.sort()
11         if ...:
12             ...
13     return ...
```

b. Programmer cette fonction et donner les valeurs affichées pour n =100 et n = 10 000.

56 Une urne contient une boule blanche, deux boules vertes, trois boules bleues et six boules rouges. On tire simultanément quatre boules de l'urne.
Déterminer le cardinal de chacun des ensembles suivants
1. R, ensemble de tous les tirages exclusivement constitués de boules rouges.
2. V, ensemble de tous les tirages contenant exactement deux boules vertes.
3. Q, ensemble de tous les tirages dont les boules sont de quatre couleurs différentes.

57 **Calculer**
Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les expressions suivantes.
1. $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$
2. $\dfrac{n!}{n}-(n-1)!$
3. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
4. $\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n+1)!}$

58 PRISE D'INITIATIVE
1. On considère cinq points distincts sur un cercle. Combien de triangles distincts peut-on construire à l'aide de ces points ?
2. Combien de points faut-il placer sur un cercle pour pouvoir tracer au moins 2 020 droites distinctes reliant deux de ces points ?

59 Un numéro de téléphone français est constitué de dix chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres sont quelconques.
1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculer le nombre de numéros contenant :
a. les dix chiffres ;
b. exactement trois fois le chiffre 6.

60 Pour entrer dans son immeuble, Paul doit saisir un code formé d'une lettre suivie de trois chiffres.
1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Paul a oublié son code mais il se rappelle qu'il commence par la lettre O. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre O ?
3. Il se rappelle aussi que les chiffres sont 1, 5 et 9, mais ne se souvient plus dans quel ordre. Combien d'essais au maximum lui faudra-t-il pour rentrer chez lui ?

61 Un fleuriste dispose de cinq roses, trois tulipes, deux tournesols et quatre feuillages décoratifs pour composer un bouquet.
1. Combien de bouquets constitués de trois fleurs et d'un feuillage peut-il composer ?
2. Il décide de mettre une fleur de chaque espèce avec un feuillage pour constituer son bouquet. Quel est le nombre de bouquets possibles ?

62 Après avoir précisé s'il s'agit de k-uplets, de permutations ou de combinaisons, dénombrer :
a. les rencontres de football possibles lors d'un tournoi opposant 16 équipes ;
b. les classements (sans ex æquo) possibles à l'arrivée d'une course de 100 mètres où huit athlètes sont alignées ;
c. les mots de cinq lettres différentes que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet ;
d. les façons de disposer six jetons sur un damier de 64 cases.

63 VRAI OU FAUX
E est un ensemble à n éléments et k un entier tel que $k \leqslant n$.
Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant.
1. Le nombre de k-uplets de E est plus petit que le nombre de parties à k éléments de E.
2. Le nombre de parties de E est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{a\,;\,b\}$.

64 On considère le motif suivant.

Combien y a-t-il de façons de colorier le motif :
a. à l'aide de quatre couleurs ?
b. à l'aide de six couleurs, sans utiliser deux fois la même couleur ?
c. à l'aide de trois couleurs sans que deux cases adjacentes ne soient de la même couleur ?
d. en noir et blanc, avec exactement trois cases blanches ?

65 **Loterie nationale**

À la loterie nationale, on dispose de deux urnes. La première contient 49 boules bleues numérotées de 1 à 49 et la seconde 10 boules rouges numérotées de 1 à 10.
On tire d'abord successivement et sans remise cinq boules de la première urne, puis une boule de la seconde. Un tirage est ainsi constitué de six numéros.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. La loterie propose le tableau de gains suivant.

Bons numéros	Gains (en €)
5 bleus et 1 rouge	5 000 000
5 bleus	100 000
4 bleus et 1 rouge	1 000
4 bleus	500

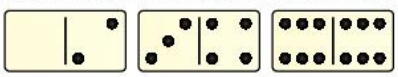
Combien de tirages permettent de gagner :
a. 5 000 000 € ? b. 100 000 € ? c. 1 000 € ?

66 Lors d'une course hippique, on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux sont au départ et chaque cheval est numéroté de 1 à 15.
Combien y a-t-il de quintés différents :
a. en tenant compte de l'ordre ?
b. sans tenir compte de l'ordre ?

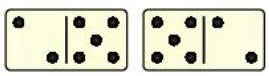
67 **ADN** ALGO PYTHON
L'ADN contient le code génétique de chaque cellule vivante. La séquence de l'ADN, ou code génétique, est une liste formée avec les quatre nucléotides notés A, C, G et T. Un codon est un triplet de nucléotides (non nécessairement différents).
1. Combien y a-t-il de codons différents ?
2. Combien y a-t-il de séquences différentes d'ADN de trois codons ?
3. a. Écrire un algorithme en Python qui renvoie la longueur minimale d'une séquence d'ADN (c'est-à-dire le nombre minimal de nucléotides) permettant d'obtenir n codes génétiques différents.
b. Quel résultat obtient-on pour $n = 10^{15}$?

68 **Raisonner**
Soient n et p deux entiers naturels tels que :
$$1 \leqslant p \leqslant n.$$
• Démontrer que $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$.

69 Un domino est constitué de deux cases. Chaque case contient un nombre de points compris entre 0 et 6.



1. a. Les dominos ci-dessous sont-ils différents ?



b. En déduire que le nombre de dominos différents est égal à 28.
2. On tire au hasard un domino.
a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de deux chiffres pairs ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

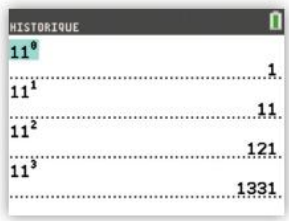
70 **Démonstration**
Soit n et k deux entiers vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
On rappelle que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.
1. Exprimer $\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-1}{k}$ en fonction de k et n.
2. Démontrer par le calcul la relation de Pascal :
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
3. Démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

71 **Coefficients binomiaux**
Soit x un nombre réel.
1. Développer $(1+x)^2$ puis $(1+x)^3$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant en écrivant les coefficients de chacun des termes obtenus dans le développement de $(1+x)^n$ pour les valeurs de n données dans le tableau.

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^4	x^6
$n=0$							
$n=1$							
$n=2$							
$n=3$							

3. Conjecturer les coefficients obtenus pour $n=4$ puis pour $n=6$.
4. LOGICIEL Vérifier les conjectures à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

72 Hapsatou a effectué les calculs ci-contre à l'aide de sa calculatrice.
Elle affirme : « Les puissances de 11 permettent de retrouver les valeurs du triangle de Pascal. »



• A-t-elle raison ? Expliquer.

73 **Représenter, modéliser**
On lance quatre fois une pièce bien équilibrée et on s'intéresse au nombre de « Face » obtenu. On considère l'événement A : « obtenir exactement trois fois "Face" ».
1. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. a. Quel est le nombre de chemins menant à l'événement A ?
b. Expliquer pourquoi il y autant de chemins menant à l'événement A que de parties à trois éléments de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. En déduire $P(A)$.
3. Si on lance dix fois la pièce, quelle est la probabilité de A ?

74 Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.
1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?
• A : « la somme des numéros est paire » ;
• B : « la somme des numéros est impaire ».

75 L'alphabet français comporte 26 lettres dont six voyelles.
Combien peut-on former de mots de cinq lettres :
a. comportant des lettres différentes ?
b. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
c. contenant exactement une voyelle ?

76 **Plaques d'immatriculation**

Chaque véhicule circulant en France est identifié par une plaque d'immatriculation.
Depuis 2009, elle est constituée de trois parties : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, séparées par des tirets.

Les lettres I, O et U sont exclues à cause de leur ressemblance avec le 1, le 0 et le V.
Les couples de lettres SS et WW sont interdits à gauche et le couple SS est interdit à droite.

1. Calculer le nombre total de plaques d'immatriculations différentes que l'on peut attribuer.
2. Combien d'immatriculations contiennent chacune des lettres M, A, T et H exactement une fois ?
3. Un palindrome est un texte qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche.
Par exemple, la plaque AB-212-BA est un palindrome.
Combien d'immatriculations sont des palindromes ?

77 ALGO PYTHON **Dérangements**

On considère l'entier $n \geqslant 2$ et l'ensemble :

$$E = \{1 ; 2 ; \ldots, n\}.$$

Un dérangement de E est une permutation de E qui ne laisse aucun élément de E à sa place. Le nombre de dérangements de E se note D_n.

1. En écrivant tous les dérangements possibles pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, déterminer D_2, puis D_3.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 4$.
a. Quels sont les valeurs possibles pour le premier élément d'un dérangement de E ?
b. Combien y a-t-il de dérangements commençant par 2 et 1 ?
c. Déterminer le nombre de dérangements dont le premier élément est 2 et le deuxième est différent de 1.
d. En déduire D_4.
3. On admet que, pour tout $n \geqslant 3$:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

a. Calculer D_5.
b. Écrire une fonction Python derangement d'argument n qui renvoie D_n.
4. Un employé facétieux a préparé dix enveloppes adressées à dix personnes différentes et place les dix courriers correspondants de façon aléatoire dans les enveloppes.
a. Quelle est la probabilité que tous les courriers arrivent à la bonne adresse ?
b. Quelle est la probabilité pour qu'aucun courrier n'arrive chez le bon destinataire ?

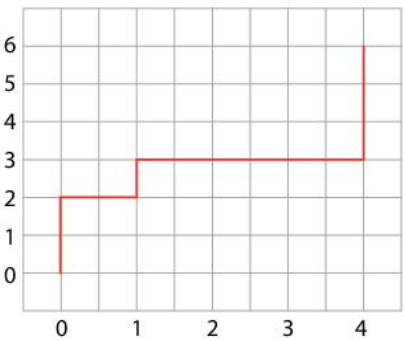
78 On lance simultanément cinq dés bien équilibrés numérotés de 1 à 6.
• Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le numéro 1 ?

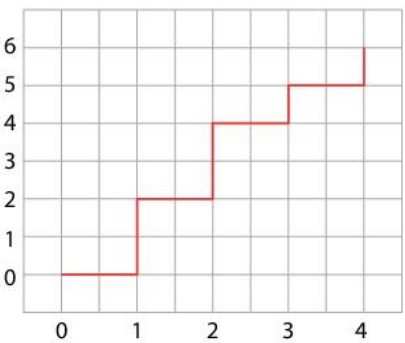
79 ALGO PYTHON **Déplacement d'un robot**

Pour simuler le déplacement aléatoire d'un robot dans un repère, Ambre a écrit la fonction chemin suivante en langage Python.

```
import random
import matplotlib.pyplot as pl
def chemin():
    L=["h","h","h","h","h","h","d","d","d","d"]
    x=0
    y=0
    abs=[x]
    ord=[y]
    while len(L)>0:
        k=random.randint(0,len(L)-1)
        d=L.pop(k)
        if d=="h":
            y=y+1
        else:
            x=x+1
        abs.append(x)
        ord.append(y)
    pl.grid()
    pl.plot(abs,ord)
    pl.show()
```

Elle a exécuté son programme à deux reprises et obtenu les affichages suivants.





1. a. Quelles sont les coordonnées du point de départ du robot ?
b. Le robot arrive-t-il toujours au même point ? Si oui, quelles sont ses coordonnées ?
c. Dessiner d'autres chemins possibles.
2. Calculer le nombre de chemins possibles pour le robot.

80 E est un ensemble de n éléments.
Calculer la valeur de n dans chacun des cas suivants.
1. Il y a exactement 4 556 listes de deux éléments distincts de E.
2. E contient exactement 325 parties à deux éléments.

81 Soit n un entier naturel non nul.
L'organisateur d'un tournoi de rugby dispose de n terrains pour répartir les matchs.
On suppose qu'il y a $2n$ équipes inscrites. On se propose de dénombrer de deux manières différentes l'ensemble de tous les premiers matchs possibles.
1. **Première méthode.**
Commencer par fixer n équipes, qui occuperont chacune un terrain différent.
2. **Deuxième méthode.**
Choisir la première paire d'équipes, puis la suivante et ainsi de suite.

82 **Dresseur de perroquets**

Un dresseur possède cinq perroquets (trois verts, un jaune, un blanc) et cinq perruches (deux vertes, deux jaunes et une blanche).
Lors d'un spectacle, le dresseur appelle ses oiseaux un par un, ceux-ci s'installant sur des perchoirs alignés. Une entrée des dix perroquets constitue donc un 10-uplet.
1. Combien d'entrées possibles dénombre-t-on ?
2. Déterminer le nombre d'entrées possibles :
a. alternant perroquets et perruches ;
b. dans lesquelles les oiseaux sont regroupés par couleur.
3. Deux perroquets, Coco et Lolo, étant inséparables, ils veulent toujours être sur des perchoirs voisins l'un de l'autre. Déterminer le nombre d'entrées possibles respectant cette contrainte.
4. On note X la variable aléatoire égale à la position d'entrée du premier oiseau blanc.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

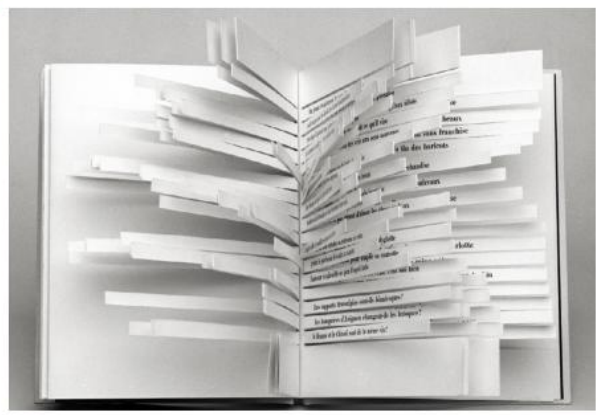
83 Nathan désire ranger cinq bandes dessinées, trois mangas et deux livres de mathématiques sur une étagère. De combien de façons différentes peut-il ranger ses livres :
a. s'il veut que ses livres restent groupés par genre ?
b. s'il veut que seuls ses livres de mathématiques restent groupés ?
c. s'il ne veut pas que deux bandes dessinées soient côte à côte ?

84 **Formule du binôme de Newton**
Soient a et b deux nombres réels. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

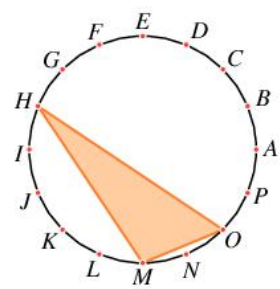
85 Démontrer à l'aide de la formule donnée à l'exercice précédent que, pour tout entier naturel non nul n, le nombre $(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n$ est entier.

86 **Cent mille milliards de poèmes**



Dans son ouvrage *Cent mille milliards de poèmes*, l'écrivain Raymond Queneau propose dix pages, que l'on notera P_1, P_2, …, P_{10}, comportant quatorze vers chacune, soit un sonnet. Pour composer un sonnet, le lecteur choisit le premier vers parmi les dix premiers vers des dix pages, le second vers parmi les dix deuxièmes vers des dix pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers.
1. a. Justifier le titre de l'ouvrage.
b. Les sonnets des pages P_3 et P_8 se terminent par le mot « destin ». Combien peut-on fabriquer de sonnets se terminant par ce mot ?
2. On décide de changer la règle de construction d'un sonnet par la suivante : « On choisit un vers dans chaque page mais, de plus, le mot final de deux vers différents ne peut être le même. » Parmi les 140 vers proposés, seul le mot « marchandise » termine deux vers situés sur deux pages différentes, à savoir les pages P_2 et P_4. Combien de sonnets satisfaisant à la nouvelle règle de construction peut-on fabriquer ?

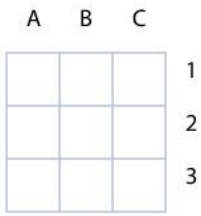
87 Un cercle de rayon 1 est partagé en 16 arcs de cercle de même longueur comme ci-contre.



1. Combien peut-on former de triangles distincts avec ces points ?
2. Combien peut-on former de triangles :
a. isocèles ?
b. équilatéraux ?
c. rectangles ?
d. rectangles et isocèles ?

88 **Chercher, raisonner**

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes.



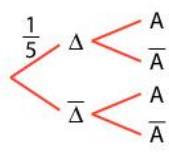
Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre. Enfin, une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.
On note les événements suivants :
• H : « les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
• V : « les trois jetons sont alignés verticalement » ;
• D : « les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
• N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».
Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des événements H, V et D. En déduire que la probabilité de N est égale à $\frac{19}{21}$.

2. On considère la variable aléatoire X définie par :
• $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
• $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
• $X = -2$, lorsque N est réalisé.
Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée. Elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille. On note Δ l'événement « la machine M_1 est déréglée ».
a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal, c'est-à-dire $P_\Delta(H)$, puis, de même, d'avoir un alignement vertical $P_\Delta(V)$, et enfin d'avoir un alignement en diagonale $P_\Delta(D)$.
b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\frac{3}{28}$.

4. A désigne l'événement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ».
On admet que $P(\Delta) = \frac{1}{5}$.
a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre en précisant les cinq probabilités correspondantes.



b. Calculer $P(A)$.

5. Lorsqu'on joue, on ne sait pas si la machine M_1 est en bon état de marche. On joue une partie et on constate que les trois jetons sont alignés.
Déterminer la probabilité pour que la machine M_1 soit déréglée.

89 PRISE D'INITIATIVE

Combien de personnes doit-on réunir pour que la probabilité que deux d'entre elles fêtent leur anniversaire le même jour dépasse 50 % ?

90 **Modéliser, communiquer**

On considère l'ensemble :
$$E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}.$$
Avec deux chiffres distincts x et y de E, on crée un unique domino simple, noté indifféremment $\boxed{x}\boxed{y}$ ou $\boxed{y}\boxed{x}$.
Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double, noté $\boxed{z}\boxed{z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.

2. On tire au hasard un domino.
a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
Un élève affirme : « La probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\frac{4}{45}$. »
Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

91 **Communiquer**

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules rouges et n boules vertes.
On tire les boules de l'urne les unes après les autres jusqu'à ce que l'urne soit vide, en notant au fur et à mesure la couleur de la boule tirée : R pour rouge et V pour verte.

1. a. Faire le lien entre le résultat obtenu et l'ensemble $E = \{R ; V\}$.
b. Montrer que le nombre de ces $2n$-uplets est $\binom{2n}{n}$.

2. On considère le jeu suivant.
On gagne 1 € à chaque tirage d'une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée ; sinon on ne gagne rien. La partie est finie lorsque l'urne est vide.
a. Calculer la probabilité de gagner exactement 1 € lors d'une partie.
b. Calculer la probabilité de gagner 2 € lors d'une partie.
c. Soit k un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant 2n$.
Calculer, en fonction de n, la probabilité de gagner 1 € au k-ième tirage.
Cette probabilité dépend-elle du rang k ?

92 Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (1+x)^n.$$
On admet que, pour tous réels a et b :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer f' de deux manières différentes.

2. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.$$

ZOOM SUR... les dénombrements

Lorsqu'un exercice nécessite de dénombrer, il peut être utile de s'aider de schémas, d'arbres ou de grilles, avant d'utiliser les formules combinatoires du cours. Cela permet de savoir si on dénombre des parties ou des k-uplets, avec ou sans répétitions, et ainsi de choisir la formule adaptée.

93 QCM 10 min

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Indiquer laquelle, sans justification.

1. Afin de constituer le bureau dirigeant d'une association, on choisit trois personnes dans un groupe de douze personnes. Chacun des trois membres a une fonction spécifique.
Le nombre de bureaux possibles est :
(a) 4 (b) 1 728 (c) 220 (d) $12\times11\times10$

2. Un sac contient trois boules blanches, quatre boules noires et une boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant
La probabilité de tirer trois boules noires est :
(a) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ (b) $\dfrac{9}{8}$ (c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ (d) $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

3. Dans un jeu de 32 cartes, le nombre de mains de cinq cartes contenant le valet et la dame de trèfle est :
(a) $\binom{12}{3}$ (b) $\binom{30}{3}$ (c) $\binom{32}{5}$ (d) $30\times29\times28$

94 VRAI OU FAUX 10 min

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. Au championnat du monde d'athlétisme, la finale du saut à la perche se joue entre huit athlètes.
Affirmation 1 : Il y a 40 320 classements possibles sans ex æquo.

2. Dix coureurs participent à la finale du 100 mètres. Tous arrivent et il n'y a pas d'ex æquo.
Affirmation 2 : Le nombre d'arrivées dans l'ordre possibles pour les trois premiers est 120.

3. Quinze personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres.
Affirmation 3 : Le nombre de poignées de main échangées est 210.

4. En informatique, un octet est une liste de huit éléments pris dans l'ensemble $\{0 ; 1\}$.
Affirmation 4 : Le nombre d'octets possibles est 8^2.
Affirmation 5 : Il y a 70 octets possibles contenant exactement quatre 1.

95 VRAI OU FAUX 10 min

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\binom{n}{n-1} = n$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $(n+1)! = (n+1)n!$

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n}$.

96 40 min

Une association organise un loto. Une urne contient 90 jetons numérotés de 1 à 90. L'organisateur tire successivement et sans remise les jetons de l'urne et annonce le numéro obtenu.
Chaque joueur achète un carton sur lequel sont inscrits cinq nombres différents et gagne lorsque tous les numéros de son carton ont été annoncés.

1. L'organisateur tire cinq jetons.
a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
b. Quelle est la probabilité pour un joueur d'avoir les cinq bons numéros ?

2. L'organisateur tire dix jetons. Combien y a-t-il de cartons gagnants ?

3. ALGO On considère l'algorithme suivant.

$f \leftarrow 5!$
$c \leftarrow 1$
Pour i allant de 0 à 4
  $c \leftarrow (n-1)\times c$
$c \leftarrow \dfrac{c}{f}$

a. Quelle est la valeur de c à la fin de cet algorithme lorsque $n = 6$? lorsque $n = 10$?
b. Quel est le rôle de cet algorithme ?
c. Modifier cet algorithme pour obtenir le nombre de jetons que l'organisateur doit tirer afin que la probabilité d'avoir un carton gagnant dépasse 50 %.

97 30 min

Lors de l'oral d'un concours, l'examinateur propose aux candidats deux sujets choisis aléatoirement dans une banque publique de 80 sujets.

1. Quel est le nombre possible de tirages ?

2. a. Baptiste a préparé dix de ces sujets. Calculer le nombre de tirages possibles comportant au moins l'un des sujets qu'il a révisés.
b. Combien aurait-il dû préparer de sujets pour que plus de neuf tirages sur dix contienne l'un des sujets révisés ?

98 QCM 10 min

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Indiquer laquelle sans justification.

1. Un groupe de six snowboardeurs se présente pour monter au télésiège. Le groupe est constitué de trois adultes et trois enfants et chaque télésiège dispose de quatre places.
Le nombre de façons dont ils peuvent constituer deux groupes est :

(a) $\binom{6}{2}$ (b) $\binom{6}{4}$ (c) 35 (d) 360

2. On reprend la situation précédente. Les trois enfants veulent rester ensemble. Le nombre de groupes possibles est alors :

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

3. Un sac contient cinq jetons blancs et trois noirs.
On tire trois jetons simultanément dans le sac.
La probabilité de tirer trois jetons de la même couleur est :

(a) $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} \times \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}$ (b) $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} + \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}$

(c) $\dfrac{8\times7\times6}{\binom{8}{3}}$ (d) $\dfrac{3}{5}+1$

4. Le nombre de façons de ranger quatre livres sur deux étagères est :

(a) 2^4 (b) $\binom{4}{2}$ (c) 4^2 (d) 4!

99 40 min

Pour réaliser un carrelage, on dispose des trois types de carreaux suivants de forme carrée et dont le côté mesure 50 cm.

On souhaite carreler une pièce de forme rectangulaire de 10 mètres de long et 1,5 mètre de large.

1. Combien y a-t-il de façons possibles de carreler la pièce ?

2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite carreler la pièce de façon à ce que deux carreaux ayant un côté en commun ne soient pas de la même couleur. On note u_n le nombre de façons de carreler n rangées de trois carreaux en respectant cette contrainte.

a. Calculer u_1.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. En déduire le nombre de carrelages possibles de la pièce avec cette contrainte.

100 60 min ALGO PYTHON

Cent coureuses participent à une course cycliste qui compte six étapes. Chaque coureuse porte un dossard numéroté de 1 à 100.
À la fin de chaque étape, huit coureuses sont choisies au hasard pour subir un contrôle antidopage.

1. Combien peut-on former de groupes différents de huit coureuses ?

2. Pour désigner de façon aléatoire la liste des huit coureuses à contrôler, une commissaire de course a écrit le script Python suivant.

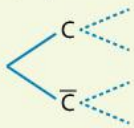
```
from random import randint
def controle():
    L=[]
    D=[]
    for k in range(100):
        L.append(k)
    for i in range(8):
        x=L.pop(randint(0,99-i))
        D.append(x)
    return L
```

La fonction controle renvoie-t-elle le résultat attendu ? Sinon, la corriger.

3. À l'issue de la course, on interroge une coureuse choisie au hasard sur le nombre de contrôles qu'elle a subis.
On note C l'événement : « à l'issue d'une étape, la coureuse a subi un contrôle antidopage ».

a. Donner $P(C)$.

b. Pour représenter cette expérience, on a commencé à dessiner l'arbre suivant.



Combien de branches l'arbre complet compte-t-il ?

c. Soit A l'événement : « la coureuse a été contrôlée exactement cinq fois ».
Combien de chemins de l'arbre réalisent A ?
En déduire $P(A)$.

d. Calculer la probabilité que la coureuse ne soit jamais contrôlée.

4. Calculer la probabilité qu'une coureuse choisie au hasard soit sur le podium de la course, c'est-à-dire qu'elle termine parmi les trois premières.

Consolider ses fondamentaux

101 Organisation d'une fête

Soit n un entier naturel, avec $n \geqslant 2$.
Pour la sortie d'un nouveau téléphone, une fête est organisée réunissant n femmes et n hommes.

Questions Va piano

On suppose $n = 6$.
1. L'organisateur décide de placer les douze convives autour d'une table où chacune des places est numérotée de 1 à 12.
a. Combien a-t-il de façons de placer les invités autour de la table ?
b. Si l'on voulait tester toutes les dispositions possibles, et en supposant qu'il faut une seconde pour que tous les invités changent de place, combien de temps faudrait-il ?
2. On suppose qu'il y a deux tables de six, où chacune des places est numérotée. Combien y a-t-il de façons de placer tous les invités autour des deux tables ?

Questions Moderato

Une photographe décide de photographier les participants par groupes de trois.
1. Combien de clichés différents peut-elle prendre :
a. au total ?
b. avec deux femmes et un homme ?
c. avec trois femmes ?
2. Soit p un entier naturel. La photographe a pris plus de p photos différentes.
a. ALGO PYTHON Écrire une fonction Python `nbre_invites` d'argument p qui renvoie le nombre minimal d'invités présents à la soirée.
b. Programmer cette fonction et donner le résultat obtenu pour $p = 1\,500$.

Questions Allegro

On suppose que n est un nombre pair.
L'organisateur sélectionne n invités pour leur offrir un téléphone.
1. Combien a-t-il de choix possibles :
a. au total ?
b. s'il décide de sélectionner autant d'hommes que de femmes ?
2. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Combien l'organisateur peut-il former de groupes différents comprenant exactement k femmes ?
3. Démontrer l'égalité :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Se préparer aux études supérieures

102 Combinaisons avec répétitions

Approfondissement

1. Un sac contient cinq boules indiscernables sur lesquelles sont inscrites les lettres A, B, C, D et E.
On tire une boule au hasard, on note la lettre, et on remet la boule dans l'urne. On répète trois fois cette action. On obtient ainsi un mot de trois lettres.

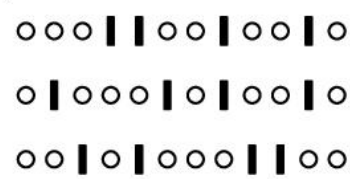
À l'aide des coefficients $\binom{n}{k}$, écrire :

a. le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes, sans tenir compte de l'ordre ;
b. le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant deux lettres différentes et une lettre commune ;
c. le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes.

2. Dans une combinaison avec répétitions de k objets pris parmi n objets distincts, un même objet peut être sélectionné plusieurs fois. On veut montrer que ce nombre de combinaisons est égal à $\binom{n+k-1}{k}$.

On symbolise les k objets par une ligne de O. Une répartition avec n objets distincts consiste alors à mettre des barres de séparation entre les objets. Le nombre de O entre deux barres signifie le nombre de fois qu'un même objet a été sélectionné.

Par exemple, avec $k = 8$ et $n = 5$:



Deux barres côte à côte signifient qu'il y a zéro objet d'un certain type.
a. Dans chacun des trois exemples ci-dessus, quel est le nombre total de symboles (barres et O) utilisés et quel est le nombre de barres ?
Quelle conjecture peut-on donc faire sur le nombre de combinaisons avec répétitions de huit objets parmi cinq ?
b. On admet que le problème se ramène donc au choix de $(n-1)$ objets parmi $(n+k-1)$.
Justifier l'égalité :

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

3. Quatre amies se rendent dans un salon de thé où huit thés différents sont proposés. Combien de plateaux de quatre tasses de thés, différentes ou non, pourra leur amener le serveur ?

No problem!

1 Pascal's triangle

Pascal's triangle is famous in mathematics for its symmetry and hidden relationships.

1. Read the text below and write the first six rows of Pascal's triangle:

> The Pascal pattern is generated from the top. Start with a 1 and place two 1s on either side of it in the next row down. To construct further rows, we continue to place 1s on the end of each row while the internal numbers are obtained by the sum of the two numbers immediately above.
> To obtain 6 in the fifth row for example, we add 3 + 3 from the row above.

2. Do some online research to find the different branches of mathematics where Pascal's triangle can be used.

2 How many pairs?

In a class of 32 students, two delegates need to be elected.

1. How many pairs of students can be made?

2. There are 12 boys and 20 girls in this class and it is now necessary to have a mixed couple of students (a boy and a girl). How many pairs of students can now be made?

3 Combinations

Six friends Arthur, Ben, Cassandra, Davy, Elsa and Fred, are respectively aged 12, 14, 13, 14, 15 and 16 years old.

1. Make a table to associate the initial of each first name with the age of each person.

2. How many combinations can be made?

3. How many different combinations can we do?

4. How many combinations do we find with two girls and odd ages?

4 Bingo TEAM WORK

Look up for information about the game "Bingo" (rules, how to win, …)
In a group of three, build an exercise linked with the Bingo game.
Explain your problem and your solution to the other groups.

Final exam Past papers

1. A box contains nine cards of which four are white, three are red and two are blue. Three of these cards are selected at random without replacement.
   Calculate the probability that:
   a. one card of each colour is selected;
   b. the three cards selected are all the same colour.

2. A committee of 6 people is to be chosen from 5 men and 8 women.
   In how many ways can this be done:
   a. if there are more women than men on the committee?
   b. if the committee consists of 3 men and 3 women but two men in particular refuse to be on the committee together?

CHAPITRE

10 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Ressources en +

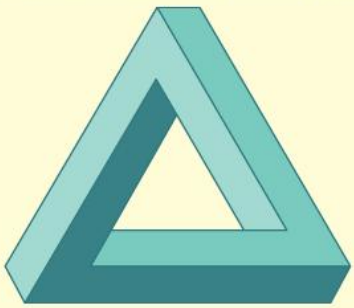
Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

De l'importance du point de vue pour comprendre une configuration géométrique

Roger Penrose

Roger Penrose est un mathématicien, physicien et astrophysicien britannique né en 1931. Il a travaillé, avec Stephen Hawking, sur la théorie de la relativité générale dans les années 1960 ainsi que sur des « pavages » et des objets impossibles, comme le triangle dit « de Penrose ».

Le triangle de Penrose (ci-dessous) semble représenter un solide constitué de trois poutres s'entrecroisant.



C'est un solide impossible à construire en réalité : on ne peut le représenter qu'en deux dimensions, comme l'a fait l'artiste M.C. Escher, ou bien en trois dimensions, mais avec une « cassure » : il faut alors adopter le bon point de vue pour avoir l'illusion de cette figure géométrique impossible.
La géométrie dans l'espace est un outil indispensable à la compréhension de toute figure, assemblage ou construction en trois dimensions.

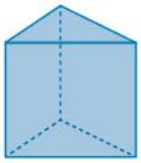
Un tabouret à quatre pieds est-il toujours stable ? Comment devrait-on construire ce meuble pour être sûr qu'il soit stable ?

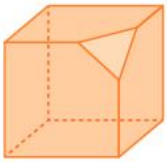
Réviser ses GAMMES

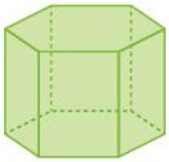
DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Solides

Pour chacun des solides suivants, donner les nombres de faces, d'arêtes et de sommets.

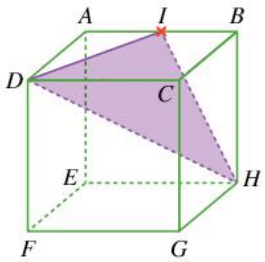
1. 

2. 

3. 

2 Cube, droites et plans

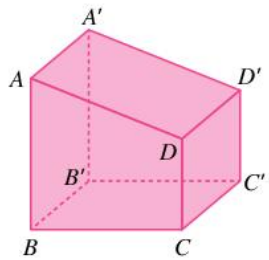
$ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AB]$.



1. Préciser la nature des triangles AEH et IDF.
2. Citer deux droites parallèles à la droite (AB).
3. Citer deux droites sécantes à (AB).
4. Citer deux droites ni parallèles ni sécantes à la droite (AB).
5. Citer quatre plans contenant le point I.

3 Droites sécantes et parallèles

Le solide ci-dessous est constitué de quatre rectangles et de deux trapèzes rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$.

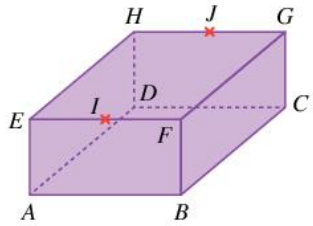


1. Combien ce solide a-t-il :
   a. d'arêtes ? b. de faces ? c. de sommets ?
2. Quelle est la nature de ce solide ?
3. Citer deux droites sécantes et deux droites parallèles.

4 Calculs dans l'espace

$ABCDEFGH$ est un pavé droit, I est le milieu de $[EF]$ et J est celui de $[HG]$.

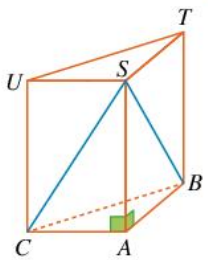
On a : $AB = 6$ cm, $AE = 2$ cm et $AD = 8$ cm.



1. Déterminer le volume de $ABCDEFGH$.
2. Calculer l'aire totale des faces de ce pavé droit.
3. Calculer la longueur BD.
4. Déterminer le volume du prisme droit $ABIDCJ$.

5 De l'espace au plan

$STUABC$ est un prisme droit.



1. Recopier et compléter chaque égalité avec un vecteur formé de points de la figure, en se plaçant dans une face du solide.
   a. $\overrightarrow{SU} + \overrightarrow{SA} = \ldots$
   b. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \ldots$
   c. $\overrightarrow{UT} - \overrightarrow{CB} = \ldots$
   d. $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{UA} = \ldots$
2. Citer trois couples de vecteurs colinéaires.

6 Vecteurs du plan

1. Dans un triangle PUR, placer les points T et A tels que $\overrightarrow{UT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{UR}$ et $\overrightarrow{UA} = 3\overrightarrow{UP}$.
   a. Montrer que $\overrightarrow{RA} = 3\overrightarrow{TP}$.
   b. Recopier et compléter l'égalité suivante à l'aide d'un nombre : $\overrightarrow{TP} = \ldots\overrightarrow{AR}$.
   c. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{RA}$ et $\overrightarrow{TP}$? des droites (RA) et (TP) ? du quadrilatère $TRAP$?
2. Dans un repère du plan, on considère les points $E(-3{,}5\,;\,6)$, $F(1\,;\,-3)$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.
   Les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

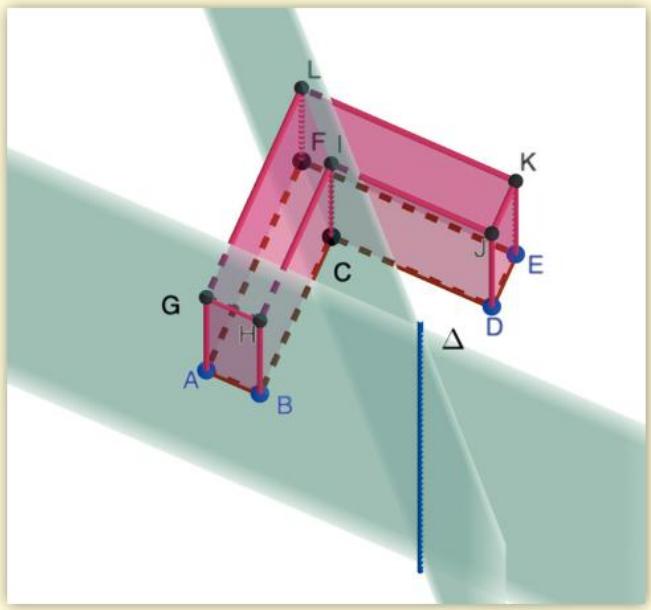
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Une bibliothèque célèbre pour des positions relatives

Objectif
Utiliser la perspective cavalière pour déterminer des positions relatives.

Le site François-Mitterrand de la Bibliothèque nationale de France, à Paris, est constitué de quatre blocs identiques.

1. Faire un dessin en perspective cavalière d'un des blocs de cette bibliothèque et rappeler les règles de cette construction.
2. On nommera $ABCDEFGHIJKL$ ce bloc, comme indiqué sur la photo.
Donner cinq vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déduire de la question précédente des couples de droites parallèles.
4. On admet que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont non colinéaires.
   a. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (FC) ?
   b. Même question pour les droites (GH) et (IL).
5. On a tracé ce bloc à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, puis construit l'intersection des plans (FCI) et (HBG). On a obtenu la figure ci-dessous.



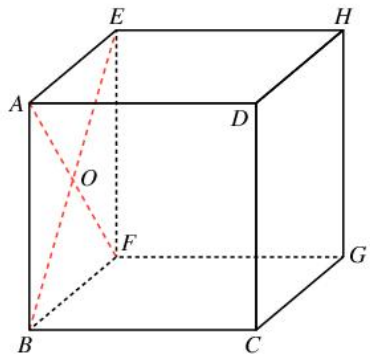
a. Quelle est la nature de l'intersection des deux plans ?

b. Reprendre la figure en perspective cavalière réalisée à la question 1 et construire à la main cette intersection. Justifier la construction.

Situation 2 Des plans et des vecteurs

Objectif
Caractériser un plan vectoriellement.

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. O est le centre de la face $ABFE$.

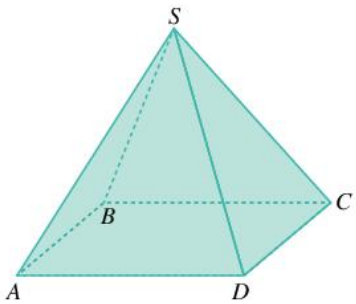


1. Reproduire la figure et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD}$, avec k réel. Quel est cet ensemble ?
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF}$.
3. Placer le point R, défini par $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AH} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$. Citer un plan contenant le point R.
4. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AH} + y\overrightarrow{AD}$, où x et y sont deux réels ?
5. Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BO} + y\overrightarrow{BE}$, où x et y sont deux réels ?

Situation 3 Un nouveau repérage

Objectif
Se repérer dans l'espace.

On se place dans une pyramide à base carrée $SABCD$ de sommet S.
Trois élèves cherchent à repérer les points dans cette figure.



1. Une première élève choisit un repère dans lequel le point C a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0). Quel repère a pu être choisi par cette élève ?
2. Un deuxième élève choisit un repère d'origine O, le centre du carré $ABCD$. Il trouve comme coordonnées pour C(–1 ; 0 ; 0).
Quels vecteurs ont pu être choisis pour définir ce repère ?
3. Une troisième élève choisit un repère dans lequel le point C a pour coordonnées (–1 ; 1 ; 1).
   a. Montrer que $\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
   b. En déduire le repère choisi par cette élève.
4. Choisir un repère qui n'a pas été utilisé précédemment et donner les coordonnées des six points A, B, C, D, O et S dans ce repère.
Attention, il faut choisir un repère dans lequel on pourra trouver les coordonnées de **tous** les points !

1. Vecteurs de l'espace

1. Définition d'un vecteur de l'espace

Propriété et définition

DÉMO en ligne

Soient A et B deux points de l'espace. On associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On peut alors noter : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Remarques

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Lorsque A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul et on le note $\vec{0}$.

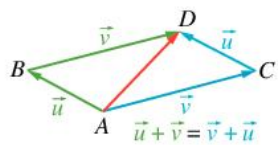
Théorème (admis)

Soient $\vec{u}$ un vecteur et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.
On dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

2. Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition (règle du parallélogramme)

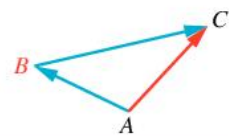
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. La **somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété (relation de Chasles)

DÉMO en ligne

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Définition

- Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
  - la même direction que le vecteur $\vec{u}$;
  - le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$;
  - pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$.

Propriétés

DÉMO en ligne

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques

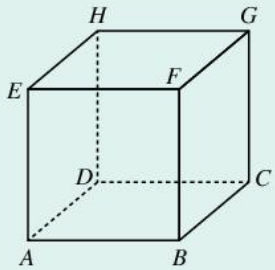
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Méthode 1 Construire un point défini par une égalité vectorielle

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Construire les points M et N tels que :

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$
2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$

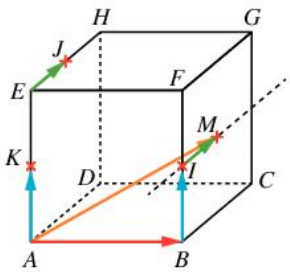


Solution commentée

1. On a $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BI}$, où I est le milieu de $[BF]$, et on construit le vecteur $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EJ}$, où J est le milieu de $[EH]$.

On a alors, avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}$



2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$

Or, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$, donc :

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE}$, donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}$.

Ainsi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF}$.

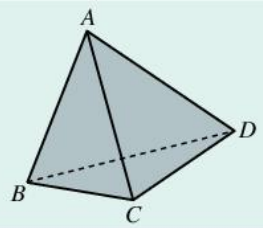
On en déduit donc que le point N est confondu avec le point F.

EXERCICE 3 p. 326

Méthode 2 Montrer que des vecteurs sont colinéaires

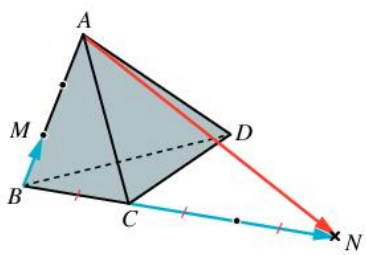
On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.



Solution commentée

1.



2. On utilise la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$, car $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BC}$, car $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AN} = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{MC}$.

On a donc $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

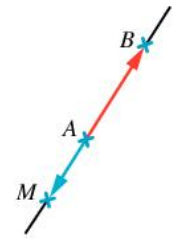
EXERCICE 6 p. 326

2. Droites et plans de l'espace

1. Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB).



Remarque

Un point A et un vecteur $\vec{u}$ suffisent à déterminer une droite : c'est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

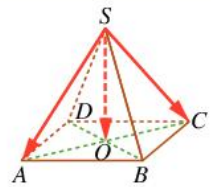
2. Caractérisation vectorielle d'un plan

Définitions

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit alors que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple

Dans la pyramide régulière à base carrée ci-contre, on a l'égalité suivante :
$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont donc coplanaires.
On remarque que $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ ne sont pas coplanaires.



Définitions

- On dit que des points sont **coplanaires** s'il existe un plan qui contient ces points.

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

- Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC), $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une **base** de ce plan et $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan.

Remarques

- Trois points sont toujours coplanaires.
- Un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou trois points non alignés) suffisent à déterminer un plan : c'est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on dit aussi que le plan est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$). Par exemple, dans la pyramide ci-dessus, le point S et les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ suffisent à déterminer le plan (SAB).

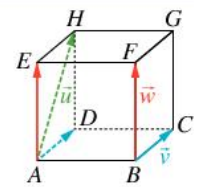
Propriété

DÉMO en ligne

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exemple

$\vec{u} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$. On a $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Or A, D, H et E sont quatre points coplanaires, donc les vecteurs u, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

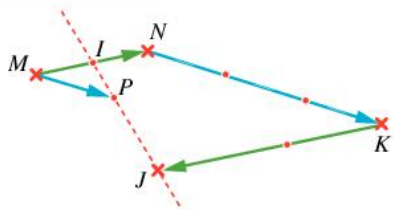


Méthode 1 Utiliser la caractérisation vectorielle d'une droite

Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés.
On considère les points I et J tels que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

Solution commentée

1. 

2. On cherche à montrer que $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{PJ}$ sont colinéaires.
On a : $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

Par ailleurs :
$\overrightarrow{PJ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$
Donc $\overrightarrow{PJ} = -2\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MN}$.
On en déduit :
$-2\overrightarrow{PI} = -2\left(\overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}\right) = -2\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PJ}$

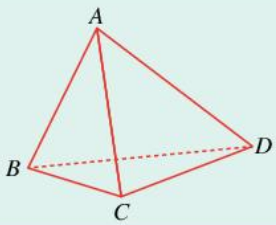
Les vecteurs $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{PJ}$ sont colinéaires, donc le point P appartient à la droite (IJ).

EXERCICE 14 p. 327

Méthode 2 Utiliser la caractérisation vectorielle d'un plan

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

- Montrer que le point M appartient au plan (ABC).



Solution commentée

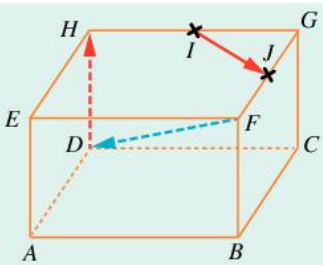
On cherche à écrire $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On décompose avec la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$
On divise chaque membre de l'égalité par -3 : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, car $-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$.
Les points A, B et C ne sont pas alignés. On a exprimé $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc le point M appartient au plan (ABC).

EXERCICE 11 p. 327

Méthode 3 Montrer que trois vecteurs sont coplanaires

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. On note I et J les milieux respectifs des côtés $[GH]$ et $[FG]$.

- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.



Solution commentée

Les points I et J sont les milieux respectifs des cotés $[GH]$ et $[FG]$ donc, dans le triangle DFG, la droite (IJ) est parallèle à la droite (FH) et on a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$. Les vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires, car les points H, F et D définissent un plan. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

EXERCICE 15 p. 327

3. Positions relatives de droites et de plans

1. Positions relatives de deux droites

Définitions

Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{u'}$.

- d et d' sont **parallèles** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.
- d et d' sont **coplanaires** lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

Propriétés

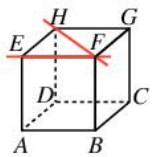
Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

DÉMO en ligne

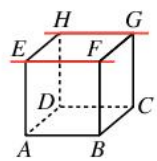
- Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A, B, C et D.
- Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
- Si deux droites sont non coplanaires, alors leur intersection est vide.

Exemples dans le cube $ABCDEFGH$

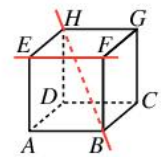
Sécantes : $(EF) \cap (HF) = \{F\}$



Parallèles : $(EF) \cap (HG) = \varnothing$ et $(EF) \cap (EF) = (EF)$



Non coplanaires : $(HB) \cap (EF) = \varnothing$



2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

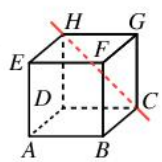
Définition et propriétés

DÉMO en ligne

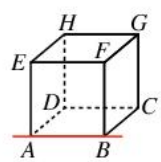
- Une droite est **parallèle à un plan** lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite n'est pas parallèle à un plan, alors elle a un unique point d'intersection avec ce plan.

Exemples dans le cube $ABCDEFGH$

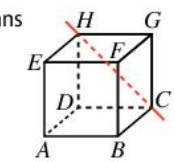
Sécants : $(HC) \cap (ABC) = \{C\}$



Parallèles : $(AB) // (DCG)$



Droite incluse dans le plan : $(HC) \subset (DCG)$



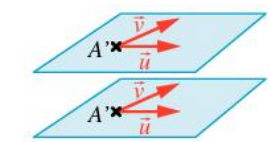
3. Positions relatives de deux plans

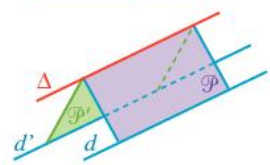
Définition et propriétés

- Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.
- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

DÉMO p. 318

- **Théorème du toit.** Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Soient d une droite incluse dans $\mathcal{P}$ et d' une droite incluse dans $\mathcal{P}'$ telles que $d // d'$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite Δ, alors $\Delta // d // d'$.

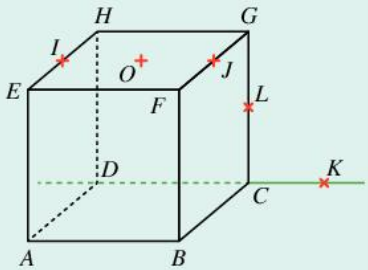




Méthode 1 Étudier la position relative de deux droites

On considère un cube $ABCDEFGH$. I, J et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[FG]$ et $[GC]$.

O et K sont deux points tels que $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.



Étudier les positions relatives des couples de droites suivants.

1. (IO) et (DK).
2. (BJ) et (EF).
3. (JL) et (BC).

Solution commentée

1. $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DK}$, donc les vecteurs directeurs des droites (IO) et (DK) sont colinéaires. Ces droites sont donc parallèles.

2. Les points B, J, E et F ne sont pas coplanaires car, sinon, le point B appartiendrait au plan (EFJ). Les droites (BJ) et (EF) ne le sont donc pas non plus : leur intersection est donc vide.

3. J, L, B et C sont quatre points coplanaires, donc les droites (JL) et (BC) sont coplanaires. Elles ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes.

EXERCICE 20 p. 328

Méthode 2 Construire l'intersection d'une droite et d'un plan, de deux plans

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note :

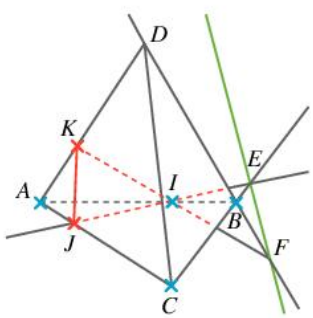
- I le point de $[AB]$ tel que $AI=\frac{2}{3}AB$;
- J le point de $[AC]$ tel que $AJ=\frac{1}{4}AC$;
- K le point de $[AD]$ tel que $AK=\frac{1}{3}AD$.

1. Démontrer que la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) en un point. On note ce point E.
2. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont sécants et déterminer leur droite d'intersection.

Solution commentée

1. Les droites (IJ) et (CB) sont incluses dans le plan (ABC) et $\frac{AI}{AB}\neq\frac{AJ}{AC}$, donc (IJ) et (CB) ne sont pas parallèles.

Elles sont donc sécantes en un point. On note ce point E.
E appartient à la droite (BC) incluse dans le plan (BCD), donc E appartient au plan (BCD). Enfin, (IJ) n'est pas incluse dans le plan (BCD).
Donc (IJ) et (BCD) sont sécants au point E.



2. • Les plans (IJK) et (BCD) ne sont pas confondus et contiennent le point E. Donc ils sont sécants en une droite qui passe par E.
• La droite (KI) est incluse dans le plan (ABD). Comme dans la question 1, on construit le point F, intersection de (KI) avec (BD), donc avec le plan (BCD).
L'intersection des plans (IJK) et (BCD) est donc la droite (EF).

EXERCICE 21 p. 328

4. Repères de l'espace

1. Base de l'espace

Définition

Une **base de l'espace** est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ non coplanaires.

Remarque

Les vecteurs d'une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux.

Propriété et définition

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

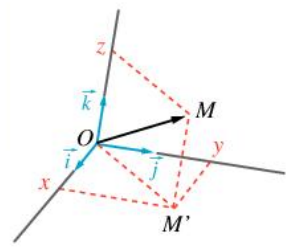
DÉMO p. 319

$(x\,;y\,;z)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans cette base. On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

2. Repère de l'espace

Définition

Un **repère de l'espace** est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On note $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un tel repère. O est l'**origine** du repère.



Remarque

En changeant l'ordre des vecteurs, on change le repère !

Propriété et définition

DÉMO p. 319

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
$(x\,;y\,;z)$ sont les **coordonnées** de M dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
x est l'**abscisse** de M ; y est l'**ordonnée** de M ; z est la **cote** de M. On note $M(x\,;y\,;z)$.

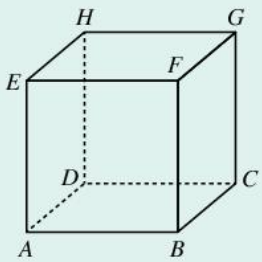
Propriétés

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, k un réel et $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace.

DÉMO en ligne

- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$; $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Méthode 1 Décomposer un vecteur dans une base



On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

1. Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$. Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. En déduire leurs coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   a. $\overrightarrow{AH}$ b. $\overrightarrow{BH}$

Solution commentée

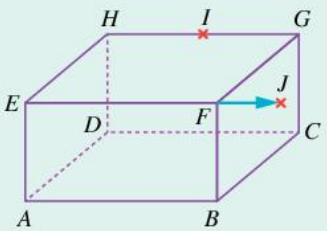
1. Par construction du cube, le point C n'appartient pas au plan (ABE), donc les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. a. $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{v}-\vec{u}+\vec{w}=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$. Donc, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   b. $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{BH}=\vec{w}-\vec{u}+\vec{v}-\vec{u}=-2\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

   Donc, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 27 p. 329

Méthode 2 Déterminer des coordonnées dans un repère



On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. On note I le milieu du côté $[GH]$ et J le point tel que $\overrightarrow{EJ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$.

1. Justifier que $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Donner, sans justifier, les coordonnées des points A, B, D et E.
3. Déterminer les coordonnées des points G, H, I et J. Justifier.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{HB}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Solution commentée

1. Par construction du pavé droit, le point D n'appartient pas au plan (ABE) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires et forment une base. $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est donc un repère de l'espace.
2. $A(0 ; 0 ; 0)$; $B(1 ; 0 ; 0)$; $D(0 ; 1 ; 0)$; $E(0 ; 0 ; 1)$.
3. • $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, donc $G(1 ; 1 ; 1)$.
   • $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=0\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, car $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}$, donc $H(0 ; 1 ; 1)$.
   • I est le milieu de $[HG]$, donc $x_I=\frac{x_H+x_G}{2}=\frac{1}{2}$; $y_I=\frac{y_H+y_G}{2}=1$; $z_I=\frac{z_H+z_G}{2}=1$, donc $I\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 1\right)$.
   • $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AE}+\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}+0\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, donc $J\left(\frac{4}{3} ; 0 ; 1\right)$.
4. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\\z_G-z_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

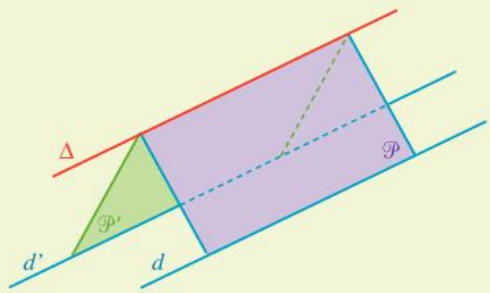
   On a alors $2\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\vec{u}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{HB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 29 p. 329

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante.
La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Théorème du toit
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.
Soient d une droite incluse dans $\mathcal{P}$ et d' une droite incluse dans $\mathcal{P}'$ telles que $d // d'$.
Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite Δ, alors $\begin{cases} \Delta // d \\ \Delta // d' \end{cases}$.



Démonstration

- Appelons $\vec{v}$ un vecteur directeur de la droite Δ, intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
- Les droites d et d' étant parallèles, il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul directeur de d et d'. (1)

d et d'sont respectivement incluses dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ; alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, ce qui est contraire à l'hypothèse « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite Δ ». (2)

- On en conclut que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, donc, que les droites d, d'et Δ sont parallèles.

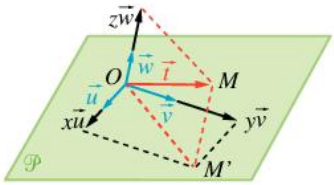
1. Cette démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde.
   a. Quelle est la supposition qui est faite et qui se révèle finalement fausse ?
   b. Quelle est l'« absurdité » qui a été mise en évidence et qui a permis d'arriver à cette conclusion ?
2. Pourquoi précise-t-on « non nul » à la ligne (1) ?
3. Quel résultat du cours permet d'affirmer, à la ligne (2), que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ?
4. Avec ce théorème, on a montré que $\Delta // d // d'$.
   Peut-on dire que ces trois droites sont coplanaires ?

Rédiger une démonstration

On souhaite démontrer la double propriété suivante.

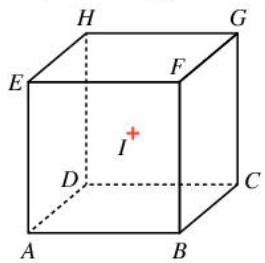
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
- Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe des réels x, y et z tels que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.
- Le triplet $(x\,;y\,;z)$ est unique.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- À l'aide du schéma ci-contre, démontrer tout d'abord l'existence du triplet $(x\,;y\,;z)$ en posant $\vec{t} = \overrightarrow{OM}$.
- Démontrer ensuite que ce triplet est unique en supposant qu'il en existe deux et en montrant qu'ils sont identiques, c'est-à-dire en raisonnant par l'absurde.
- Conclure.



Utiliser différents raisonnements

1 Dans le cube $ABCDEFGH$ de centre I ci-dessous, on veut démontrer par l'absurde que le point I n'appartient pas au plan (ACH).



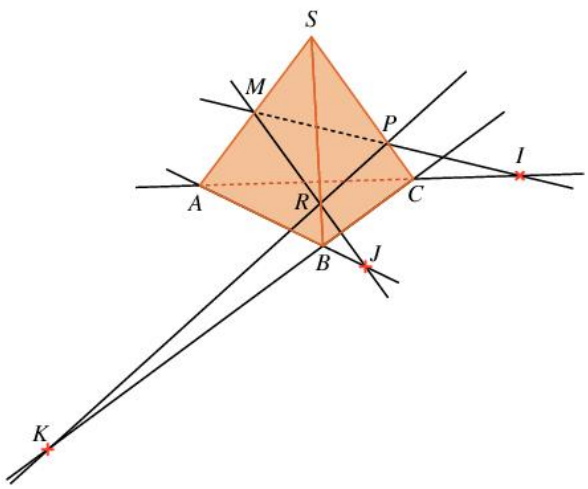
a. On suppose que le point I appartient au plan (ACH). Donner un autre point du cube appartenant à la droite (HI). Ce point appartient-il au plan (ACH) ?
b. Conclure en utilisant la contradiction mise en évidence à la question précédente.

Raisonnement par l'absurde (ou apagogie)
Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver qu'une affirmation est vraie en prouvant que l'affirmation contraire est fausse.
Pour cela, on suppose que l'affirmation contraire est vraie et on aboutit, par un raisonnement déductif, à une contradiction ou une conséquence absurde.

2 Dans le tétraèdre $SABC$ ci-contre, les points M, P et R sont définis par :

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}, \quad \overrightarrow{SP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{SB}.$$

a. Justifier que les droites (MP) et (AC) sont coplanaires.
b. Montrer que les droites (MP) et (AC) ne sont pas parallèles. On note I leur point d'intersection.
c. Démontrer de la même façon que les droites (MR) et (AB) sont sécantes en un point J et que les droites (PR) et (BC) sont sécantes en un point K.
d. Justifier que les points I, J et K appartiennent aux plans (MPR) et (ABC). En déduire que les points I, J et K sont alignés.



Répéter en solo

Carte mentale

Caractériser une droite de l'espace

La **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB), ainsi que tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.

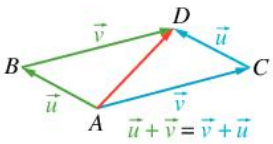
Caractériser un plan de l'espace

- $\vec{u}, \vec{v}$ (non colinéaires) et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une **base** de ce plan.

Représenter des vecteurs de l'espace

- On associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.
- **Somme** de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, où $ABDC$ est un parallélogramme.
- **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



- Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction que le vecteur $\vec{u}$; le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$; pour norme $|k| \times \vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} = k\vec{u}$ sont **colinéaires**.

Déterminer des coordonnées

- Dans le **repère** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

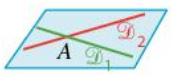
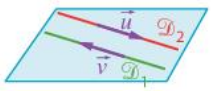
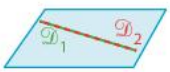
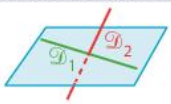
$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k} \; ; \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

- Milieu de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2} ; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

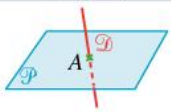
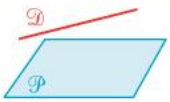
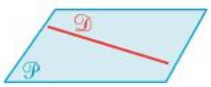
Vecteurs, droites et plans de l'espace

Étudier les positions relatives de plans et de droites

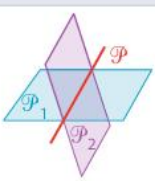
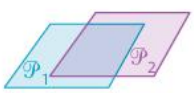
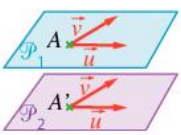
Positions relatives de deux droites

Coplanaires			Non coplanaires
			
$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un point commun.	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont pas de point commun.	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues.	Il n'existe pas de plan contenant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Sécants	Parallèles	
		
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun.	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

Positions relatives de deux plans

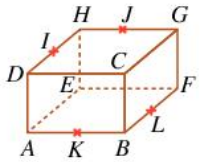
Sécants	Parallèles	
	Confondus	Strictement parallèles
		
L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite.	L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est un plan.	L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est vide.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

Dans toutes les questions, on considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre.
I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[DH]$, $[HG]$, $[AB]$ et $[BF]$



1 $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FK}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{FG}$ (b) $\overrightarrow{AE}$ (c) $\vec{0}$

2 $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{CG}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{BD}$ (b) $\overrightarrow{CH}$ (c) $\vec{0}$

3 $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EG}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{CG}$ (b) $\overrightarrow{GC}$ (c) $\vec{0}$

4 $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LF}$ est égal à :
(a) $\overrightarrow{HF}$ (b) $\overrightarrow{HL}$ (c) $\overrightarrow{BL}$

5 $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{EA}$ est égal à :
(a) $\vec{0}$ (b) $\overrightarrow{IL}$ (c) $\overrightarrow{IC}$

6 Les droites (IJ) et (AF) sont :
(a) coplanaires.
(b) non coplanaires.
(c) sécantes.

7 Les droites (DB) et (EF) sont :
(a) coplanaires.
(b) non coplanaires.
(c) sécantes.

8 Les droites (IC) et (AB) sont :
(a) coplanaires.
(b) non coplanaires.
(c) parallèles.

9 Les plans (DCG) et (EAF) sont :
(a) strictement parallèles.
(b) sécants.
(c) confondus.

10 Les plans (IJA) et (HDC) sont :
(a) strictement parallèles.
(b) sécants.
(c) confondus.

11 Les plans (IJE) et (CKL) sont :
(a) strictement parallèles.
(b) sécants.
(c) confondus.

12 La droite (IJ) est parallèle :
(a) au plan (ABF).
(b) au plan (BCG).
(c) au plan (DHF).

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier.

Dans toutes les affirmations, on considère la figure plus haut.

1 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{LK}$ sont coplanaires.

2 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires.

3 Les droites (AB) et (HD) ont même vecteur directeur.

4 Les droites (BE) et (HC) ont même vecteur directeur.

5 $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur de (DE).

6 $\overrightarrow{HJ}$ est un vecteur directeur de (AB).

7 Les plans (ABC) et (IEF) ont mêmes vecteurs directeurs.

8 Les plans (ADG) et (ACD) ont mêmes vecteurs directeurs.

9 $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur du plan (ABF).

10 $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (CDG).

11 $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{DG})$ est une base du plan (CDG).

TP 1 Étudier des alignements avec un algorithme ALGO PYTHON

Objectif
Critiquer et modifier un algorithme.

On donne la fonction suivante, écrite en langage Python.

```
def alignement (xA,yA,zA,xB,yB,zB,xC,yC,zC):
    L=[xB-xA,yB-yA,zB-zA]
    T=[xC-xA,yC-yA,zC-zA]
    u=L[0]/T[0]
    r=L[1]/T[1]
    s=L[2]/T[2]
    if u==r and u==s:
        resultat='les points sont alignés'
    else:
        resultat='les points ne sont pas alignés'
    return resultat
```

1. À quoi correspondent les neuf arguments de cette fonction ?
2. À quoi correspondent les valeurs calculées dans les listes L et T ?
3. Expliquer l'instruction u=L[0]/T[0].
4. Que permet de tester l'instruction suivante : if u==r and u==s : ?
5. Expliquer l'affichage ci-dessous dans la console.

```
>>> alignement(0,0,0,1.5,1,1,3,2,2)
'les points sont alignés'
```

6. Recopier et tester la fonction pour d'autres valeurs.
7. On donne les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(2\,;0\,;0)$ et $C(3\,;0\,;0)$.
   Où se situent ces points dans l'espace ?
8. Tester la fonction avec ces trois points. Que constate-t-on ? Expliquer pourquoi.
9. Proposer une modification de cette fonction afin qu'elle fonctionne avec les points donnés à la question 7.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- L'instruction conditionnelle Si « *condition* » Alors « *instruction* » Sinon « *instruction* » s'écrit de la manière suivante.

```
if condition:
    instructions
```

```
if condition:
    instructions
else:
    instructions
```

- Si l'on veut mettre plusieurs conditions, on utilise « and ».
- Pour désigner une liste de nombres, on utilise des crochets en début et en fin de liste et des virgules pour séparer les nombres. Par exemple, L=[1,2,8,5].
  L'instruction L[k] renvoie le nombre de rang k de la liste L.

Attention ! L[0] renvoie le premier nombre et L[2], le troisième.

TP 2 Construire une section plane de cube

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Tracer un cube et sa section par un plan avec un logiciel de géométrie dynamique.

1. Dans un logiciel de géométrie dynamique 3D, construire un cube $ABCDEFGH$ de côté 4.
Pour une meilleure lecture de la figure, enlever l'affichage des axes et du plan.
2. Placer les points I, J et M définis par les égalités vectorielles suivantes.
$$\overrightarrow{EI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\ ;\ \overrightarrow{HJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG} \text{ et } \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$
3. À l'aide des outils Plan passant par trois points et Intersection de deux surfaces, construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJM).
Quelle est la nature de cette section ? La nommer $IJKLMN$, où $K \in (CG)$; $L \in (DC)$ et $N \in (AE)$.
4. Quelle est la position relative des droites (ML) et (IJ) ? Justifier à l'aide d'une propriété du cours.
5. Donner les autres couples de côtés parallèles sur cette section.
6. Tracer les droites (IJ), (FE) et (MN). Que constate-t-on ?
7. En déduire une méthode pour construire « à la main » la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJM).

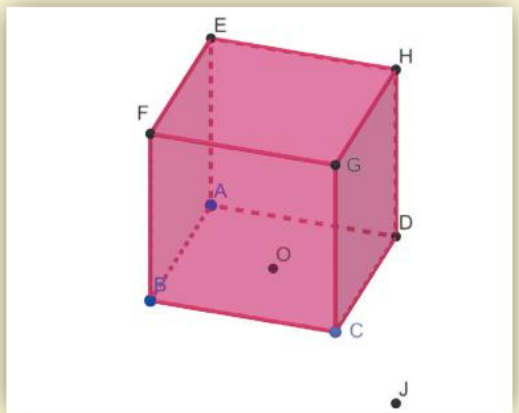
TP 3 Étudier des positions relatives

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif Conjecturer des positions relatives avec un logiciel de géométrie dynamique.

$ABCDEFGH$ est un cube, O est le milieu de $[AC]$.
Le point J est le symétrique de H par rapport à D.

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique 3D comme ci dessous.



2. Conjecturer les positions relatives :
a. des droites (FJ) et (AC) ;
b. des points F, O et J.
3. Démontrer ces conjectures.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

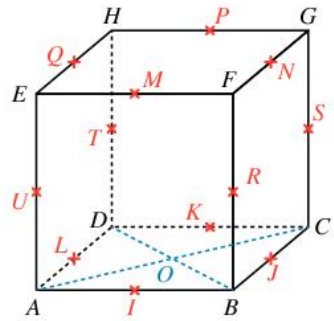
- L'outil Cube permet de construire un cube après avoir placé deux points pour déterminer la longueur de l'arête.
- Pour placer un point M défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$, on rentre dans la zone de saisie :

M=A+3*vecteur (A, B)

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 $ABCDEFGH$ est un cube sur lequel on a placé les milieux de chaque arête et le centre O de la face $ABCD$.



1. En utilisant les points de la figure, citer des vecteurs égaux à :

a. $\overrightarrow{BF}$;

b. $\overrightarrow{JR}$;

c. $\overrightarrow{TS}$;

d. $\overrightarrow{ON}$.

2. Recopier et compléter à l'aide des points de la figure.

a. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AU}$

b. $\overrightarrow{I\ldots} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{JN} + \overrightarrow{HE}$

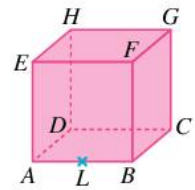
c. $\overrightarrow{S\ldots} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CO}$

d. $\overrightarrow{R\ldots} = \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{KT}$

2 QCM

Le cube ci-contre a pour côté d'arête a (a réel strictement positif).

L est le milieu de $[AB]$.



Donner la seule réponse correcte parmi les trois proposées.

1. La longueur AC est égale à :

(a) a (b) $2a$ (c) $a\sqrt{2}$

2. La longueur EL est égale à :

(a) $\frac{a}{2}$ (b) $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ (c) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

3. La longueur AG est égale à :

(a) $3a$ (b) $a\sqrt{3}$ (c) $a\sqrt{2}$

3 Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs définis par leurs coordonnées (m est un réel).

Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\8\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\\-\sqrt{32}\end{pmatrix}$ **4.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3m\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-2m\end{pmatrix}$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

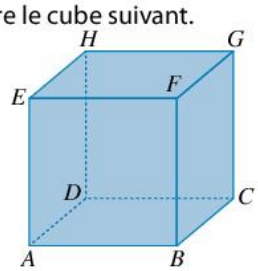
4 **1.** Combien un tétraèdre a-t-il :

a. d'arêtes ? **b.** de faces ? **c.** de sommets ?

2. Combien un prisme droit à base triangulaire a-t-il :

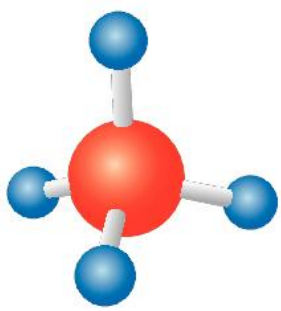
a. d'arêtes ? **b.** de faces ? **c.** de sommets ?

5 On considère le cube suivant.



• En utilisant les points de la figure, donner toutes les combinaisons possibles de sommes de trois vecteurs égales au vecteur $\overrightarrow{AG}$.

6 Le méthane (de formule CH_4) est composé de quatre atomes d'hydrogène, représentés par des points I, J, K et L, et d'un atome de carbone représenté par un point C.



Les atomes d'hydrogène forment un tétraèdre régulier tel que $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CL} = 0$.

• Représenter en perspective cavalière une molécule de méthane.

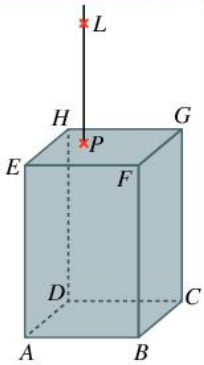
Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si la proposition est vraie ou fausse.

Un lampadaire est posé sur le toit d'un immeuble dessiné sous la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$. L'ampoule est située en L et le mât du lampadaire $[LP]$ est parallèle à l'arête $[EA]$ avec $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HF}$.

L'ampoule éclaire le pavé, ce qui dessine une ombre sur le sol.

• L'ombre portée du pavé sur le plan (ABC), le sol sur lequel repose l'immeuble, est un carré.



Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

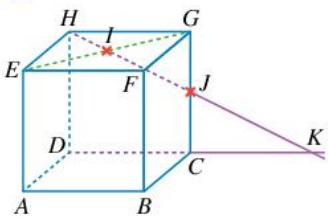
Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

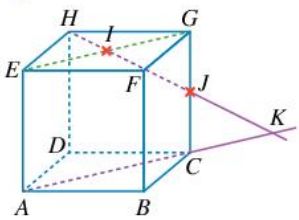
$ABCDEFGH$ est un cube, I est le centre de la face $EFGH$ et J est le milieu de $[GC]$.

• Parmi les trois constructions données, laquelle permet d'obtenir l'intersection K de la droite (IJ) et du plan (ABC) ?

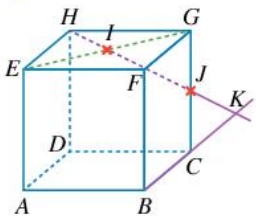
a



b



c



Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

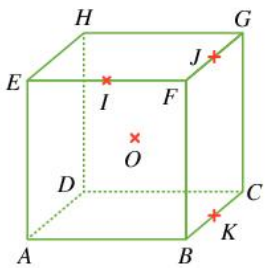
La MECA, pôle régional de la culture et de l'économie créative à Bordeaux, a été conçue par les agences BIG et Freaks.

• Faire des recherches sur ce bâtiment et le décrire en utilisant des connaissances en géométrie dans l'espace.

Vecteurs de l'espace et colinéarité

1 **Modéliser**

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$, $[FG]$ et $[BC]$. On nomme O le centre de ce cube.



1. Citer, sans justifier, deux vecteurs égaux à :

a. $\overrightarrow{DC}$; b. $\overrightarrow{GJ}$; c. $\overrightarrow{JK}$; d. $\overrightarrow{IF}$; e. $\overrightarrow{OB}$.

2. Recopier et compléter à l'aide d'un point de la figure.

a. $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots J} = \overrightarrow{HJ}$ b. $\overrightarrow{H\ldots} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$

c. $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{O\ldots}$ d. $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{\ldots J} = \overrightarrow{AK}$

2 1. Représenter un tétraèdre $ABCD$ et placer les points M, N, P et R, milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RP}$ sont égaux. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $MNPR$?

3 A, B et C sont trois des sommets du cube de l'exercice 1.

1. Reproduire la figure en la complétant avec les points P et T tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BT} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

2. Montrer que les points C, T et P sont alignés.

4 **Raisonner**

1. Reproduire le cube de l'exercice 1 en le complétant avec L, milieu de $[EH]$, M, milieu de $[HG]$ et N, milieu de $[AD]$.

2. Le point P est défini par $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EF}$. Exprimer, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$, les vecteurs suivants.

a. $\overrightarrow{EP}$ b. $\overrightarrow{HC}$ c. $\overrightarrow{BD}$ d. $\overrightarrow{BM}$ e. $\overrightarrow{NP}$

3. a. Exprimer, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{PM}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{PM}$ semblent-ils colinéaires ?

5 Tracer un cube $ABCDEFGH$ et construire les points M, N, P et R tels que :

a. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG}$;

b. $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$;

c. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BF}$;

d. $\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{EH}$.

6 $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S. O, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[SC]$ et $[SD]$.

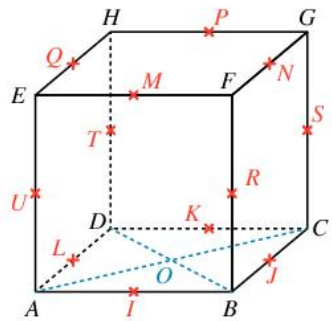
Les couples de vecteurs ci-dessous sont-ils des couples de vecteurs colinéaires ? Justifier.

1. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{OI}$
3. $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{SB}$

Droites et plans de l'espace

7 **Communiquer**

$ABCDEFGH$ est un cube sur lequel on a placé les milieux de chaque arête et le centre O de la face de dessous.



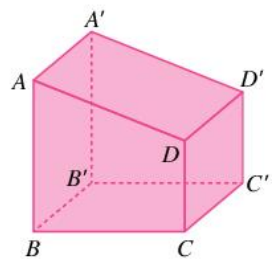
1. Donner deux vecteurs directeurs de la droite :

a. (MP) ; b. (OD) ; c. (ON).

2. Donner deux bases du plan :

a. (AEF) ; b. (IKE) ; c. (GIL).

8 Le solide ci-dessous est constitué de quatre rectangles et deux trapèzes rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$.



1. Citer quatre points non coplanaires.

2. Reproduire et compléter la figure avec K, le point d'intersection de (BC') et $(B'C)$, et L, le point d'intersection de (BC) et (AD).

3. Quelle propriété possèdent les points B, C, B', C', K et L ?

9 VRAI OU FAUX

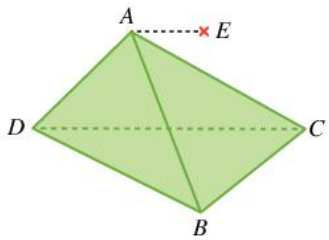
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. Trois points coplanaires sont toujours alignés.
2. Trois points alignés sont toujours coplanaires.
3. Quatre points non alignés forment toujours un plan.

10 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

On considère un tétraèdre $ABCD$.

E est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.



1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis émettre une conjecture sur la position des points A, E, C et D.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

11 On considère un tétraèdre $ABCD$.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC}$.

• Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

12 Dans le cube de l'exercice 1, les triplets de vecteurs suivants sont-ils des triplets de vecteurs coplanaires ? Justifier.

1. $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{IJ}$
3. $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EH}$
4. $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OG}$

13 1. Soient quatre points U, V, W et Z coplanaires.

Montrer que $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{ZW} = \overrightarrow{UW} + \overrightarrow{ZV}$.

2. En est-il de même avec quatre points non coplanaires ?

14 VRAI OU FAUX

Indiquer pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD}$, alors A, B, C et D sont coplanaires.
2. A, B et C sont trois points alignés.

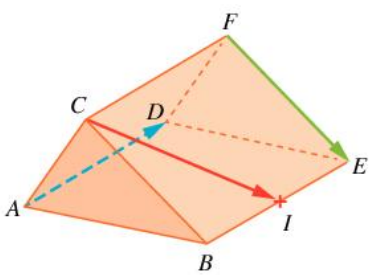
Si $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, alors A, B, C, D et E sont alignés.

3. A, B et C sont trois points alignés.

Si $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ alors A, B, C, D et E sont coplanaires.

15 **Chercher**

Dans le prisme ci-dessous, I est le milieu de $[BE]$.



• Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

16 **Champ électrique**

O est un point fixe de l'espace.

Un proton de masse m se déplace dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ de l'espace. On sait qu'à chaque instant t, la position du proton est représentée par le point M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \times \frac{q}{m} t^2 \vec{E} + t\vec{V}_0$$

où $\vec{V}_0$ est le vecteur vitesse initiale du proton, non colinéaire à $\vec{E}$, q sa charge électrique et m sa masse.

• Expliquer pourquoi le proton se déplace dans un plan.

Positions relatives de droites et de plans

17 VRAI OU FAUX

Indiquer pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Dans l'espace :

a. une droite et un plan ont nécessairement un point en commun.

b. si deux points A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$.

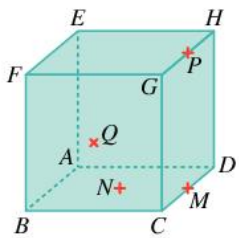
c. deux droites déterminent toujours un plan.

d. si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à toute droite de ce plan.

e. si deux plans sont parallèles, alors il existe une droite de l'un parallèle à une droite de l'autre.

18 QCM

$ABCDEFGH$ est un cube, M est le milieu de $[DC]$, N est le centre de la face $ABCD$, P est le milieu de $[HG]$ et Q est le centre de la face $BCGF$.



Indiquer dans chaque cas la seule bonne réponse. Justifier.

1. Les points qui appartiennent à un même plan sont :

(a) A, B, C et P. (b) M, N, E et H.

(c) M, C, P et F. (d) M, P, E et F.

2. Les droites sécantes sont :

(a) (AN) et (DE).

(b) (AG) et (BH).

(c) (EF) et (MP).

3. Le plan et la droite sécants sont :

(a) (ABC) et (DH).

(b) (ABE) et (CP).

(c) (MNH) et (BC).

19 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

$ABCDEFGH$ est un cube. S est le milieu de $[GC]$.

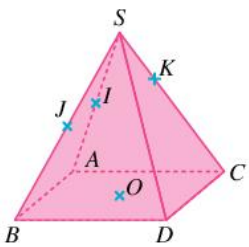
1. Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Placer le point R tel que $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$.
3. À l'aide du logiciel, conjecturer la position relative des droites (BS) et (AR).
4. Justifier la conjecture.
5. Construire l'intersection de la droite (AR) et du plan (BCG) à l'aide du logiciel, puis reproduire la figure « à la main ».

20 **Communiquer, chercher**

$SABDC$ est une pyramide à base carrée de centre O et de sommet S. I et J sont les milieux respectifs des segments $[SA]$ et $[SB]$.

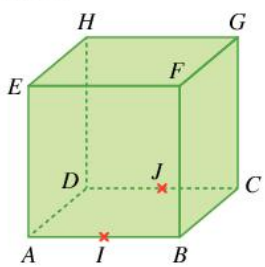
Le point K est défini par l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$



1. Recopier et compléter, lorsque c'est possible, les égalités vectorielles suivantes.
   a. $\overrightarrow{IJ} = \ldots\overrightarrow{CD}$
   b. $\overrightarrow{JK} = \ldots\overrightarrow{BC}$
   c. $\overrightarrow{SJ} = \ldots\overrightarrow{SB}$
   d. $\overrightarrow{OD} = \ldots\overrightarrow{IJ}$
2. En déduire les positions relatives des couples de droites suivants.
   a. (IJ) et (CD).
   b. (JK) et (BC).
   c. (SJ) et (SB).
   d. (OD) et (IJ).

21 $ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CD]$.



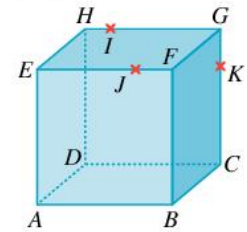
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection des deux plans. Justifier.

1. (AIE) et (BIG).
2. (ADI) et (BJC).
3. (HEF) et (BJC).

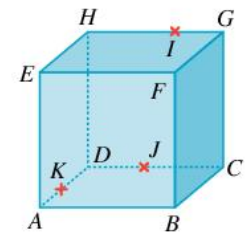
22 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Dans chacun des cas suivants, reproduire le cube $ABCDEFGH$, puis tracer la section du cube par le plan (IJK).

1. $I \in [GH]$, $J \in [EF]$ et $K \in [GC]$.



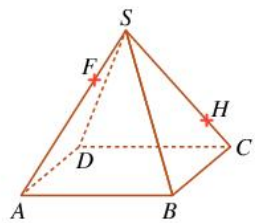
2. $I \in [GH]$, $J \in [DC]$ et $K \in [AD]$.



On pourra utiliser un logiciel de géométrie pour vérifier les constructions.

23 On considère une pyramide $ABCDS$ sur laquelle on place deux points H et F respectivement sur les arêtes $[SA]$ et $[SC]$ privées des sommets.

L'objectif de l'exercice est de construire la section de la pyramide $ABCDS$ par le plan (BHF).



1. Reproduire la figure et construire les intersections du plan (BHF) avec les faces (ABS) et (BCS).
2. Construire la droite d, intersection des plans (SAB) et (SDC).
3. Justifier l'existence du point M à l'intersection des droites d et (BF).
4. Dans quels plans la droite (MH) est-elle incluse ?
5. Finir la construction de la section.

24 VRAI OU FAUX

$ABCDEFGH$ est un cube et P est un point de l'arête $[AB]$ privée de A et de B.

Indiquer pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. La section du cube par le plan (HCP) est un quadrilatère.
2. La section du cube par le plan (HCP) est un triangle.
3. La section du cube par le plan (HCP) est un parallélogramme.
4. La section du cube par le plan (HCP) est un trapèze.

Repérage dans l'espace

25 Tracer un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et placer les points suivants : $A(2 ; 1 ; 0)$; $B(0 ; 2 ; 1)$; $C(1 ; 1 ; -3)$ et $D(-1 ; 2 ; 3)$.

26 **Représenter**

$ABCDEFGH$ est un cube ; I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$ et O est le centre du quadrilatère $IJKL$.

1. Lire les coordonnées de tous les points nommés sur la figure dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
2. Dans le repère $(G ; \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$:

a. quel est le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$?

b. donner tous les points nommés de cote nulle.

27 **Calculer**

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Soient I le milieu de $[DC]$ et J le milieu de $[BD]$.

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace.
2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis en déduire leurs coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

a. $\overrightarrow{AJ}$ b. $\overrightarrow{BI}$ c. $\overrightarrow{BD}$

28 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2 ; 1 ; -3)$ et $B(0 ; 2 ; 4)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Soit le point $C(1 ; -2 ; -1)$.

Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

4. À l'aide d'un logiciel de géométrie, vérifier ces résultats.

29 Sur un tétraèdre $ABCD$, on place :

• le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$;

• le point I tel que $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

• Donner les coordonnées de tous les points nommés sur la figure dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

30 1. Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1 ; 0{,}5 ; 2)$, $B(0 ; 2 ; 0{,}5)$, $C(3 ; 2{,}5 ; 7)$ et $D(3 ; -2{,}5 ; 1)$.

a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

b. Le point A appartient-il à la droite (BD) ?

2. On considère les points $E(1 ; 0{,}5 ; 4)$ et $F(-3 ; -2 ; 1)$.

a. Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?

b. Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

31 **Calculer**

Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur : $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

32 Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur : $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$.

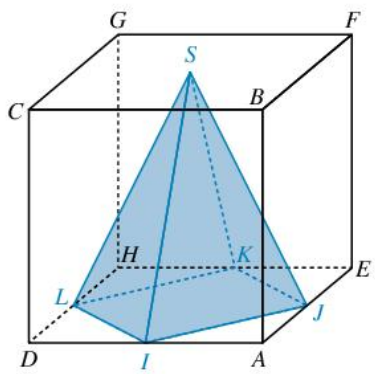
b. Peut-on en déduire que ces trois vecteurs sont non coplanaires ?

2. a. Calculer les coordonnées du vecteur : $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

b. Que peut-on déduire ?

3. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

33 Un presse-papier est constitué d'une pyramide $SIJKL$ à base carrée inscrite dans un cube transparent $ABCDEFGH$. Il est représenté ci-dessous en perspective cavalière.



Sachant que le sommet S de la pyramide est au centre de la face supérieure du cube et que les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes de la face inférieure $AEHD$, donner les coordonnées de tous les points nommés de la figure :

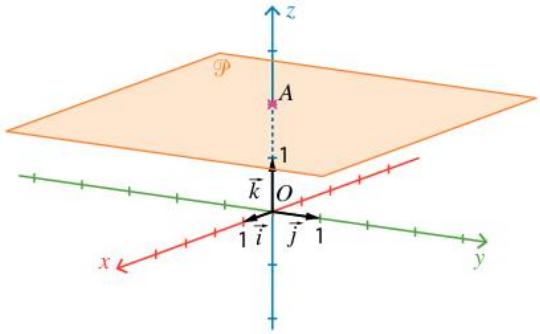
a. dans le repère $(H ; \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG})$;

b. dans le repère $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA})$.

34 L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points $A(2 ; 4 ; 3)$, $B(0 ; 1 ; 5)$ et $C(5 ; -3 ; 3)$.
On appelle G le centre de gravité du triangle ABC défini par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

• Donner les coordonnées du point G dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

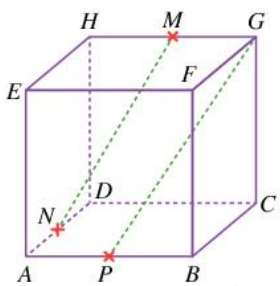
35 Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ci-dessous, on a représenté un plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(0 ; 0 ; 2)$ et parallèle au plan passant par O et ayant pour base le couple $(\vec{i}, \vec{j})$.



1. Parmi les points suivants, lesquels sont ceux qui appartiennent au plan $\mathcal{P}$?
• $B(1 ; 2 ; 2)$ • $C(0 ; 2 ; 0)$ • $D(0 ; 2 ; 2)$;
• $E(-2 ; 0 ; 0)$ • $F(50 ; 14 ; 2)$; • $G(0 ; -4 ; 2)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées d'un point $M(x ; y ; z)$ pour qu'il appartienne au plan $\mathcal{P}$.

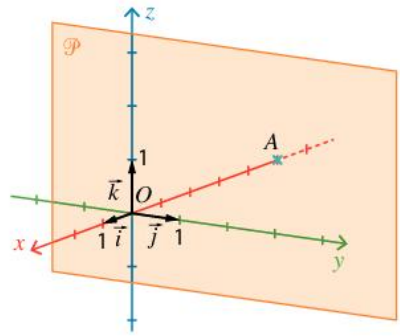
36 $SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est un parallélogramme de centre O.
Dans chaque cas, dire si les vecteurs suivants sont coplanaires ou non.
Justifier la réponse.
1. $\vec{AB}$, $\vec{CA}$ et $\vec{BD}$.
2. $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AC}$.
3. $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AS}$.
4. $\vec{SA}$, $\vec{SB}$ et $\vec{SO}$.
5. $\vec{SA}$, $\vec{SC}$ et $\vec{SO}$.
6. $\vec{SA}$, $\vec{SD}$ et $\vec{BC}$.

37 $ABCDEFGH$ est un cube.
M, N et P sont les milieux respectifs des arêtes $[HG]$, $[AD]$ et $[AB]$.



On munit l'espace du repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
1. Déterminer les coordonnées des points G, M, N et P.
2. On veut étudier la position relative des droites (MN) et (GP).
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{GP}$.
b. En déduire la position relative des droites (MN) et (GP).
3. Reprendre la question 2 avec les droites (NG) et (AF).

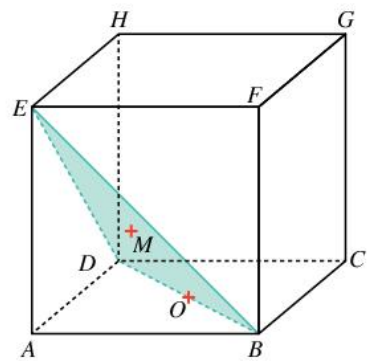
38 **Calculer**
Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ci-dessous, on a représenté un plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(-5 ; 0 ; 0)$ et de base $(\vec{j}, \vec{k})$.



Ce plan représente la façade d'un immeuble que l'on souhaite éclairer grâce à des faisceaux lumineux assimilés à des droites.
1. a. Justifier que le faisceau lumineux passant par le point de coordonnées (1 ; 1 ; 0) et de vecteur directeur $-\vec{i}$ éclaire la façade.
b. Quelles sont les coordonnées du point d'impact de ce faisceau sur la façade ?
2. Justifier que le faisceau lumineux passant par les points de coordonnées (1 ; 2 ; 3) et (1 ; 3 ; 5) n'éclaire pas la façade, c'est-à-dire qu'il n'a pas de point d'impact avec celle-ci.
3. Un faisceau lumineux passe par le point de coordonnées (–1 ; –2 ; 1) et atteint la façade de l'immeuble au point de coordonnées (–5 ; 1 ; 6).
Ce faisceau passe par le point de coordonnées $(7 ; y ; z)$, avec y et z réels. Déterminer les valeurs de y et z.

39 **Un alignement**
$ABCDEFGH$ est un cube et O est le centre de la face $ABCD$.
On définit le point M à l'aide de l'égalité vectorielle suivante :

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AE}.$$



1. Écrire le vecteur $\vec{CM}$ à l'aide des vecteurs $\vec{CB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{CG}$.
2. Donner les coordonnées des points M, A et G dans le repère $(C ; \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CG})$.
3. Montrer que les points A, M et G sont alignés.

40 $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
M est le point tel que $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SD} + 3\overrightarrow{CJ}$.
On veut montrer que les points M, I et J sont alignés.
1. Faire une figure.
2. Montrer que :
a. $\overrightarrow{DM} + 3\overrightarrow{CJ}$;
b. $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CJ}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{JM} = 2\overrightarrow{IJ}$.
4. Conclure.

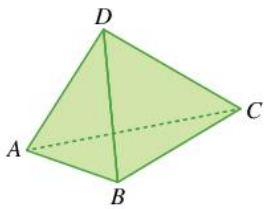
41 Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}.$$

1. Justifier que le vecteur $\vec{w}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{v} - \vec{u}$.
2. Donner un vecteur colinéaire au vecteur $\vec{w}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur :
$$3\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}.$$
Que peut-on en déduire pour ces trois vecteurs ?
4. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{t}$ non colinéaire à $\vec{v}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
5. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{h}$ de cote nulle et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
6. Justifier que les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires.

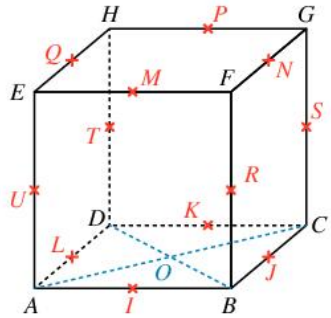
42 **Représenter, raisonner**
$ABCDEFGH$ est un cube de centre O.
Le point J est le milieu du segment $[AC]$ et le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
1. Démontrer que les droites (AB) et (JK) sont sécantes.
2. Dans le repère $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, donner les coordonnées des points A, B, J et K.
3. On donne le point P de coordonnées $(1 ; \frac{3}{2} ; 0)$.
Justifier que le point P est le point d'intersection des droites (AB) et (JK).

43 On considère un tétraèdre $ABCD$.



1. Faire une figure et :
a. construire le milieu I de $[BC]$;
b. construire le point G tel que :
$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}.$$
c. construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires.

44 $ABCDEFGH$ est un cube sur lequel on a placé les milieux de chaque arête et le centre O de la face de dessous.



1. Reproduire la figure et construire les points :
a. Z tel que $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$;
b. Y tel que $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.
2. Que peut-on dire des points I, U et Z ? Justifier en exprimant $\overrightarrow{IZ}$ puis $\overrightarrow{IU}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AE}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ZBCY$?

45 Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$.
1. Faire une figure de telle sorte que les points I et J ne soient pas sur une face « cachée ».
On pose $\vec{a} = \overrightarrow{IJ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.
2. Déterminer, en fonction de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, un vecteur directeur de chacune des droites (CB), (AB), (CD) et (AC).
3. Déterminer, en fonction de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, une base de chacun des plans (BCD), (ABC), (ABD) et (ADC).

46 PRISE D'INITIATIVE
$SABC$ est un tétraèdre. Au plan de quelle face le point M tel que $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ appartient-il ?
Le démontrer.

47 Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés.
On considère les points M et N tels que :
$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}.$$
1. Faire une figure.
2. Montrer que le point C appartient à la droite (MN).

48 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ de centre O.
• Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

49 PRISE D'INITIATIVE
$ABCDEFGH$ est un cube.
U et V sont les points tels que :
$$\overrightarrow{UF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} \text{ et } \overrightarrow{BV} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.$$
• Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont coplanaires.

50 Dans le pavé droit $PAVEDROI$, M est le milieu de $[DP]$ et N est celui de $[VO]$. S est le milieu de $[PI]$ et T est celui de $[IA]$.

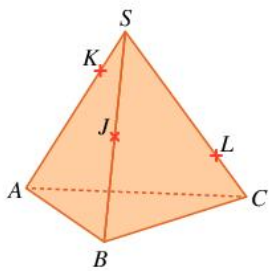
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{IR}$ sont coplanaires.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont coplanaires.

51 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Sur le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous, on définit les points J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{SJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}\ ;\ \overrightarrow{SK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}\ \text{ et }\ \overrightarrow{SL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SC}.$$



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, reproduire la figure et construire l'intersection des plans (ABC) et (JKL).

2. Reproduire la figure en perspective cavalière et construire, en justifiant leur existence :

a. le point M, intersection des droites (KL) et (AC) ;

b. le point N, intersection des droites (KJ) et (AB).

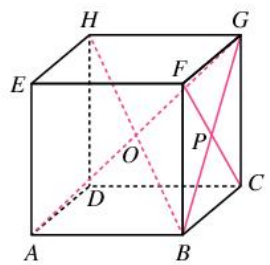
3. Justifier l'appartenance des points M et N aux deux plans (KJL) et (ABC).

4. En déduire l'intersection des plans (ABC) et (JKL).

5. **Prolongement.**

Construire l'intersection entre la droite (JL) et le plan (ABC). Justifier la construction.

52 On considère le cube $ABCDEFGH$ de centre O, représenté ci-dessous.



1. Justifier que $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace. On se place dans ce repère pour répondre aux questions suivantes.

2. Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, D et E.

3. Déterminer les coordonnées des points C, F, G, H, O et P, centre de la face $(BCGF)$.

4. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.

a. $\overrightarrow{GP}$ b. $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{BO}$

53 $ABCDEFGH$ est un cube.

On considère le point X, défini par $\overrightarrow{HX}=\frac{5}{4}\overrightarrow{HF}$, et un point Y du segment $[BF]$.

1. **Méthode vectorielle**

a. Faire une figure.

b. Que dire des points D, H, X et Y ?

c. Montrer qu'il existe un unique réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $\overrightarrow{BY}=t\overrightarrow{BF}$.

d. Montrer que si $t=\frac{4}{5}$, les points D, Y et X sont alignés.

2. **Méthode analytique**

On se place dans le repère $(D\ ;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

a. Donner les coordonnées des points de la figure.

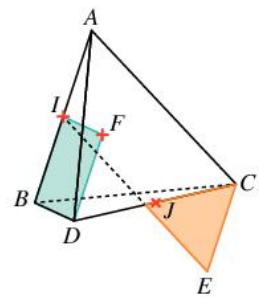
b. Justifier la conjecture émise à la question 1.b.

c. En supposant que $\overrightarrow{BY}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BF}$, justifier l'alignement des points D, Y et X en utilisant les coordonnées.

54 **Chercher**

On considère un tétraèdre $ABCD$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

On construit les points E et F tels que les quadrilatères $IACE$ et $IBDF$ soient des parallélogrammes.



On souhaite démontrer que les points E, J et F sont alignés.

Partie A. Méthode vectorielle

1. Montrer que $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IJ}$.

2. En déduire les égalités suivantes.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}\ \text{ et }\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{IJ}.$$

3. En déduire que les points E, J et F sont alignés.

Partie B. Méthode analytique

On se place dans le repère $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

1. Donner les coordonnées des points : B, C, D, A, I et J.

2. En déduire celles des points E et F.

3. Conclure.

55 PRISE D'INITIATIVE

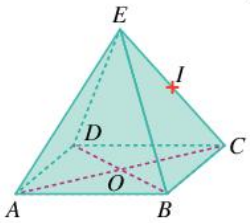
On considère un tétraèdre $ABCD$ autour duquel on construit les points P, Q et R tels que $CAPD$, $DABQ$ et $BACR$ soient des parallélogrammes.

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2. Émettre une conjecture sur les milieux des segments $[BP]$, $[CQ]$ et $[DR]$.

3. Démontrer cette conjecture.

56 $EABCD$ est une pyramide régulière. O est le centre du carré $ABCD$ et I est tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



1. Justifier que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

Préciser la position du point I sur $[EC]$.

2. Reproduire la pyramide et construire le point M tel que :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$
3. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AI}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. Quelles sont les coordonnées des points A, B, D, E, O, M et I dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?
5. Citer six points coplanaires de la figure. Justifier la réponse.
6. Montrer que I est le milieu de $[AM]$.

57 PRISE D'INITIATIVE **Le *tic tac toe***

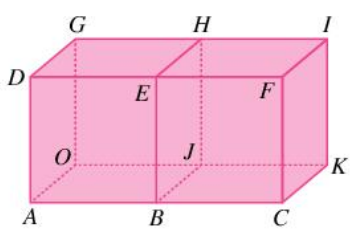
Le *tic tac toe* est un jeu dont le but est d'aligner quatre pions de même couleur soit de façon horizontale, soit de façon verticale, soit en diagonale et ce, en trois dimensions. Le plateau de jeu se présente sous la forme de 16 bâtonnets. Roman joue avec les blancs et Ilona a choisi les noirs.
Au bout de quelques tours, la première partie se présente ainsi.

Roman annonce : « Je place mon pion blanc en (0 ; 0 ; 4) pour contrer la menace immédiate d'alignement vertical de 4 pions noirs d'Ilona. »
Ilona pense alors pouvoir s'assurer la victoire.

• Où Ilona va-t-elle placer son pion ?

58 QCM

Les solides $ABJODEHG$ et $BCKJEFIH$ représentés ci-dessous sont deux cubes de côté 1.



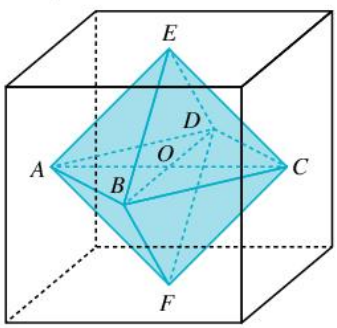
Dans chaque cas, donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées. Justifier.

1. Le triangle GBI est :
(a) isocèle. (b) équilatéral. (c) rectangle.

2. Le point M tel que $2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ est confondu avec :
(a) le point K. (b) le point I. (c) le point J.

3. Les points B, C, I et H :
(a) sont non coplanaires.
(b) forment un rectangle.
(c) forment un carré.

59 Dans les jeux de rôle, on utilise différents types de dés en plus du classique dé à six faces. Les polyèdres réguliers, connus aussi sous le nom de « solides de Platon », permettent d'obtenir des dés dont chaque face a la même probabilité de sortir à chaque tirage. Par exemple, un dé à huit faces a la forme d'un octaèdre régulier.
Un octaèdre régulier peut être obtenu à partir d'un cube en prenant pour sommets de l'octaèdre les centres des faces du cube. On a représenté ci-dessous un octaèdre régulier $ABCDEF$ inscrit dans un cube dont l'arête mesure 2 cm. Le point O est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$.



On admet que $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ est un repère de l'espace.

1. Rappeler la définition d'un octaèdre régulier.
2. a. Donner les coordonnées des sommets de l'octaèdre régulier $ABCDEF$ dans le repère de l'espace $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$.
b. Que peut-on dire de la sphère de centre O passant par A ?
c. Dans le plan (OAE) rapporté au repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$, calculer les longueurs OE et AE.
d. En utilisant les points A, B, C, D, E, F et O, citer toutes les longueurs égales.
3. Les droites (AE) et (FC) sont-elles parallèles ? Justifier.
4. Un jeu consiste à lancer simultanément un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et un dé octaédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 8.
Justifier que la probabilité d'obtenir un couple de deux nombres identiques est égale à $\frac{1}{8}$.

60 PRISE D'INITIATIVE

$ABCD$ est un tétraèdre.

1. À quel plan contenant une face du tétraèdre appartient le point M défini par :

$$2\overrightarrow{CM} = -5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD} \text{ ?}$$

2. Même question pour le point N défini par :

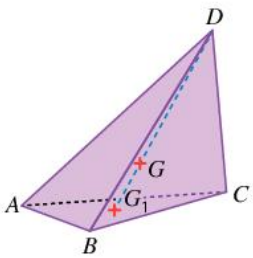
$$2\overrightarrow{BN} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{BC}.$$

61 **Centre de gravité**

Dans un tétraèdre $ABCD$, on note :

• G le point tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, appelé centre de gravité du tétraèdre $ABCD$;

• G_1 le point tel que : $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$, appelé centre de gravité du triangle ABC.



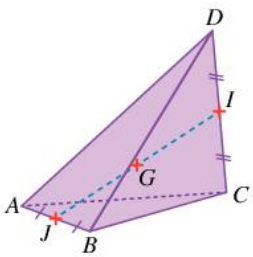
On appelle médiane du tétraèdre le segment qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{G_1D}$.

b. En déduire que G appartient à la médiane (DG_1) et donner la position de G sur la médiane.

c. Démontrer de même que G est situé sur les trois autres médianes.

2. On appelle bimédiane d'un tétraèdre une droite passant par les milieux de deux arêtes non incluses dans la même face. Il y a donc trois bimédianes dans un tétraèdre.



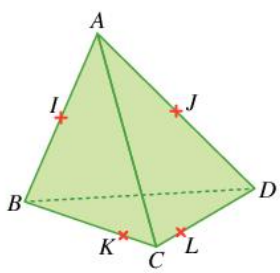
I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$.

a. Montrer que G est le milieu de $[IJ]$.

b. Montrer que les bimédianes du tétraèdre sont concourantes en G.

62 **Droites concourantes**

$ABCD$ est un tétraèdre de sommet O. I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AD]$. K et L sont les points tels que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.



1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie 3D, puis émettre une conjecture sur les droites (AC), (IK) et (JL).

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, puis en déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

3. Justifier que les droites (IK) et (JL) sont sécantes.

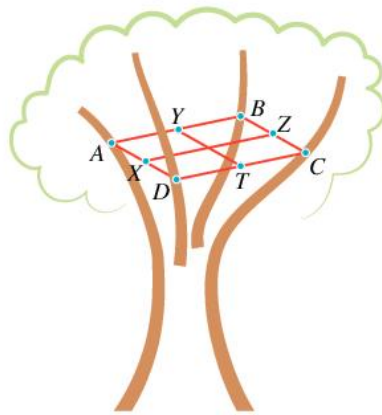
4. Sur quelle arête du tétraèdre se situe le point d'intersection des deux droites (IK) et (JL) ? Conclure.

63 **Construction d'une cabane**

Paul bâtit une cabane dans un arbre et commence par construire le plancher.

Pour cela, il fixe sur les branches quatre poutres, de façon à former un quadrilatère, mais ne peut faire autrement que de les attacher en quatre points A, B, C et D non coplanaires.

Ensuite, il pose deux nouvelles poutres passant par les milieux des côtés opposés comme sur le dessin ci-dessous (X est le milieu de $[AD]$, Y est le milieu de $[AB]$, Z est le milieu de $[BC]$ et T est le milieu de $[CD]$).



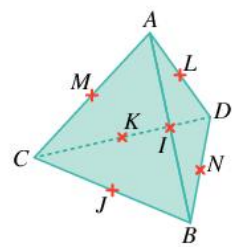
1. Les droites (BC) et (YT) sont-elles parallèles ?

2. Les points X, Y, Z et T sont-ils coplanaires ?

3. Les poutres (YT) et (XZ) se croisent-elles ?

4. Paul peut-il réaliser un plancher convenable ainsi ?

64 $ABCD$ représente un diamant de forme tétraédrique dont toutes les arêtes ont des longueurs différentes. On le représente ci-contre avec I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.



Un bijoutier désire le percer de part en part en trois endroits, suivant les directions (IK), (JL) et (MN). Son apprentie lui dit : « Attention ! Les perçages passent tous les trois par un même point dans le diamant et vont donc le fragiliser. »

1. Justifier que (IK) et (JL) sont sécantes en un point X.

2. Justifier que X appartient à (MN). Conclure.

65 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Représenter, chercher

$ABCD$ est un tétraèdre. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 1[$.

On construit les points E, F, G et H tels que :
$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CH} = a\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{CD}$.

I est le milieu de $[BD]$ et J est le milieu de $[AC]$.

• Que peut-on dire des droites (HE), (GF) et (IJ) ?

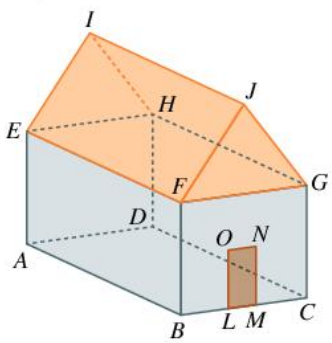
On pourra commencer par émettre une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie 3D.

66 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **La maison d'Émilie**

Émilie veut construire une maison ayant la forme ci-dessous et respectant les contraintes suivantes.

• Corps du bâtiment : pavé droit de longueur 10 m, de largeur 5 m et de hauteur 4 m.

• Toit : prisme droit ayant pour base un triangle rectangle isocèle.



Elle décide pour cela de réaliser un schéma en plaçant les sommets à l'aide de leurs coordonnées et en utilisant d'un logiciel de géométrie dynamique.

Elle choisit les premières coordonnées : $A(0 ; 0 ; 0)$; $B(10 ; 0 ; 0)$; $D(0 ; 5 ; 0)$ et $C(10 ; 5 ; 0)$.

1. Donner les coordonnées des autres sommets de la cabane afin de réaliser le schéma.

2. Émilie choisit ensuite un emplacement pour l'ouverture de la cheminée : le point K de coordonnées $\left(8 ; \frac{5}{4} ; \frac{5\sqrt{2}+16}{4}\right)$.

Le point K ainsi défini sera-t-il bien sur la toiture ?

3. Émilie veut rajouter deux ouvertures à sa maison :

• une porte dont les sommets seront les points : $L(10 ; 2 ; 0)$; $M(10 ; 3 ; 0)$; $N(10 ; 3 ; 2)$ et $O(10 ; 2 ; 2)$, et dont la poignée se situera en P tel que :

$$\overrightarrow{LP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{LO} ;$$

• un œil-de-bœuf (lucarne ronde) dont le centre sera situé au milieu de la hauteur issue de J dans le triangle JFG.

Donner les coordonnées du point P et du centre de la lucarne.

4. Kito, la tortue d'Émilie, a décidé d'aller se cacher au point de coordonnées $\left(17 ; \frac{27}{4} ; 0\right)$, près d'un arbre positionné en $(14 ; 6 ; 0)$ dans le jardin.

L'endroit où est cachée Kito est-il aligné avec l'arbre et le point C ?

67 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et un point M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{GM} = x\overrightarrow{CG} \text{ avec } x \in [0 ; 1].$$

Partie A. Une section

1. Justifier que les droites (MB) et (FG) sont coplanaires et sécantes. On nomme U leur point d'intersection.

2. Même question pour les droites (MD) et (HG). On nomme V leur point d'intersection.

3. À l'aide des points de la figure, construire et définir le polyèdre $\mathcal{P}$ formé par l'intersection du tétraèdre $MDBC$ et du cube.

Partie B. Un volume LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

L'objectif de cette partie est de trouver la position du point M telle que le volume du polyèdre $\mathcal{P}$ soit égal au quart du volume du cube.

1. Après avoir reproduit la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique 3D, conjecturer la position du point M qui répond au problème (donner une valeur de x à 0,1 près).

La commande $\boxed{M = A + a * u}$ *permet de placer le point* M *tel que* $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$.

On peut avoir besoin de créer un curseur pour définir le point M avec l'outil

.

Pour faire calculer et afficher des volumes, utiliser l'outil

.

2. a. Montrer que le volume du polyèdre peut s'écrire, en fonction de x, l'aide de la formule :

$$\frac{3x^2 + 3x + 1}{6(x+1)^2}, \text{ avec } x \in [0 ; 1].$$

b. CALCULATRICE Utiliser la calculatrice pour donner une valeur de x à 0,01 près qui répond à la question posée.

3. Résoudre l'équation $\frac{3x^2 + 3x + 1}{6(x+1)^2} = 0{,}25$ et en déduire la valeur exacte de x qui répond au problème.

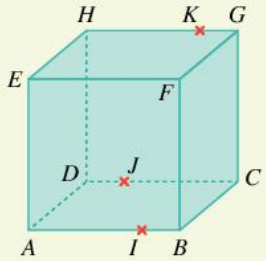
ZOOM SUR... la géométrie dans l'espace

En géométrie dans l'espace, il faut souvent se ramener à un plan de la figure pour utiliser les théorèmes de géométrie plane. Il est alors crucial de choisir ce plan judicieusement.

68 15 min VRAI OU FAUX

On considère un cube $ABCDEFGH$ et les points I, J et K définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}.$$

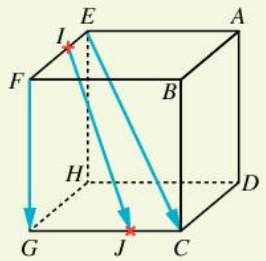


Indiquer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse.

1. La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) est un triangle.
2. La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) est un quadrilatère.
3. La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) est un pentagone.
4. La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) est un hexagone.

69 45 min

$ABCDEFGH$ est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. **Méthode vectorielle**

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. Conclure.

2. **Méthode analytique**

Le plan est rapporté au repère $(G ; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

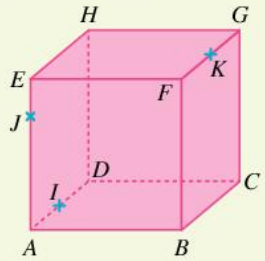
b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

70 30 min

La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment $[AD]$;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
- K est le milieu du segment $[FG]$.



1. Reproduire la figure et construire, sans justifier, le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH).
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

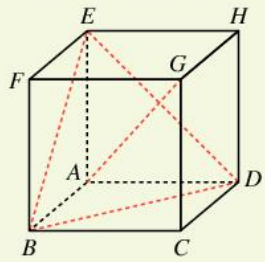
71 25 min

Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(2 ; 1 ; 5)$, $B(4 ; 2 ; 4)$, $C(3 ; 3 ; 5)$ et $D(0 ; 3 ; 7)$.

1. Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.
2. Déterminer une relation vectorielle liant les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Que retrouve-t on grâce au résultat précédent au sujet des points A, B, C et D ?
4. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? Justifier.

72 45 min

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.

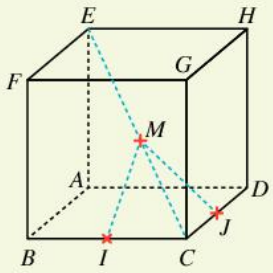


Pour tout nombre réel m, on définit le point G_m tel que :
$\overrightarrow{G_mE} + (1-m)\overrightarrow{G_mB} + (2m-1)\overrightarrow{G_mG} + (1-m)\overrightarrow{G_mD} = \vec{0}$.
On admet que ce point G_m ainsi défini existe et qu'il est unique.

1. Reproduire la figure ci-dessus.
2. Vérifier que $G_0 = A$.
3. a. Écrire une égalité vectorielle vérifiée par le point G_1.
   b. En déduire la position de G_1 et placer ce point sur la figure.
4. a. Démontrer que, pour tout réel m, on a :
$$\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AG_1}.$$
   b. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. On note I le centre du carré $ABCD$.
Montrer que les points A, G_m, E et I sont coplanaires.

73 50 min

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.
Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
b. On admet l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que les coordonnées du point M soient $(1 - t ; 1 - t ; t)$.
Lorsque $t = 0{,}5$, quelle position particulière occupe le point M dans le cube ?
2. On admettra que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M et que :

$$IM^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

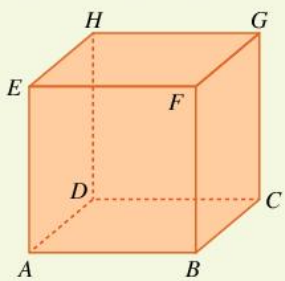
Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.
On désigne par θ la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{IMJ}$.
a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[EC]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

74 40 min

Soit le cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm, représenté ci-dessous dans un format réduit.



1. Tracer le cube, puis placer les quatre points I, J, I' et J' tels que :

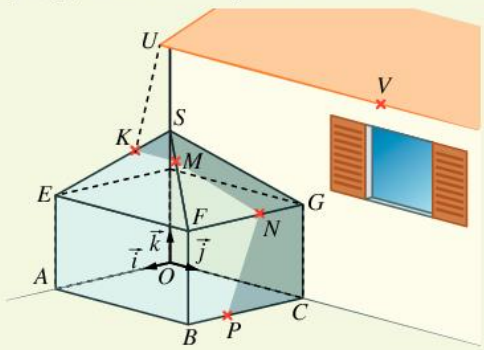
$$\vec{AI} = \frac{1}{8}\vec{AB} + \frac{1}{8}\vec{AD} + \vec{AE}; \quad \vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE};$$

$$\vec{AI'} = \vec{AB} + \frac{3}{8}\vec{AD} + \frac{1}{8}\vec{AE}; \quad \vec{AJ'} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{8}\vec{AE}.$$

2. Justifier que les points I et J sont sur la même face du cube. Préciser laquelle.
3. Déterminer les coordonnées des points I, J, I' et J' dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$
4. On décide de « percer » le cube à l'aide de deux droites, (II') et (JJ'). Tracer ces deux droites.
5. Les trois vecteurs $\vec{II'}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{IJ'}$ sont-ils coplanaires ?
6. Les droites (II') et (JJ') sont-elles sécantes ?

75 40 min

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.
• Les droites (SO), (OA) et (OC) sont deux à deux perpendiculaires.
• Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
• Les arêtes $[UV]$ et $[EF]$ des toits sont parallèles.
Le point K appartient au segment $[SE]$, le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale $KMNP$ qui est la limite ombre-soleil

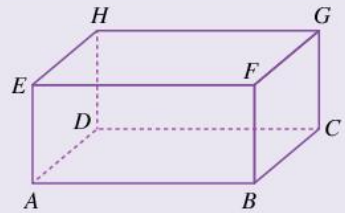


1. Sans calcul, justifier que :
a. le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$;
b. le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.
2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des différents points sont : $A(4 ; 0 ; 0)$, $B(4 ; 5 ; 0)$, $C(0 ; 5 ; 0)$, $E(4 ; 0 ; 2{,}5)$, $F(4 ; 5 ; 2{,}5)$, $G(0 ; 5 ; 2{,}5)$, $S(0 ; 0 ; 3{,}5)$, $U(0 ; 0 ; 6)$ et $V(0 ; 8 ; 6)$.
On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée
a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Justifier que $\vec{SK} = 0{,}3\vec{SE}$.
b. En déduire que les coordonnées de K sont $(1{,}2 ; 0 ; 3{,}2)$

Consolider ses fondamentaux

76 Plan et pavé droit

$ABCDEFGH$ est un pavé droit. M est un point de la face $BCGF$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par M et de base $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})$.



Questions Va piano

1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
2. Montrer que la droite (BC) est incluse dans le plan (BFG).
3. a. Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et (BFG) sont sécants.
b. Que peut-on dire de leur droite d'intersection et des droites (BC) et (AD) ?
4. Reproduire la figure et construire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la face $(BCGF)$.

Questions Moderato

1. Montrer que la droite (BC) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
2. Montrer que la droite Δ, passant par M et parallèle à la droite (BC), est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
3. Reproduire la figure et construire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la face $(BCGF)$.

Questions Allegro

1. Reproduire la figure ci-dessus et représenter le plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer, en justifiant, la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la face $(BCGF)$.
3. Justifier que l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (EFG) est une droite parallèle à la droite (BC).

Se préparer aux études supérieures

77 Géométrie vectorielle et barycentre

Approfondissement

$ABCD$ est un tétraèdre.
E est le point de $[BD]$ tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$, F est le point de $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, J est le milieu de $[EF]$.

1. Expliquer pourquoi les plans (ABJ) et (CDJ) sont sécants. On appelle Δ leur droite d'intersection.
2. Prouver que la droite Δ coupe les droites (AB) et (DC).
3. a. Montrer que $3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{ED} = \vec{0}$.
On dit alors que le point E est le barycentre des points $(B, 3)$ et $(D, 2)$. Les nombres 3 et 2 sont alors appelés les masses respectives des points B et D.
b. Justifier l'alignement des points E, B et D.
4. Montrer que F est le barycentre des points $(A, 2)$ et $(C, 1)$.
5. a. Traduire vectoriellement le fait que J est le milieu de $[EF]$.
b. En déduire que l'on peut dire qu'il existe un réel m non nul tel que J est le barycentre des points (E, m) et (F, m).
6. On admet la propriété suivante, dite du barycentre partiel :
« Soient a, b, c, d quatre réels non nuls tels que $a + b + c + d \neq 0$ et G le barycentre des points (A, a) ; (B, b) ; (C, c) et (D, d), c'est-à-dire que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Si $a + b \neq 0$, $c + d \neq 0$, si M est le barycentre des points (A, a) et (B, b) et si N est le barycentre des points (C, c) et (D, d), alors G est le barycentre des points $(M, a + b)$ et $(N, c + d)$. »
a. En utilisant cette propriété, montrer que le barycentre des points $(A, 10)$, $(B, 9)$, $(C, 5)$ et $(D, 6)$ est le point J.
b. Les points A, B, C, D et J sont-ils coplanaires ?
c. On note G le barycentre des points $(A, 10)$ et $(B, 9)$ et H le barycentre des points $(C, 5)$ et $(D, 6)$.
Montrer que J est le barycentre des points $(G, 19)$ et $(H, 11)$.
d. En déduire que $\overrightarrow{JG} = -\frac{11}{19}\overrightarrow{JH}$, puis que (GH) est la droite Δ.

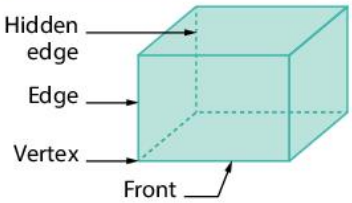
No problem!

1 Vocabulary

1. Look online for a 3D model of the "Palais de l'Ombrière" that was built in Bordeaux for Alienor d'Aquitaine.
Describe this building using 3D vocabulary among the following words:

- polyhedron
- sphere
- cube
- tetrahedron
- cuboid
- cone
- triangular prism
- cylinder
- square-based pyramid
- hexagonal

2. A cavalier projection is an oblique projection in which the front face is drawn to scale and the parallel straight lines remain parallel.
Sketch a cavalier projection of all the polyhedrons you haven't used to describe the castle.



2 3D vectors

1. Points P, Q and R have position vectors $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}\begin{pmatrix}-2\\-10\\8\end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}2\\7\\-5\end{pmatrix}$ in a 3D coordinate system.

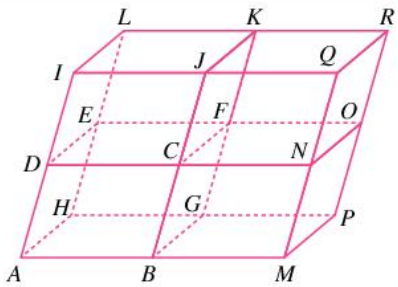
Show that $\overrightarrow{QP}$ is parallel to $\overrightarrow{QR}$.

2. Point S divides the line segment $\overrightarrow{PQ}$ in the ratio 3:1. Find the position vector of S.

3 Matching game PAIR WORK

Match each point in the left-hand column with the 3D coordinate system that corresponds to the right-hand column. Explain your choice using 3D vector equalities.

- $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD})$
- $(B; \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BC})$
- $(F; \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FK})$
- $(H; \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HE})$
- $J(1, 1, 2)$
- $Q(1, 1, 1)$
- $E(-1, 1, 1)$
- $F(1, 1, 1)$

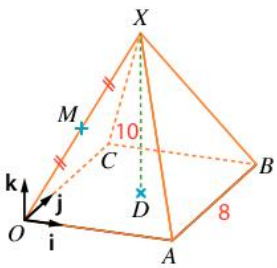


Final exam Past papers

The diagram on the right shows a pyramid $OABCX$. The horizontal square base $OABC$ has side 8 units and the centre of the base is D. The top of the pyramid X is vertically above D and $XD = 10$ units. The mid-point of OX is M. The unit vectors **i** and **j** are parallel to $\overrightarrow{OA}$ and $\overrightarrow{OC}$ respectively and the unit vector **k** is vertically upwards.

1. Express $\overrightarrow{AM}$ and $\overrightarrow{BX}$ in terms of **i**, **j** and **k**.

2. Are these two vectors parallel ones?



CHAPITRE

11

Orthogonalité et distances dans l'espace

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Une nouvelle multiplication... dans l'espace

Hermann Grassmann

Hermann Grassmann (1809-1877) est un mathématicien allemand. Dans son ouvrage *La théorie de l'extension linéaire, une nouvelle branche des mathématiques* (1844), il explique que la géométrie peut être étudiée de manière algébrique, qu'on se situe dans le plan ou dans l'espace. Considérant que l'outil vectoriel est primordial, il introduit l'extension du calcul vectoriel du plan à l'espace.

Dans une lettre au comte de Saint-Venant en 1845, Grassmann précise qu'il a une idée féconde : celle de produit linéaire. Voici un extrait d'un de ses ouvrages à ce sujet.

« Par produit linéaire de deux segments orientés, nous entendons le produit algébrique de l'un par le projeté orthogonal de l'autre sur lui. Nous choisissons $\dot{\frown}$ comme signe de la multiplication linéaire, de telle sorte que, par définition, $a \dot{\frown} b = ab\cos(ab)$. Et comme $\cos(ab) = \cos(ba)$, nous voyons que $a \dot{\frown} b = b \dot{\frown} a$. »

Dire ce que représentent aujourd'hui les notions de « segment orienté » et de « multiplication linéaire » évoquées par Grassmann, puis justifier la dernière phrase du texte.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Parallélisme dans l'espace

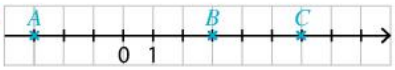
Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(3\,;4\,;-2)$, $B(-5\,;10\,;4)$, $C(-1\,;2\,;3)$ et $D(7\,;-4\,;-3)$.

- Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

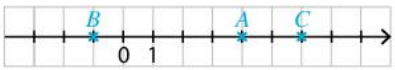
2 Produit scalaire (1)

On se place dans le plan. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants en utilisant une formule adaptée.

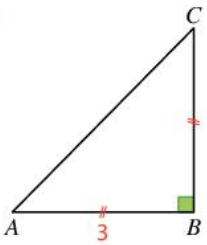
1.



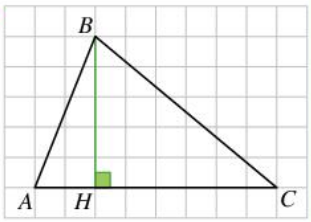
2.



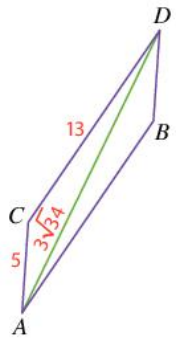
3.



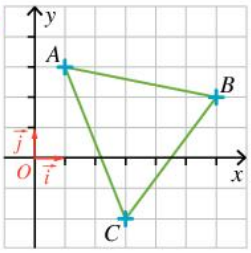
4.



5. $ABCD$ est un parallélogramme.



6.



3 Produit scalaire (2)

Dans le plan, dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, sans justifier.

1. Le produit scalaire de deux vecteurs quelconques est un nombre positif ou nul.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow C=D$

3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs opposés, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

4 Équation d'une droite dans le plan

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d d'équation $2x-5y+1=0$.

Déterminer :

a. deux points de la droite d.

b. deux vecteurs directeurs de la droite d.

c. deux vecteurs normaux à la droite d.

5 Projeté orthogonal

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d d'équation $x+2y-10=0$.

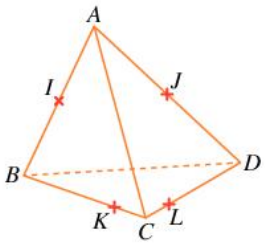
- Montrer que le point $H(40\,;-15)$ est le projeté orthogonal du point $A(50\,;5)$ sur la droite d.

6 Bases et repères

$ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

K et L sont les points tels que :

$\overrightarrow{BK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.



1. Donner deux bases de chacun des plans (KCL) et (IJC).

2. On se place dans la base de l'espace $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$.

3. On se place dans le repère de l'espace $(C\,;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})$.

Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans ce repère.

7 Vecteur normal à une droite

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

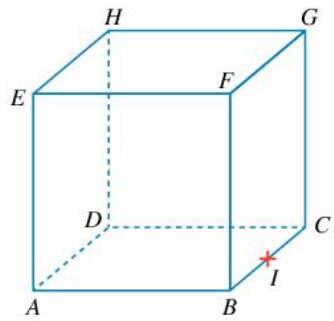
- Déterminer une équation de la droite passant par le point $A(4\,;-3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Du plan à l'espace

Objectifs
Introduire le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace, puis la notion de vecteurs orthogonaux.

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 2 représenté ci-contre. I est le milieu du segment $[BC]$.
Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace ne dépend pas des représentants de ces vecteurs. Il est égal au produit scalaire, défini en géométrie plane, de ces deux vecteurs considérés dans un des plans dont ils sont deux vecteurs directeurs.
Ainsi, dans l'espace, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (notation identique à celle dans le plan) est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé par exemple dans le plan (ABC).

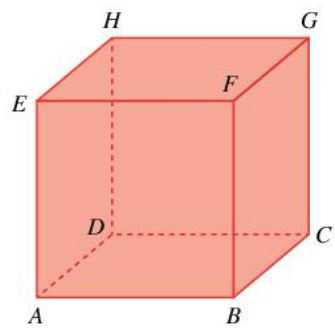


1. **a.** Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   b. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$.
2. En utilisant différents représentants de vecteurs, calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BG}$.
3. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}$.
4. Comme dans le plan, on dit que, dans l'espace, deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.
   Les couples de vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?
   a. $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EA}$.
   b. $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{EG}$.
   c. $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BG}$.

Situation 2 D'autres orthogonalités

Objectifs
Découvrir la notion de droites orthogonales et de droites perpendiculaires dans l'espace, puis de droite orthogonale à un plan.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

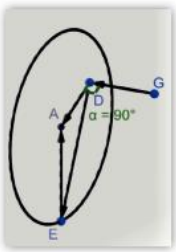


1. **a.** Justifier que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FG}=0$.
   On dit alors que les droites (AE) et (FG) sont orthogonales.
   b. Citer trois autres couples de droites orthogonales.
   c. La droite (AH) est-elle orthogonale à la droite (AB) ? Justifier.
2. **a.** Citer deux droites orthogonales et coplanaires.
   On dit alors qu'elles sont perpendiculaires.
   b. Citer un autre couple de droites perpendiculaires.
   c. Peut-on citer un couple de droites orthogonales non perpendiculaires ?
3. **a.** Citer deux droites sécantes du plan (BAD) orthogonales à la droite (GC).
   On dit alors que la droite (GC) et le plan (BAD) sont orthogonaux.
   b. En utilisant la question **1.c**, démontrer que la droite (AH) et le plan (DFE) sont orthogonaux.

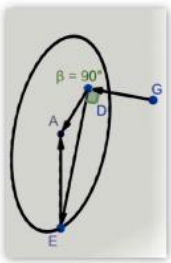
Situation 3 Jeu de fléchettes

Objectif
Découvrir la notion de vecteur normal à un plan.

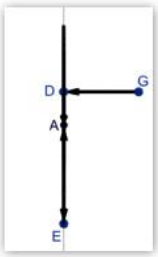
Gad joue aux fléchettes. Au cours du dernier lancer, la position de sa fléchette sur la cible a été modélisée ci-dessous avec un logiciel de géométrie 3D par le vecteur $\overrightarrow{GD}$ (D est le point d'impact sur la cible). Le point A est le centre de la cible et le point E est le point de la cible le plus bas.
On a demandé au logiciel d'afficher la valeur en degré de l'angle $\widehat{GDA}$ et celle de l'angle $\widehat{GDE}$, puis différentes vues de la cible.



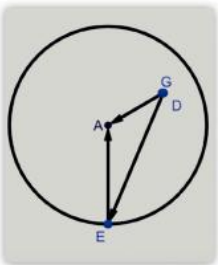
Angle $\widehat{GDA}$



Angle $\widehat{GDE}$



Vue de gauche



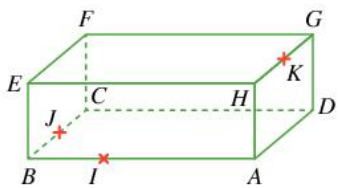
Vue de face

1. Que peut-on dire de la position de la fléchette de Gad par rapport à la cible ?
2. Démontrer que la droite (GD) est orthogonale au plan (AED).
3. Gad a lancé une autre fléchette et l'angle $\widehat{G'D'A}$, G' étant l'extrémité de la nouvelle fléchette et D' son point d'impact, mesure 79°. Que peut-on en conclure ?

Situation 4 Produit scalaire et coordonnées dans l'espace

Objectif
Conjecturer les expressions du produit scalaire de deux vecteurs et de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée de l'espace.

$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $BA = 3$, $BC = 2$ et $BE = 1$. On note I et J les points tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, comme sur le schéma ci-contre.



1. **a.** Justifier que $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BE})$ est une base de l'espace.
   b. De manière immédiate, on note que $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$ et que $\|\overrightarrow{BI}\| = \|\overrightarrow{BJ}\| = \|\overrightarrow{BE}\| = 1$. Comment pourrait-on qualifier une telle base ?
2. **a.** Le point K est le milieu du segment $[HG]$. Déterminer les trois réels x, y et z tels que :
   $$\overrightarrow{BK} = x\overrightarrow{BI} + y\overrightarrow{BJ} + z\overrightarrow{BE}.$$
   b. Calculer alors $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BK}$. Que représente concrètement cette valeur ?
3. Plus généralement dans une base orthonormée, on considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et un vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
   a. À partir des questions précédentes, conjecturer l'expression du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de leurs coordonnées.
   b. Démontrer cette formule en utilisant les propriétés du produit scalaire.
   c. En déduire l'expression de $\vec{u}^2$.
   d. Quelle formule permet alors de déterminer $\|\vec{u}\|$?

1. Produit scalaire dans l'espace

1. Extension du produit scalaire à l'espace

Définition

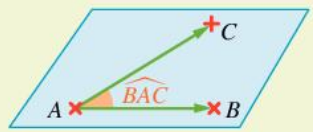
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Les points A, B et C étant coplanaires, le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

Remarque

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis.

Propriétés

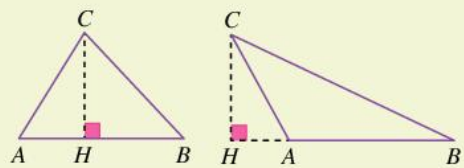
Soient A, B et C trois points de l'espace, B et C étant distincts de A.



- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

DÉMO en ligne

- Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens ;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.



Remarque

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{BAB}\right) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.
$\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.

2. Propriétés algébriques du produit scalaire

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et k un nombre réel. On a :

DÉMO en ligne

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (bilinéarité)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Corollaire (formules de polarisation)

DÉMO en ligne

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

3. Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

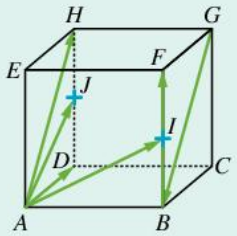
Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace car, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

Méthode 1 Calculer des produits scalaires dans l'espace

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[DH]$.
Déterminer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}$
2. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{GB}$
3. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BF}$
4. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}$



Solution commentée

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$, car D est le projeté orthogonal de J sur (AD) dans le plan (AJD).
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}=AD^2=a^2$

2. $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}$.
Or $ABCDEFGH$ est un cube, donc ses faces sont des carrés. Ainsi $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EH}=-\overrightarrow{GF}$, donc $\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{GB}$.
D'où $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{GB}=-AH^2=-\left(AE^2+EH^2\right)=-2a^2$ (d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEH).

3. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AE}=AH\times AE\times\cos(45°)=a\sqrt{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

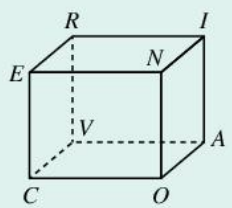
4. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE}$, avec K projeté orthogonal de I sur (AE) dans le plan (AIE).
De plus, $AI^2=AB^2+BI^2=EF^2+FI^2=EI^2$, donc $AI=EI$. Le triangle AIE est donc isocèle en I et K est donc le milieu de $[AE]$. D'où $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE}=AK\times AE=a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

EXERCICE 1 p. 360

Méthode 2 Utiliser des propriétés du produit scalaire

On considère le pavé droit $COAVENIR$ ci-contre tel que :
$CO=5$, $CV=3$ et $CE=4$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{NI}$.
   b. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{NI}$?
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{VI}\cdot\overrightarrow{RA}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}$.



Solution commentée

1. a. $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{NI}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CO})\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=0+0=0$.

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{NI}$ sont donc orthogonaux.

2. $\overrightarrow{VI}\cdot\overrightarrow{RA}=(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{VA})=(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{AI})\cdot(-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{VA})=VA^2-AI^2=5^2-4^2=9$

3. $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON})\cdot(\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{AO})$
$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=CO^2+0+0+0-ON^2+0$
$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=25-16=9$

EXERCICE 3 p. 360

2. Orthogonalité dans l'espace

1. Orthogonalité de deux droites

Définition

Soient d et d' deux droites de l'espace. d et d' sont **orthogonales** si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Propriété

DÉMO en ligne

Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de d est orthogonal à tout vecteur directeur de d'.

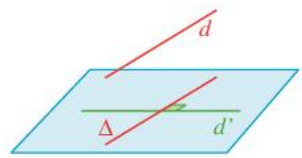
Remarques

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit (c'est un cas particulier d'orthogonalité).
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse.

Propriétés

DÉMO en ligne

- Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement s'il existe une droite Δ parallèle à d et perpendiculaire à d'.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.



2. Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition

Dans l'espace, soient $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.
La droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont **orthogonaux** (ou **perpendiculaires**) si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

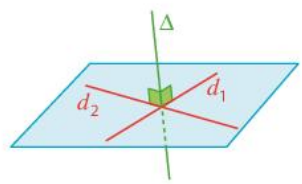
Propriétés

DÉMO en ligne

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

DÉMO p. 352

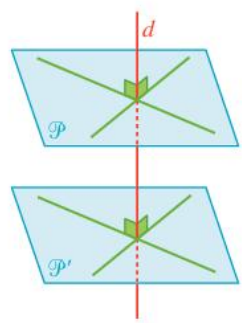
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.



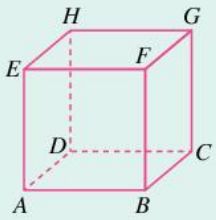
Propriétés

DÉMO en ligne

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.



Méthode 1 Montrer que deux droites sont orthogonales



$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Montrer que les droites (FB) et (AC) sont orthogonales.
2. Montrer que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

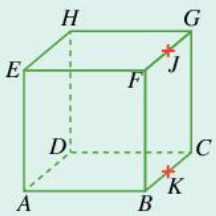
Solution commentée

1. $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et, par conséquent, les droites (FB) et (AC) sont orthogonales.

2. Les faces d'un cube sont des carrés. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ car $EFGH$ est un carré.
Donc $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{GC} = 0$, car $DCGH$ est un carré. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont orthogonaux et, par conséquent, les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

EXERCICE 17 p. 361

Méthode 2 Démontrer l'orthogonalité d'une droite et d'un plan



$ABCDEFGH$ est un cube. Les points J et K sont les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[BC]$.

- Démontrer que la droite (JK) est orthogonale au plan (ABC).

Solution commentée

$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BK})\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$, car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$.

D'où $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

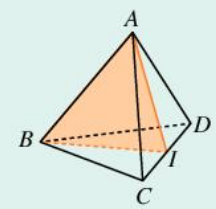
$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BK})\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$, car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$.

D'où $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$, donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Donc, comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ est une base du plan (ABC) et que $\overrightarrow{JK}$ est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, on en déduit que la droite (JK) est orthogonale au plan (ABC).

EXERCICE 16 p. 361

Méthode 3 Utiliser l'orthogonalité d'une droite et d'un plan



$ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). Le point I est le milieu du segment $[CD]$.

1. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI).
2. En déduire que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

Solution commentée

1. ACD est un triangle équilatéral donc, comme I est le milieu de $[CD]$, la droite (AI) est la hauteur issue de A du triangle ACD. Ainsi, $(AI)\perp(CD)$. De la même manière, BCD est un triangle équilatéral donc, comme I est le milieu de $[CD]$, la droite (BI) est la hauteur issue de B du triangle BCD. Ainsi, $(BI)\perp(CD)$.
(CD) est donc orthogonale aux deux droites sécantes (AI) et (BI) du plan (ABI), elle est donc orthogonale au plan (ABI).

2. (CD) est orthogonale au plan (ABI). Elle est donc orthogonale à toute droite du plan (ABI), donc en particulier à la droite (AB).

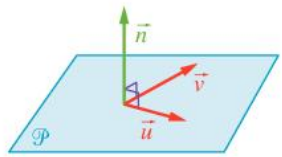
EXERCICE 54 p. 367

3. Vecteur normal, projeté orthogonal

1. Vecteur normal à un plan

Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ s'il est non nul et orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



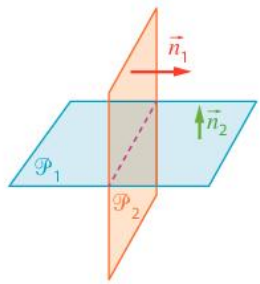
Propriété

DÉMO en ligne

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Définition

Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$. $\mathcal{P}_1$ est **perpendiculaire** à $\mathcal{P}_2$ si $\vec{n}_1$ est orthogonal à $\vec{n}_2$.



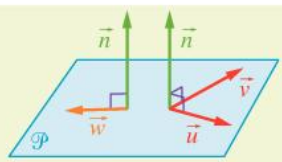
Remarques

- Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est aussi un vecteur normal à ce plan.
- Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, alors ils sont colinéaires entre eux.

Propriétés

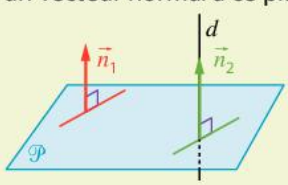
DÉMO en ligne

- Un vecteur est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{P}$.

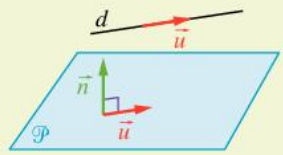


DÉMO p. 353

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

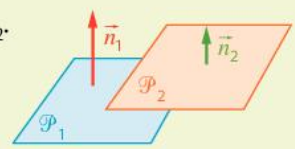


- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.



DÉMO en ligne

- Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$. $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ est colinéaire à $\vec{n}_2$.

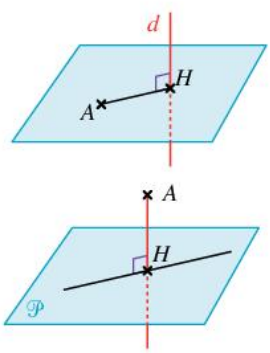


2. Projeté orthogonal d'un point

Propriétés et définitions

DÉMO en ligne

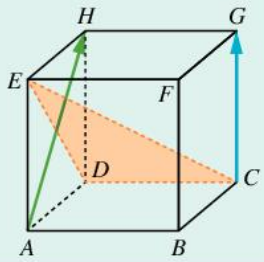
- Soient A un point et d une droite de l'espace. Il existe un unique plan passant par A et orthogonal à d. La droite d est alors sécante avec ce plan et leur point d'intersection est appelé **projeté orthogonal de A sur d.**
- Soient A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors sécant avec cette droite et leur point d'intersection est appelé **projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.**



Méthode 1 Prouver qu'un vecteur est normal à un plan

$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est normal au plan (FGH).
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).



Solution commentée

1. $ABCDEFGH$ est un cube, donc toutes ses faces sont des carrés.
Ainsi, $\overrightarrow{CG}$ est à la fois orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HG}$.
$(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{HG})$ étant une base du plan (FGH) et $\overrightarrow{CG}$ étant un vecteur non nul, $\overrightarrow{CG}$ est un vecteur normal au plan (FGH).

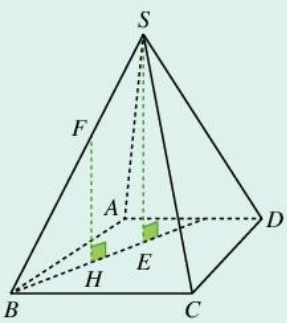
2. $EHDA$ est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires.
Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + 0 = 0$, donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.
Or $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DC})$ est une base du plan (EDC).
De plus, $\overrightarrow{AH}$ est non nul et orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DC}$.
Donc $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).

EXERCICE 18 p. 361

Méthode 2 Prouver qu'un point est le projeté orthogonal d'un point sur un plan

$SABCD$ est un pyramide. E est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC) et F est un point du segment $[SB]$.

- Démontrer que la parallèle d à (SE) passant par F coupe la droite (BE) en un point H qui est le projeté orthogonal de F sur (ABC).



Solution commentée

Comme le point E est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC), la droite (SE) est orthogonale au plan (ABC).
Par conséquent, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
Elle est donc perpendiculaire à la droite (BE) puisqu'elle la coupe en E.
Dans le plan (SBE), les droites d et (SE) sont parallèles.
Toujours dans le plan (SBE), comme la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (SE), elle est également perpendiculaire à la droite d. Elle la coupe donc en un point H.
Par définition du projeté orthogonal, $\overrightarrow{SE}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
Comme $\overrightarrow{FH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{SE}$, c'est également un vecteur normal au plan (ABC).
Donc la droite (FH) est orthogonale au plan (ABC).
Ainsi, le point H, intersection de d et de (BE), appartient au plan (ABC) et la droite (FH) est orthogonale au plan (ABC).
Le point H est donc bien le projeté orthogonal du point F sur le plan (ABC).

EXERCICE 19 p. 361

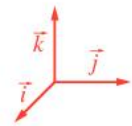
4. Calculs de distances

1. Calculs dans une base et un repère orthonormés de l'espace

Définition

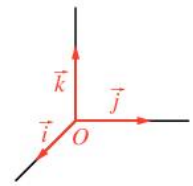
Une **base orthonormée** de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.
Autrement dit, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée signifie que :

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$



Définition

Un **repère orthonormé** $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée.



Propriété

DÉMO p. 343

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Corollaire

DÉMO en ligne

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux points $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. On a alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

2. Propriétés

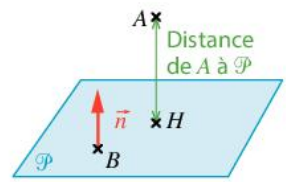
Propriétés et définition

DÉMO p. 353

Soient A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan passant par un point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

- Le projeté orthogonal H de A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de A.
- La distance AH est appelée **distance du point A au plan $\mathcal{P}$**, et on a :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$



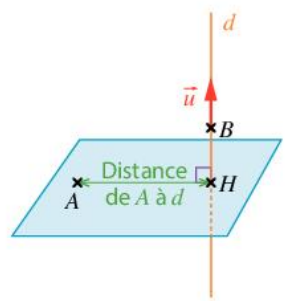
Propriétés et définition

DÉMO en ligne

Soient A un point de l'espace et d une droite de l'espace passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Le projeté orthogonal H de A sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de A.
- La distance AH est appelée **distance du point A à la droite d**, et on a :

$$AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \right\|.$$



Méthode 1 Calculer dans une base et un repère orthonormés de l'espace

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

1 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\14\\2\end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 On considère les points $A(4\,;-2\,;0)$, $B(6\,;4\,;-2)$ et $C(12\,;6\,;0)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Solution commentée

1 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times4 - 1\times14 + 3\times2 = 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 $AB = \sqrt{(6-4)^2+(4-(-2))^2+(-2+0)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$AC = \sqrt{(12-4)^2+(6-(-2))^2+(0-0)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

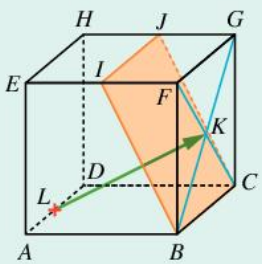
$BC = \sqrt{(12-6)^2+(6-4)^2+(0-(-2))^2} = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$AB = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

EXERCICE 23 p. 362

Méthode 2 Calculer la distance d'un point à un plan

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. On note L, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$.



1 Citer une base orthonormée de l'espace en utilisant des points de la figure.

2 Citer deux repères orthonormés de l'espace en utilisant des points de la figure.

3 On se place dans le repère de l'espace $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{LK}$ est normal au plan (IJB).

b. En déduire la distance du point L au plan (IJB).

Solution commentée

1 Par exemple $(\vec{DA},\vec{DC},\vec{DH})$.

2 Par exemple $(D\,;\vec{DA},\vec{DC},\vec{DH})$ ou $(B\,;\vec{BC},\vec{BA},\vec{BF})$.

3 **a.** Dans ce repère, on a $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(1\,;0\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$ et $G(1\,;1\,;1)$.

Ainsi : $I\left(\frac{0+1}{2}\,;\frac{0+0}{2}\,;\frac{1+1}{2}\right)$, soit $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$. De la même manière, $J\left(\frac{1}{2}\,;1\,;1\right)$ et $L\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

K, centre du carré $BCGF$, est donc le milieu de $[BG]$: $K\left(\frac{1+1}{2}\,;\frac{0+1}{2}\,;\frac{0+1}{2}\right)$, soit $K\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

D'où $\vec{LK}\begin{pmatrix}1-0\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix}$, soit $\vec{LK}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\1-0\\1-1\end{pmatrix}$, soit $\vec{IJ}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{IB}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\0-0\\0-1\end{pmatrix}$, soit $\vec{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{LK}\cdot\vec{IJ} = 1\times0+0\times1+\frac{1}{2}\times0 = 0$ et $\vec{LK}\cdot\vec{IB} = 1\times\frac{1}{2}+0\times0+\frac{1}{2}\times(-1) = 0$, donc $\vec{LK}$ est orthogonal à la fois à $\vec{IJ}$ et $\vec{IB}$. Or $(\vec{IJ},\vec{IB})$ est une base de (IJB), donc $\vec{LK}$, non nul, est normal au plan (IJB).

b. Soit M le projeté orthogonal du point L sur le plan (IJB). La distance du point L au plan (IJB) vaut :

$LM = \dfrac{|\vec{LB}\cdot\vec{LK}|}{\|\vec{LK}\|}$. Or $\vec{LB}\begin{pmatrix}1-0\\0-\frac{1}{2}\\0-0\end{pmatrix}$, soit $\vec{LB}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. D'où $LM = \dfrac{\left|1\times1-\frac{1}{2}\times0+0\times\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

EXERCICE 29 p. 363

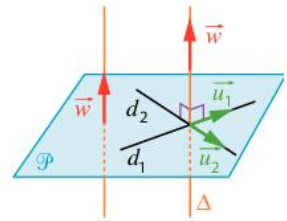
Comprendre une démonstration

On présente les démonstrations des propriétés suivantes. Les lire attentivement puis répondre aux questions posées.

- (P_1) Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite du plan.
- (P_2) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

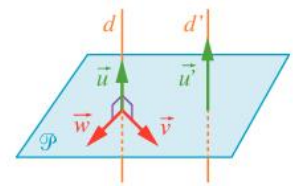
Démonstration

• Propriété (P_1)



Soit Δ une droite orthogonale à un plan $\mathcal{P}$.
Par définition, il existe alors deux droites d_1 et d_2 sécantes de ce plan orthogonales à Δ.
Soit $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2.
Comme d_1 et d_2 sont sécantes, les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.
Ainsi, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de $\mathcal{P}$.
Soit d une droite quelconque du plan $\mathcal{P}$ et soit $\vec{t}$ un vecteur directeur de cette droite.
Il existe alors un couple unique de réels $(\alpha\,;\beta)$ tel que $\vec{t} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ. On a alors $\vec{w}\cdot\vec{t} = \vec{w}\cdot(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = 0$. (1)
Donc les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont orthogonaux et, par suite, la droite Δ est orthogonale à la droite d.
On peut donc en conclure que Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.

• Propriété (P_2)



Soient d et d' deux droites parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{v}, \vec{w})$ orthogonal à d.
d est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$.
d et d' sont parallèles, donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.
Il existe ainsi un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{u'}$ ou $\vec{u'} = k\vec{u}$.
• *Premier cas* : $\vec{u} = k\vec{u'}$.
Si $k = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$, ce qui est impossible. Donc $k \neq 0$. (2)
De plus, comme $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$, $k\vec{u'}\cdot\vec{v} = k\vec{u'}\cdot\vec{w} = 0$, donc $\vec{u'}\cdot\vec{v} = \vec{u'}\cdot\vec{w} = 0$.
• *Second cas* : $\vec{u'} = k\vec{u}$.
On démontre de même que $\vec{u'}\cdot\vec{v} = \vec{u'}\cdot\vec{w} = 0$.
Ainsi, dans tous les cas, on a $\vec{u'}\cdot\vec{v} = \vec{u'}\cdot\vec{w} = 0$.
Le vecteur $\vec{u'}$ est donc orthogonal à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.
La droite d' est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

1 **Propriété (P_1)**

a. Justifier l'existence d'un couple $(\alpha\,;\beta)$ tel que $\vec{t} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$.

b. Détailler le calcul pour prouver que $\vec{w}\cdot(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2) = 0$ à la ligne (1) en précisant les propriétés utilisées.

2 **Propriété (P_2)**

a. Expliquer pourquoi, à la ligne (2), $\vec{u}$ ne peut pas être égal au vecteur nul.

b. Pourquoi était-il nécessaire de démontrer que $k \neq 0$?

c. Détailler l'étude du second cas.

Rédiger une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{u}$ et A un point de l'espace.
Le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$ est le point du plan $\mathscr{P}$ le plus proche de A.

Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ distinct du point H.
En utilisant les indications suivantes, démontrer cette propriété.

- On suppose que le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

En se plaçant dans le plan (AMH), montrer que $AM > AH$.

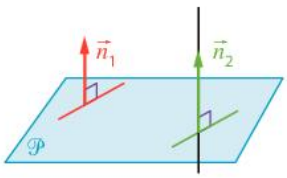
- On suppose que le point A appartient au plan $\mathscr{P}$.

Expliquer pourquoi les points A et H sont confondus. En déduire que $AM > AH$.

- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 En raisonnant par double implication, démontrer la propriété suivante.
« Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan. »



2 Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu du segment $[AB]$.

- En raisonnant par équivalences, démontrer que pour tout point M de l'espace :

$$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

3 On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
On considère la droite d passant par $A(-1\,;2\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

- Soit $M(4\,;3\,;5)$. Montrer que le point $H(1\,;2\,;8)$ n'est pas le projeté orthogonal du point M sur la droite d.

Démontrer une équivalence

Pour démontrer que deux propriétés A et B sont équivalentes $(A \Leftrightarrow B)$, on peut :

- soit raisonner par double implication. On démontre alors les deux implications suivantes :
  – si A est vraie, alors B est vraie $(A \Rightarrow B)$;
  – si B est vraie, alors A est vraie $(B \Rightarrow A)$.
- soit raisonner par équivalences. On montre alors que A est équivalente à B, en utilisant uniquement des équivalences tout au long du raisonnement.

Raisonner par l'absurde

- On suppose que le contraire de ce que l'on veut démontrer est vrai.
- On utilise cette hypothèse, ainsi que des définitions et/ou des propriétés du cours pour faire des déductions jusqu'à arriver à une absurdité.
- La supposition de départ conduisant à une absurdité, elle ne peut être que fausse, donc son contraire est vrai.

Carte mentale

Orthogonalité et distances dans l'espace

Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=0$.

Caractériser l'orthogonalité de deux droites

Avec des vecteurs directeurs

- d et d' sont **orthogonales** si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
- Si deux droites sont **perpendiculaires**, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse car deux droites orthogonales ne sont pas toujours coplanaires.

Caractériser l'orthogonalité d'un plan et d'une droite

Avec des vecteurs directeurs

- La droite d de vecteur directeur $\vec{w}$ et le plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u},\vec{v})$ sont **orthogonaux** si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Avec un vecteur normal

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u},\vec{v})$ s'il est non nul et orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Une droite est **orthogonale** à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

Caractériser le parallélisme d'une droite et d'un plan

Une droite est **parallèle** à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.

Caractériser le parallélisme de deux plans

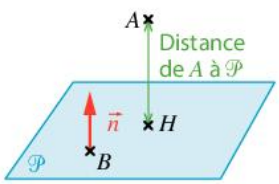
- Un plan $\mathcal{P}_1$ de vecteur normal $\vec{n}_1$ est **parallèle** à un plan $\mathcal{P}_2$ de vecteur normal $\vec{n}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

Calculer des distances

- H est le **projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$** et la distance de A à $\mathcal{P}$ est :

$$AH=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

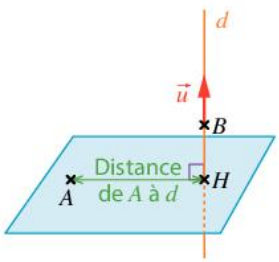
où $B\in\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.



- H est le **projeté orthogonal de A sur d** et la distance de A à d est :

$$AH=\left\|\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right\|,$$

où $B\in d$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.



Calculer dans une base et un repère orthonormés

- $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une **base orthonormée** signifie que :

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0 \text{ et } \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1.$$

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est alors un **repère orthonormé** de l'espace.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$.

- **Produit scalaire :** $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.
- **Norme :** $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification. Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Dans une base orthonormée de l'espace, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\0\\-10\end{pmatrix}$. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :

(a) -14 (b) -50 (c) 0

2 Dans une base orthonormée de l'espace, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-8\\-11\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

(a) sont colinéaires.
(b) sont orthogonaux.
(c) ne sont ni colinéaires ni orthogonaux.

3 Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont orthogonaux. La droite d' est orthogonale à la droite d.
Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d' :

(a) sont orthogonaux.
(b) sont parallèles.
(c) ne sont ni parallèles ni orthogonaux.

4 Dans une base orthonormée de l'espace, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ vaut :

(a) 6 (b) $\sqrt{14}$ (c) 14.

5 Un plan $\mathcal{P}$ a pour base $(\vec{u}, \vec{v})$ et une droite d a pour vecteur directeur $4\vec{u} - 5\vec{v}$.
Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d :

(a) sont orthogonaux.
(b) sont parallèles.
(c) ne sont ni parallèles ni orthogonaux.

6 Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$.
Une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ est :

(a) orthogonale à toute droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
(b) orthogonale à tout plan orthogonal au plan $\mathcal{P}$.
(c) orthogonale à tout plan parallèle au plan $\mathcal{P}$.

7 Dans une base orthonormée de l'espace, on donne :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}-10\\-5\\2\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs d'un plan $\mathcal{P}$ et le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur directeur d'une droite d.
Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d :

(a) sont orthogonaux.
(b) sont parallèles.
(c) ne sont ni parallèles ni orthogonaux.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 Tout vecteur normal à un plan qui est lui-même parallèle à une droite est un vecteur directeur de cette droite.

2 Dans l'espace, le projeté orthogonal d'un point A sur une droite est le point de cette droite le plus proche de A.

3 Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

4 On considère une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{v}, \vec{w})$.
Si d est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, alors il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

5 Si une droite d est orthogonale à deux droites d'un plan $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.

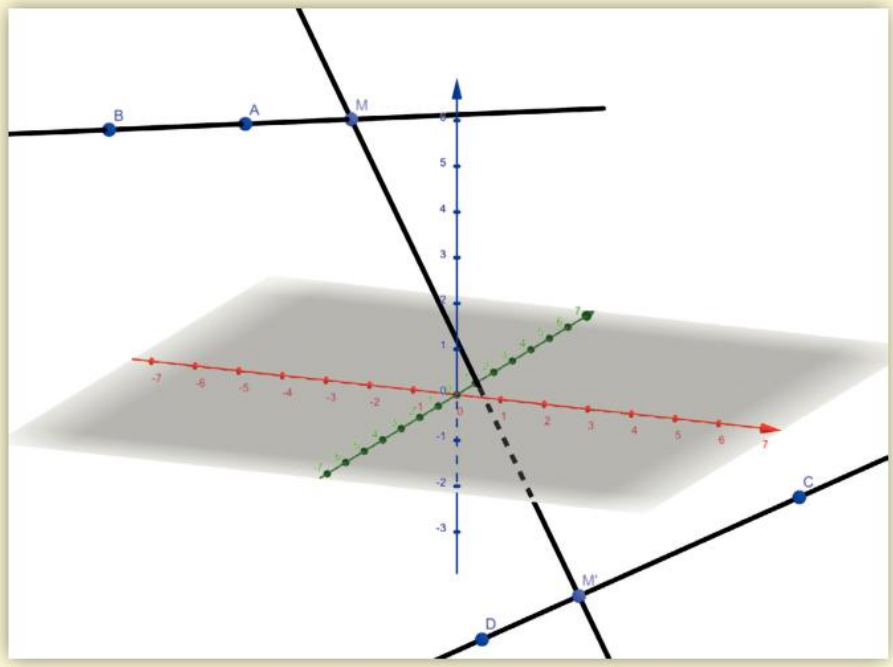
6 Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles.

TP 1 Distance entre deux droites LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Utiliser un logiciel de géométrie pour découvrir la notion de distance entre deux droites.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
$A(-4 ; -2 ; 6)$, $B(-5 ; -7 ; 7)$, $C(7 ; 2 ; -2)$ et $D(1 ; -1 ; -5)$.
Le problème consiste à montrer qu'il existe une droite de l'espace à la fois perpendiculaire à la droite (AB) et à la droite (CD).

1. **a.** Avec un logiciel de géométrie 3D, conjecturer la réponse à la question : « De A ou B, quel est le point le plus proche de la droite (CD) ? ».
   b. Prouver cette conjecture.
2. **a.** Placer un point M sur la droite (AB) et conjecturer avec le logiciel les coordonnées du point M qui minimisent la distance du point M à la droite (CD). On note H le point correspondant à ce minimum conjecturé.
   b. Placer un point M' sur la droite (CD) et conjecturer de même les coordonnées du point M' qui minimisent la distance du point M' à la droite (AB). On note H' le point correspondant à ce minimum conjecturé.



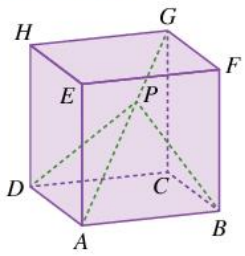
   c. D'après les différentes vues 3D de la figure, quelle semble être la position de la droite (HH') par rapport aux droites (AB) et (CD) ?
3. **a.** Vérifier par le calcul que le point H défini par les coordonnées trouvées à la question **2.a** appartient bien à la droite (AB), puis qu'il en est de même pour le point H' de la question **2.b** par rapport à la droite (CD).
   b. Prouver que la droite (HH') peut être qualifiée de « perpendiculaire commune » aux droites (AB) et (AC).
4. La distance HH' est appelée « distance entre les droites (AB) et (CD) ». Comparer sa valeur réelle à celle conjecturée avec le logiciel.
5. **a.** De manière plus générale, tracer deux droites quelconques grâce au logiciel.
   b. Semble-t-il vrai que ces deux droites ont toujours une perpendiculaire commune ? Discuter selon la position relative de ces deux droites.

TP 2 Variations d'un angle et de l'aire d'un triangle

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectifs
Conjecturer et étudier les variations d'un angle et de l'aire d'un triangle.

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. On considère un point P sur le segment $[AG]$.
On s'intéresse aux questions suivantes.
• Q_1 : « Lorsque P se déplace sur le segment $[AG]$, la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BPD}$ varie-t-elle et quelles sont ses variations éventuelles ? »
• Q_2 : « Lorsque P se déplace sur le segment $[AG]$, l'aire du triangle BPD varie-t-elle et quelles sont ses variations éventuelles ? »



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique 3D, conjecturer une réponse à la question Q_1. Quelles semblent être les valeurs maximale et minimale de la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{BPD}$?
2. À l'aide du logiciel, conjecturer une réponse à la question Q_2. Quelle semble être la valeur de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BPD}$ lorsque P est dans la position qui minimise l'aire du triangle BPD ?
3. Afin de valider ou d'invalider les conjectures précédentes, on se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, G, B et D dans ce repère.

b. Justifier qu'il existe un réel $k \in [0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AG}$, puis déterminer les coordonnées de P en fonction de k.

c. En déduire que, quelle que soit la position de P, on a $PD = PB$.

d. En calculant un produit scalaire, prouver que, quel que soit $k \in [0 ; 1]$:

$$\cos\left(\widehat{BPD}\right) = \frac{3k^2 - 2k}{3k^2 - 2k + 1}.$$

e. En déduire le tableau de variation de la fonction f, définie sur $[0 ; 1]$ par $f : k \mapsto \cos\left(\widehat{BPD}\right)$.

f. Valider ou invalider alors les conjectures émises concernant la réponse à la question Q_1.

g. Déterminer en fonction de k la distance du point P à la droite (BD).

h. Valider ou invalider alors les conjectures émises concernant la réponse à la question Q_2.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie dynamique

- Dans le menu « Affichage », on peut afficher un graphique 3D.
- Dans la barre d'outils :

on peut faire apparaître un repère , ainsi que différentes vues de la figure
ou griser un plan .

- Comme en 2D, les différents menus permettent de définir des points, des droites, des distances ou des angles.
- On peut aussi définir des points par leurs coordonnées directement dans la barre de saisie.
- On peut définir des plans ou utiliser des objets prédéfinis :

Vers le grand oral

Calcul mental

1 Dans une base orthonormée de l'espace, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2 Dans une base orthonormée de l'espace, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\\-5\end{pmatrix}$. Calculer $\|\vec{u}\|$.

3 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants, dont les coordonnées sont données dans une base orthonormée de l'espace, sont-ils orthogonaux ?

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-25\\0\\67\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\32\\0\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}25\\2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\50\\18\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}25\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\37\\-25\end{pmatrix}$

4 Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(5\,;\,6\,;\,-2)$ et $B(2\,;\,5\,;\,-2)$.

- Calculer AB.

5 On considère une base orthonormée de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$.

- Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est-il normal au plan $\mathcal{P}$?

6 On considère un repère orthonormé de l'espace. Soient d la droite passant par $A(1\,;-7\,;\,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$ et d' la droite passant par $B(0\,;\,3\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\2\\2\end{pmatrix}$.

- Les droites d et d' sont-elles orthogonales ?

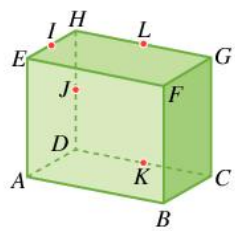
7 A, B et C sont trois points de l'espace tels que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

- Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

8 On considère le parallélépipède rectangle ci-contre. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[DH]$, $[DC]$ et $[HG]$.



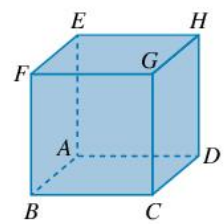
1. Que peut-on dire des droites (IJ) et (FC) ?
2. Que peut-on dire des droites (LI) et (AE) ?
3. Que peut-on dire de la droite (LK) et du plan (BAF) ?
4. Que peut-on dire de la droite (FG) et du plan (LJK) ?

9 La figure est celle de l'exercice 8.

1. Citer deux vecteurs orthogonaux.
2. Citer deux droites orthogonales mais non perpendiculaires.
3. Citer deux droites perpendiculaires.
4. Citer une droite et un plan orthogonaux.

10 $ABCDEFGH$ est un cube. Quel est l'intrus parmi les produits scalaires suivants ?

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GC}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{EA}$



11 VRAI OU FAUX

Dire si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant chaque réponse.

1. Dans l'espace, si deux droites sont orthogonales, alors elles sont coplanaires.
2. Dans l'espace, si deux droites sont coplanaires, alors elles sont perpendiculaires.
3. Dans l'espace, si deux droites sont orthogonales, alors elles sont perpendiculaires.
4. Dans l'espace, si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont coplanaires.

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur.
   • Tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
2. Dans un cube de côté a, la pyramide qui a pour sommet le centre d'une face et pour base la face opposée a pour volume la moitié du volume de ce cube.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, Louise veut définir un tétraèdre régulier (c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont de même longueur) et calculer son volume. Elle a d'abord trouvé trois sommets $A(2\,;0\,;0)$, $B\left(-1\,;\sqrt{3}\,;0\right)$ et $C\left(-1\,;-\sqrt{3}\,;0\right)$ et elle pense qu'ils forment un triangle équilatéral dont les hauteurs sont concourantes en l'origine du repère. Elle pense qu'il faut alors prendre le quatrième sommet D sur la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$.

• Aider Louise à vérifier et à achever son travail afin d'atteindre ses objectifs.

Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

On veut déterminer un vecteur normal à un plan donné de l'espace.

1. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(2\,;-1;1)$, $B(1;3;0)$ et $C(2\,;5\,;-1)$.

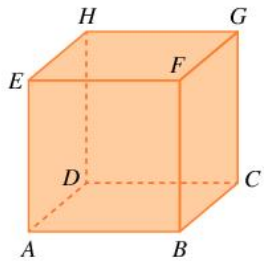
Démontrer que A, B et C définissent un plan et que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

2. Plus généralement, à partir de trois points R, S et T non alignés, proposer une méthode permettant de déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (RST) (on pourra commencer par traiter des cas particuliers). Illustrer le fait qu'un tel vecteur n'est pas unique.

3. Rechercher des informations sur la notion de produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace. Expliquer le lien avec la notion de vecteur normal à un plan. Quelles applications cette notion a-t-elle dans d'autres disciplines ?

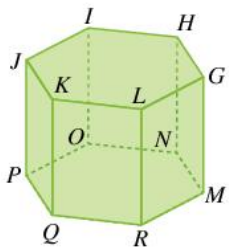
Produit scalaire dans l'espace

1 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 5 ci-contre.
Calculer les produits scalaires suivants.



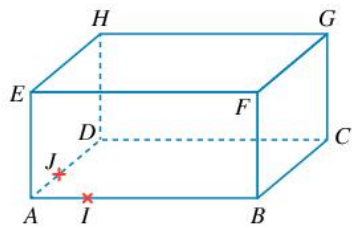
1. $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$ 2. $\vec{AE}\cdot\vec{DC}$
3. $\vec{AD}\cdot\vec{AC}$ 4. $\vec{BF}\cdot\vec{CG}$
5. $\vec{EH}\cdot\vec{BC}$ 6. $\vec{AB}\cdot\vec{EG}$

2 On considère le prisme droit $GHIJKLMNOPQR$ dont les faces du dessus et du dessous sont deux hexagones réguliers.
Citer :



a. trois vecteurs coplanaires ;
b. deux couples de vecteurs orthogonaux ;
c. deux vecteurs colinéaires mais non égaux ;
d. trois vecteurs non coplanaires ;
e. un couple de vecteurs non orthogonaux.

3 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 8$, $AD = 5$ et $AE = 3$.



Les points I et J sont définis par les relations :

$$\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} \text{ et } \vec{AJ} = \frac{2}{5}\vec{AD}.$$

Calculer les produits scalaires suivants.

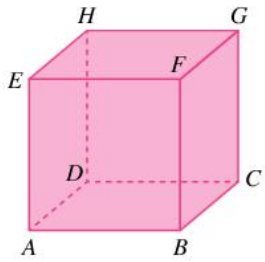
1. $\vec{AI}\cdot\vec{AB}$ 2. $\vec{AB}\cdot\vec{DH}$
3. $\vec{EH}\cdot\vec{CB}$ 4. $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$
5. $\vec{AJ}\cdot\vec{EF}$ 6. $\vec{BI}\cdot\vec{BD}$

4 On considère la figure de l'exercice précédent.
• Calculer le produit scalaire $\vec{JI}\cdot\vec{JC}$ de deux manières différentes et en déduire une mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{IJC}$.

5 Dans l'espace, on considère trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ orthogonaux deux à deux et de norme 1.
Parmi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants, déterminer les couples de vecteurs orthogonaux.

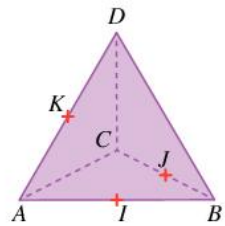
• $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$ • $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$ • $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$

6 **Calculer**
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a ci-contre. Calculer les produits scalaires suivants.



1. $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ 2. $\vec{BA}\cdot\vec{CG}$
3. $\vec{EH}\cdot\vec{FG}$ 4. $\vec{AD}\cdot\vec{GF}$
5. $\vec{EA}\cdot\vec{EG}$ 6. $\vec{AD}\cdot\vec{EG}$

7 $ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a, ce qui signifie que ses quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.



Calculer les produits scalaires suivants.

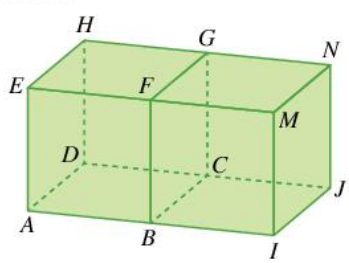
1. $\vec{DA}\cdot\vec{DB}$ 2. $\vec{AK}\cdot\vec{DI}$
3. $\vec{IK}\cdot\vec{AC}$ 4. $\vec{JK}\cdot\vec{AD}$

8 **Calculer**
On considère deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$.
• Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

9 **Calculer**
On considère deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 6$.
• Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

10 **Calculer**
On considère deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 3$.
• Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

11 $AIJDEMNH$ est un pavé droit composé de deux cubes accolés de côté a.



Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ 2. $\vec{BA}\cdot\vec{BI}$ 3. $\vec{EF}\cdot\vec{HN}$
4. $\vec{HF}\cdot\vec{EG}$ 5. $\vec{EN}\cdot\vec{EF}$ 6. $\vec{AJ}\cdot\vec{CD}$
7. $\vec{AN}\cdot\vec{AJ}$ 8. $\vec{CF}\cdot\vec{AH}$ 9. $\vec{MA}\cdot\vec{CD}$

Orthogonalité dans l'espace

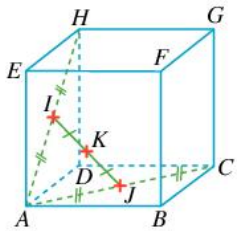
12 QCM

On considère l'affirmation suivante, dont une partie a été omise.
« Dans l'espace, si une droite est perpendiculaire à ..., alors elle est orthogonale à ce plan. »
Choisir, parmi les expressions suivantes, celle ou celles qui rendent l'affirmation précédente vraie.

a une droite d'un plan
b toute droite d'un plan
c deux droites parallèles à un plan
d deux droites sécantes d'un plan

13 **Représenter**

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.

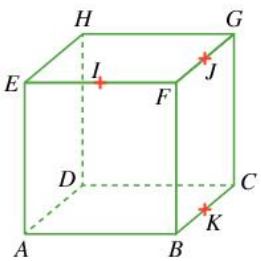


1. Conjecturer la position relative des droites suivantes, puis recopier et compléter le tableau suivant en cochant les cases appropriées.

Droites	Coplanaires	Sécantes	Parallèles	Orthogonales
(AJ) et (AK)				
(IH) et (GA)				
(FK) et (AD)				
(HC) et (IJ)				
(AJ) et (EA)				

2. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Vérifier la cohérence des conjectures émises à l'aide d'un logiciel de géométrie.

14 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[FG]$ et $[BC]$.



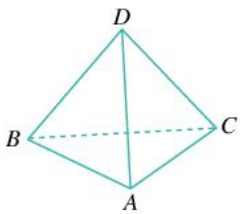
1. Citer deux droites perpendiculaires.
2. Citer deux droites orthogonales mais non perpendiculaires.
3. Citer une droite et un plan orthogonaux entre eux.
4. Justifier que les droites (JK) et (AD) sont orthogonales.
5. Prouver que la droite (GF) est orthogonale au plan (ABI).
6. Citer une autre droite orthogonale au plan (ABI).

15 VRAI OU FAUX **Raisonner**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse (on ne demande pas de justification).
1. Si une droite est orthogonale à une droite d'un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
2. Si deux droites sont orthogonales, alors tout plan orthogonal à l'une est parallèle à l'autre.
3. Si une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, alors toute droite orthogonale à $\mathcal{P}$ est orthogonale à d.
4. Si une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, alors tout plan orthogonal à d est parallèle à $\mathcal{P}$.

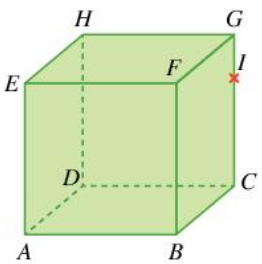
16 On considère un cube $ABCDEFGH$.
1. Justifier que la droite (FH) est perpendiculaire à la droite (EG).
2. a. Démontrer que $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.
b. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier que la droite (FH) est orthogonale au plan (EGC).

17 $ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux).
• Démontrer que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.



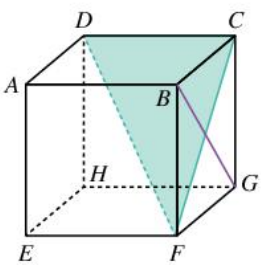
Vecteur normal à un plan, projeté orthogonal

18 Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, I est un point quelconque de l'arête $[CG]$, distinct de G.



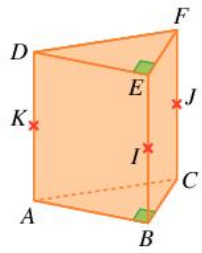
1. Citer un vecteur normal au plan (ABC).
2. Le vecteur $\overrightarrow{EH}$ est-il un vecteur normal au plan (GCD) ? Justifier.
3. Le vecteur $\overrightarrow{IF}$ est-il un vecteur normal au plan (GCH) ? Justifier.
4. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est-il un vecteur normal au plan (GCA) ? Justifier.

19 $ABCDEFGH$ est un cube.



1. Justifier que la droite (BG) est orthogonale à la droite (FC).
2. Démontrer que la droite (BG) est orthogonale à la droite (CD).
3. En déduire un vecteur normal au plan (FDC).
4. Démontrer que le projeté orthogonal du point B sur le plan (FDC) est le milieu du segment $[CF]$.

20 $ABCDEF$ est un prisme droit qui a pour bases les triangles DEF et ABC respectivement rectangles en E et B.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[EB]$, $[FC]$ et $[DA]$.

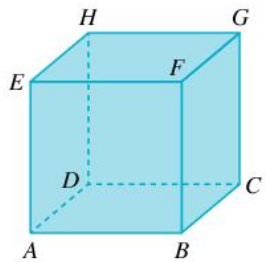


• Recopier et compléter le tableau suivant, sans justifier.

Le projeté orthogonal de…	sur…	est…
K	le plan (ABC)	
C	le plan (DEF)	
A	la droite (BC)	
J	la droite (DA)	
F	le plan (DAB)	
	la droite (CF)	J
K		I
	la droite (EB)	I

Bases et repères orthonormés

21 QCM On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 5 ci-contre.



1. Parmi les triplets de vecteurs suivants, le ou lesquels forment une base orthonormée de l'espace ?

ⓐ $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})$

ⓑ $\left(\frac{1}{5}\vec{FG}, \frac{1}{5}\vec{FE}, \frac{1}{5}\vec{GC}\right)$

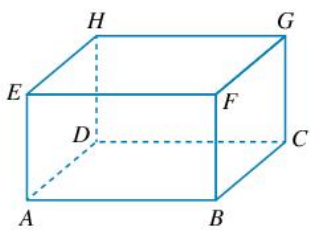
ⓒ $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ ⓓ $(\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC})$

2. Parmi les quadruplets suivants, le ou lesquels constituent un repère orthonormé de l'espace ?

ⓐ $\left(H ; \frac{1}{5}\vec{FG}, \frac{1}{5}\vec{AB}, \frac{1}{5}\vec{DH}\right)$ ⓑ $(A ; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})$

ⓒ $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ ⓓ $\left(C ; \frac{1}{5}\vec{EF}, \frac{1}{5}\vec{HD}, \frac{1}{5}\vec{AD}\right)$

22 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 5$, $AE = 3$ et $AD = 4$.



1. À l'aide des points de cette figure, citer trois bases orthonormées.
2. À l'aide des points de cette figure, citer trois repères orthonormés.

23 **Calculer**
On se place dans une base orthonormée de l'espace.
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3,5\\2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5,5\\-3\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{15}{7}\\-\frac{12}{11}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{14}{3}\\-\frac{22}{4}\end{pmatrix}$

24 **Calculer**
On se place dans une base orthonormée de l'espace.
Calculer $\|\vec{u}\|$ dans chacun des cas suivants.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-9\\15\end{pmatrix}$ 2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ 3. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\-5\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{pmatrix}$

25 **Calculer**
On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
Calculer AB dans chacun des cas suivants.

1. $A(5,5 ; -6,3 ; -4,3)$ et $B(2,5 ; 2,7 ; -0,7)$.
2. $A\left(\frac{1}{4} ; -\frac{3}{2} ; \frac{5}{9}\right)$ et $B\left(\frac{3}{4} ; \frac{5}{2} ; -\frac{4}{9}\right)$.

26 On se place dans une base orthonormée de l'espace.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}14\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix}$ 2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-18\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\32\\8\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}19\\27\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\4\\13\end{pmatrix}$ 4. $\vec{u}\begin{pmatrix}34\\2\\-12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\33\\-3\end{pmatrix}$

27 On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
Dans chaque cas, déterminer si le vecteur $\vec{w}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-7\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-11\\-78\\-60\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-3\\13\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-1\\\frac{8}{7}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\\-\frac{7}{4}\end{pmatrix}$

28 On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soient d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$. Dans chaque cas, déterminer si les droites d et d' sont orthogonales.

1. $A(13\,;-6\,;1)$, $B(3\,;4\,;-7)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

2. $A(-5\,;23\,;7)$, $B(1\,;9\,;4)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$

3. $A(11\,;2\,;-3)$, $B(-3\,;2\,;5)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}3\\0{,}4\end{pmatrix}$

29 On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(3\,;5\,;-4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\21\\20\end{pmatrix}$.

• Quelle est la distance du point $B(1\,;5\,;2)$ au plan $\mathscr{P}$?

30 **Représenter**

$MNPQRSTU$ est un cube de côté 5. A et B sont les centres respectifs des faces $MNPQ$ et $RSTU$.

1. Justifier que $\left(M\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{MN},\frac{1}{5}\overrightarrow{MQ},\frac{1}{5}\overrightarrow{MR}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

2. a. Donner, dans ce repère, les coordonnées des sommets du cube.

b. Calculer, dans ce repère, les coordonnées des points A et B.

3. a. Montrer que la droite (AB) est à la fois orthogonale aux droites (MN) et (NP).

b. Que peut-on en déduire quant à la droite (AB) ?

4. Déterminer la distance du point A au plan (MNP).

31 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $M(5\,;2\,;3)$, $N(1\,;2\,;-1)$ et $P(-3\,;2\,;3)$.

1. Calculer les longueurs MN, MP et NP.

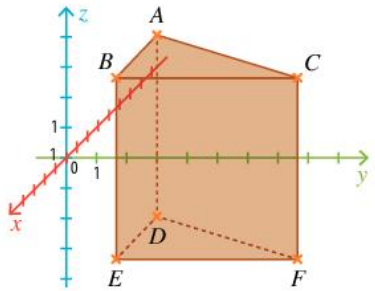
2. En déduire la nature du triangle MNP.

3. Déterminer la distance du point N à la droite (MP).

32 On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soit d la droite passant par $A(2\,;-5\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

• Quelle est la distance du point $B(-1\,;2\,;-4)$ à la droite d ?

33 On se place dans un repère orthonormé de l'espace, et on considère les points $A(-7\,;2\,;3)$, $B(1\,;2\,;3)$, $C(1\,;8\,;3)$, $D(-7\,;2\,;-3)$, $E(1\,;2\,;-3)$ et $F(1\,;8\,;-3)$.



1. Calculer les longueurs AB, AC et BC et en déduire la nature du triangle ABC.

2. On considère la translation t de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}$.

a. Montrer que les images respectives des points A, B et C par cette translation sont les points D, E et F.

b. Montrer que l'angle $\widehat{BCF}$ est un angle droit.

c. Que peut-on en déduire concernant la nature du solide $ABCDEF$?

3. a. Justifier que la droite (CF) est orthogonale à la fois aux droites (CA) et (CB).

b. Que peut-on en déduire pour la droite (CF) par rapport au plan (ABC) ?

c. Que peut-on en déduire pour la droite (CF) par rapport à la droite (AB) ?

34 $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AE]$ et $[BC]$.

1. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

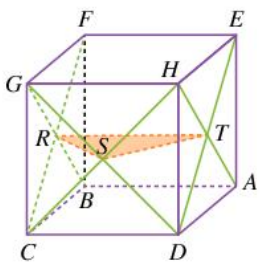
2. a. Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets du cube puis calculer les coordonnées des points I et J.

b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$.

3. Exprimer d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$ et en déduire un arrondi, au degré près, de la mesure de l'angle $\widehat{IHJ}$.

35 $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. R, S et T sont les centres respectifs des faces $FGCB$, $GHDC$ et $ADHE$.

1. Justifier que $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ est un repère orthonormé de l'espace.



2. Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets du cube, puis calculer les coordonnées des points R, S et T.

3. a. Calculer les longueurs RS, RT et ST.

b. En déduire la nature du triangle RST.

c. En calculant $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{ST}$ de deux façons différentes, déterminer les angles du triangle RST.

36 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(5\,;-1\,;-9)$, $B(7\,;3\,;-7)$, $C(9\,;13\,;19)$ $D(11\,;15\,;13)$ et $E(15\,;19\,;1)$.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

2. a. Montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

b. Que peut-on en déduire pour le point E ?

3. a. Montrer que $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

b. Que peut-on en déduire pour le point E ?

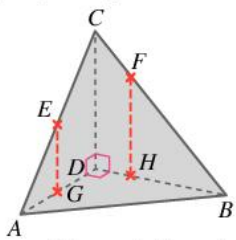
4. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

37 Soient R, S, T et U quatre points de l'espace.

• Montrer que $RS^2 + TU^2 - ST^2 - UR^2 = 2\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{US}$.

38 On considère le tétraèdre ci-dessous, dont les faces ADC, ADB et CDB sont des triangles rectangles isocèles en D.

Les points E, F, G et H appartiennent respectivement aux arêtes $[AC]$, $[BC]$, $[AD]$ et $[BD]$ et sont tels que les droites (EG) et (FH) sont parallèles à la droite (CD).



1. Déterminer les positions relatives des droites et plans suivants.

a. (AD) et (DBC).

b. (AB) et (ADC).

c. (CB) et (CDB).

2. Justifier l'orthogonalité des droites suivantes.

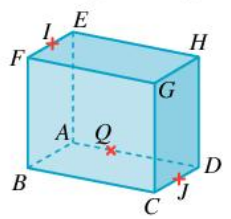
a. (AG) et (FH).

b. (EG) et (AB).

c. (CD) et (GH).

39 **Raisonner**

On considère le parallélépipède rectangle ci-dessous tel que $AB = 2$, $AD = 4$ et $AE = 3$.



Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[FE]$ et $[CD]$. Le point Q appartient au segment $[AD]$ et est tel que $AQ = 0{,}25AD$.

1. Calculer $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

2. Calculer $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{IB}$.

3. Démontrer que les droites (IJ) et (FE) sont orthogonales.

4. Quel est le projeté orthogonal de I sur la droite (CD) ? Justifier.

40 ALGO

On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

• Écrire un algorithme en langage naturel qui, à partir des coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, détermine si ceux-ci sont orthogonaux.

41 **Raisonner**

On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

Soient $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $R(1\,;0\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ et A le point de coordonnées $(-1\,;2\,;1)$.

L'objectif est de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Réaliser une figure sur un logiciel de géométrie 3D. Placer le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ et conjecturer ses coordonnées.

2. On considère le point B dont les coordonnées sont celles conjecturées à la question 1.

a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

b. Que peut-on en déduire pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au plan $\mathscr{P}$?

c. Calculer $\overrightarrow{RB}\cdot\vec{n}$.

d. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la droite (RB) par rapport au plan $\mathscr{P}$?

e. Que peut-on finalement en déduire pour le point B ?

f. La conjecture émise à la question 1 est-elle vérifiée ?

42 **Raisonner, calculer**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1\,;-1\,;1)$, $B(-2\,;1\,;8)$ et $C(7\,;3\,;3)$.

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. On nomme $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (avec a, b et c réels) un vecteur normal au plan (ABC).

a. Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ vérifient le système : $\begin{cases}-3a+2b+7c=0\\6a+4b+2c=0\end{cases}$

b. Montrer que ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases}a=c\\b=-2c\end{cases}$$

c. Donner trois vecteurs normaux au plan (ABC).

d. Comment peut-on écrire de manière générale les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) ?

43 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(17\,;12\,;15)$, $B(11\,;-8,9)$ et $C(-1\,;-2\,;1)$.

1. Déterminer la nature du triangle ABC.

2. Que peut-on en déduire pour le point C par rapport à la droite (AB) ?

44 ALGO PYTHON

1. On considère, dans une base orthonormée de l'espace, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

Avec Python, créer une fonction ortho ayant comme arguments xu, yu, zu, xv, yv, zv et qui renvoie True si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, False sinon.

2. On considère la fonction ci-dessous.

```
def pvect(xu,yu,zu,xv,yv,zv):
    L=[yu*zv-zu*yv,zu*xv-xu*zv,xu*yv-yu*xv]
    return(L)
```

pvect(xu, yu, zu, xv, yv, zv) renvoie, dans une liste, les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ à partir des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Expliquer l'affichage obtenu dans la console :

```
>>> pvect(1,2,3,4,5,6)
[-3, 6, -3]
```

b. En utilisant les fonctions précédentes, vérifier que le vecteur $\vec{w}$ défini par pvect(1,2,3,4,5,6) est orthogonal à la fois à $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et à $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. a. Vérifier que le même phénomène se produit avec les couples de vecteurs suivants.

- $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

b. Émettre une conjecture concernant le vecteur $\vec{w}$.

c. Valider ou invalider la conjecture précédente par le calcul.

4. Application

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(5\,;2\,;3)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(-3\,;2\,;3)$.

Vérifier que ces points définissent un plan et déterminer, à l'aide de la fonction pvect, un vecteur normal à ce plan.

45 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(-4\,;0\,;0)$, $B(0\,;-3\,;0)$, $C(3\,;1\,;0)$, $D(-1\,;4\,;0)$, $E(-4\,;0\,;5)$, $F(0\,;-3\,;5)$, $G(3\,;1\,;5)$ et $H(-1\,;4\,;5)$.

1. Montrer que le solide $ABCDEFGH$ est un cube.

2. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[FB]$. On souhaite montrer que les droites (AI) et (JH) sont perpendiculaires.

a. Déterminer les coordonnées des points I et J, puis montrer que les droites (AI) et (JH) sont orthogonales.

b. Montrer que le point $K\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$ appartient aux droites (AI) et (JH). Conclure.

46 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d passant par $A(-3\,;1\,;7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, ainsi que le point $B(-3\,;7\,;-3)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point B sur la droite d.

1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie 3D. Tracer le projeté orthogonal C du point B sur la droite d et conjecturer ses coordonnées.

2. On cherche à valider la conjecture faite à l'aide du logiciel.

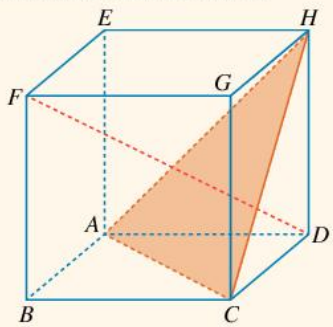
a. Que doit-on vérifier pour être certain que le point C trouvé est bien le projeté orthogonal du point B sur la droite d ?

b. Valider ou invalider la conjecture.

3. En déduire la distance du point B à la droite d.

47 PRISE D'INITIATIVE

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 5.



• En choisissant un repère adapté, démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH).

48 **Plan médiateur d'un segment**

A et B sont deux points distincts de l'espace. I est le milieu de $[AB]$.

On appelle plan médiateur du segment $[AB]$ le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par I, que l'on note $\mathscr{P}$ dans cet exercice.

Par ailleurs, on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace qui sont à égale distance de A et de B.

1. a. Soit M un point appartenant au plan médiateur du segment $[AB]$. Démontrer, en calculant des carrés scalaires, que $MA = MB$.

b. Qu'a-t-on alors démontré quant aux ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$?

2. a. On considère un point M de l'espace situé à égale distance de A et de B.

En transformant l'écriture de $MA^2 - MB^2$, démontrer que $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

b. Justifier que la droite (IM) est incluse dans le plan médiateur de $[AB]$.

3. Qu'a-t-on alors finalement démontré quant aux ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$?

49 **Raisonner, calculer**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ telle que $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ et un plan $\mathcal{P}'$ de base $(\vec{u}', \vec{v}')$ telle que $\vec{u}'\begin{pmatrix}9\\-2\\-11\end{pmatrix}$ et $\vec{v}'\begin{pmatrix}-5\\1\\8\end{pmatrix}$.

1. On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, avec a, b et c réels.

a. Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ vérifient le système :

$$\begin{cases}3a-b+2c=0\\-a+5c=0\end{cases}$$

b. Montrer que ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases}a=5c\\b=17c\end{cases}$$

c. Donner un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

2. On note $\vec{n}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$.

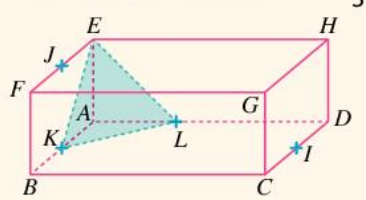
En procédant de même que précédemment, déterminer un vecteur normal $\vec{n}'$ au plan $\mathcal{P}'$.

3. Que peut-on en déduire quant aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

50 PRISE D'INITIATIVE

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $AE = 1$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[CD]$, $[EF]$ et $[AB]$.

Le point L est défini par la relation $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



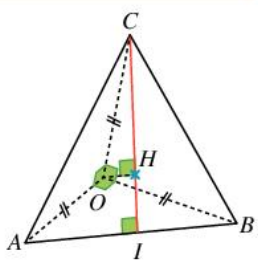
• En choisissant un repère adapté, déterminer la distance du point I au plan (EKL).

51 **Raisonner**

Soit a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :

• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O ;

• $OA = OB = OC = a$.



On appelle I le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) et H le projeté orthogonal du point O sur la droite (IC).

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. a. Justifier que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[AB]$.

b. Que peut-on en déduire quant aux droites (OI) et (AB) ?

c. Pourquoi les droites (AB) et (CI) sont-elles perpendiculaires ?

d. Que peut-on en déduire quant à la droite (AB) et le plan (OCI) ? Justifier.

e. En déduire que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.

3. a. Pourquoi la droite (OH) est-elle perpendiculaire à la droite (CI) ?

b. Pourquoi peut-on en déduire que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) ?

c. Que peut-on en déduire quant au point H par rapport au point O et au plan (ABC) ?

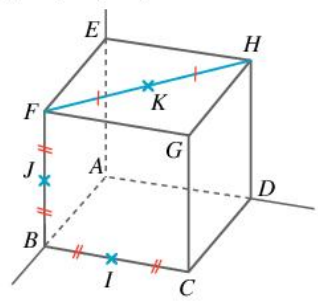
4. a. Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $OABC$ puis l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC.

b. Exprimer OH en fonction de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$. En déduire que $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

52 **Cube et plan**

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BF]$ et $[HF]$.



1. Lire les coordonnées des points I, J, G et K.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

3. Démontrer que la distance du point G au plan (IJK) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

4. On considère le point $L\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{IL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}$. Que peut-on en déduire pour le point L ?

b. Démontrer que le point L est le projeté orthogonal du point G sur le plan (IJK).

53 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points :

$A\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, $B\left(2\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\,;2\right)$, $D(2\,;0\,;0)$, $E\left(\frac{5}{2}\,;0\,;1\right)$ et $F(0\,;-2\,;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C, d'une part, et D, E et F, d'autre part, définissent un plan.

2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan (DEF).

b. Que peut-on en déduire quant aux plans (ABC) et (DEF) ?

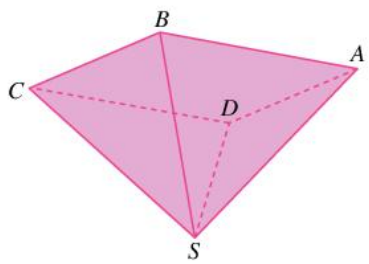
3. a. Déterminer la distance du point A au plan (DEF).

b. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

54 **Goutte-à-goutte**

Samira veut réaliser un goutte-à-goutte pour maintenir constant le taux d'hydratation de sa serre durant l'été.

Son goutte-à-goutte est une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ dont la longueur du côté de la base est égale à celle d'une arête issue du sommet S, soit $SA = SB = SC = SD = AB$.



On souhaite connaître les dimensions de ce goutte-à-goutte pour qu'il contienne 75 cL d'eau.

Soit H le centre du carré $ABCD$

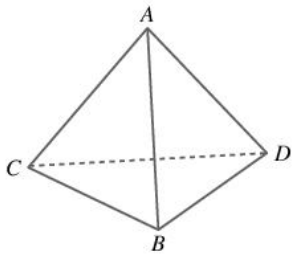
1. a. En considérant le triangle SAC, montrer que (SH) est perpendiculaire à la droite (AC).

b. Montrer de la même manière que (SH) est perpendiculaire à la droite (BD).

c. Que peut-on en déduire pour la droite (SH) ?

2. Apporter une réponse au problème posé.

55 **Tétraèdre régulier**



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

- $A\left(0\,;0\,;\frac{3}{2}\right)$;
- $B\left(\sqrt{2}\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$;
- $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$;
- $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{6}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.

2. Montrer que les arêtes opposées (AB) et (CD) d'une part, puis (AC) et (BD) d'autre part, sont orthogonales.

3. Montrer que la droite passant par les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à ces deux arêtes.

4. Montrer que le point O est le milieu des trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées.

5. Démontrer que les quatre sommets du tétraèdre appartiennent à une même sphère de centre O dont on précisera le rayon.

56 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u},\vec{v})$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ et un plan $\mathcal{P}'$ de vecteur normal $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}$.

1. On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (avec a, b, c réels) un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

a. Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ vérifient le système suivant.

$$\begin{cases} a-2b+5c=0 \\ 4b-3c=0 \end{cases}$$

b. Montrer que ce système est équivalent au système suivant.

$$\begin{cases} a=-\frac{7}{2}c \\ b=\frac{3}{4}c \end{cases}$$

c. Donner un vecteur normal, de coordonnées entières, au plan $\mathcal{P}$.

2. Que peut-on en déduire quant aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

3. Le point $A(0\,;0\,;0)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

a. Montrer que le point $B(29\,;-22\,;118)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

b. Que peut-on en déduire ?

57 Perpendiculaire commune

Soient d et d' deux droites distinctes de l'espace définies l'une par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$, et l'autre par la donnée d'un point B et d'un vecteur directeur $\vec{v}$.

Partie A. Introduction

1. Soient M un point quelconque de d et N un point quelconque de d'.
Traduire ces appartenances par des égalités vectorielles.
2. On considère la droite (MN).
La droite (MN) est la perpendiculaire commune à d et d' si et seulement si (MN) est perpendiculaire à d et à d'.
Traduire cette condition nécessaire et suffisante à l'aide de produits scalaires.

Partie B. Application à un cas particulier

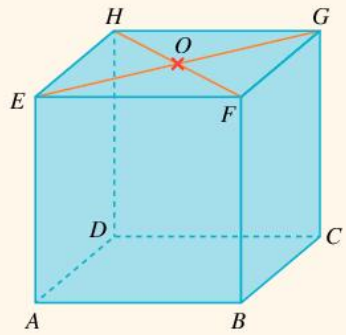
L'espace est muni d'un repère orthonormé.
d est la droite de l'espace passant par $A(-2\,;0\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$.
d' est la droite de l'espace passant par $B(0\,;0\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les droites d et d' sont distinctes.
2. Soient $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de la droite d et $N(x'\,;y'\,;z')$ un point quelconque de la droite d'.
a. Justifier qu'il existe deux réels α et β tels que :
$$\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{BN}=\beta\vec{v}.$$
b. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de α et β.
3. Utiliser la question 2 de la partie A afin de montrer que prouver l'existence et l'unicité de la droite (MN), perpendiculaire commune aux droites d et d', est équivalent à trouver un unique couple $(\alpha\,;\beta)$ de réels solution du système :
$$\begin{cases}11\alpha+7\beta=-2\\7\alpha+5\beta=-4\end{cases}$$
4. Prouver alors que les droites d et d' ont une perpendiculaire commune dont on donnera un point et un vecteur directeur. Cette droite sera nommée Δ dans la suite de l'exercice.
5. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique 3D, tracer les droites d et d'.
b. Tracer ensuite la droite Δ obtenue, puis faire tourner la figure pour l'observer.
c. Conjecturer la distance minimale entre deux points des droites d et d'.
6. On admet que la distance minimale entre deux points des droites d et d' est la distance MN.
Déterminer la valeur exacte de cette distance, appelée distance entre les droites d et d'.

58

PRISE D'INITIATIVE

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. Le point O est le centre de la face $EFGH$.



1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Conjecturer, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique 3D, si les droites (EO) et (HB) sont ou non orthogonales. Semblent-elles perpendiculaires ?
2. Valider ou invalider ces conjectures.

59 Une fonction scalaire de Leibniz et quelques lignes de niveaux

Approfondissement

Soient A, B et C trois points de l'espace formant un triangle équilatéral de côté a $(a>0)$. Soit I le milieu de $[BC]$.
On définit la fonction h de la façon suivante. À tout point M de l'espace, on associe le nombre réel $h(M)$ tel que :
$$h(M)=MA^2+MB^2+MC^2.$$

La fonction h associe à un point M de l'espace un nombre réel : c'est un exemple de fonction « scalaire » de Leibniz, du nom du mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz ci-contre (1646-1716).

1. a. Prouver que, pour tout point G de l'espace :
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$
b. En déduire qu'il existe un unique point G de l'espace vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
c. Justifier que G appartient au plan (ABC).
d. Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
e. Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 en fonction de a.
2. En utilisant des carrés scalaires de vecteurs, démontrer que :
$$h(M)=3MG^2+a^2.$$
3. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $h(M)=a^2$?
4. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $h(M)=\frac{a^2}{2}$?
5. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $h(M)=4a^2$?

60 **Intersection d'une sphère et d'un plan**

Approfondissement

Soit r un réel strictement positif. Dans l'espace, on considère un point I, la sphère de centre I et de rayon r et un plan $\mathscr{P}$. On s'intéresse à l'intersection de cette sphère avec le plan $\mathscr{P}$.

1. a. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Avec un logiciel de géométrie dynamique 3D, représenter la situation en définissant un curseur pour le nombre r.

b. Quelles semblent être les possibilités d'intersection entre la sphère et le plan ?

2. On note d la distance du point I au plan $\mathscr{P}$.

a. Si $r < d$, démontrer que l'intersection entre la sphère et le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble vide.

b. Si $r = d$, définir l'intersection entre la sphère et le plan. Justifier. On dit alors que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère.

c. Si $r > d$, démontrer que l'intersection entre la sphère et le plan est le cercle inclus dans le plan $\mathscr{P}$, qui a pour centre le point H, projeté orthogonal de I sur le plan $\mathscr{P}$, et pour rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.

3. Application. On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace et on considère les points $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$, $C(0\,;0\,;5)$. Quel est le rayon de la sphère de centre O tangente au plan (ABC) ?

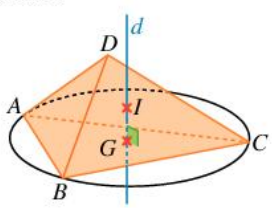
61 **Sphère circonscrite à un tétraèdre**

Approfondissement

Si A et B sont deux points distincts de l'espace et si I est le milieu de $[AB]$, alors le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par I. D'autre part, on admet que le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points de l'espace qui sont à égale distance de A et de B (voir exercice 48 p. 365).

$ABCD$ est un tétraèdre non aplati de l'espace, c'est-à-dire que les quatre points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. L'objectif est de démontrer qu'il existe une sphère et une seule passant par les points A, B, C et D, appelée sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

1. Soit G le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et d la droite orthogonale au plan (ABC) passant par G. Justifier que tout point de la droite d est équidistant des points A, B et C.



2. Soit $\mathscr{P}$ le plan médiateur du segment $[AD]$.

a. Supposons que la droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles. Démontrer alors que la droite (AD) est parallèle au plan (ABC).

b. En déduire qu'il existe un unique point commun à la droite d et au plan $\mathscr{P}$.

3. Démontrer que le point I est équidistant des quatre sommets du tétraèdre $ABCD$.

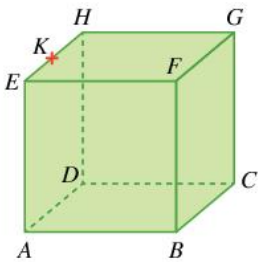
4. Conclure quant à l'existence et l'unicité de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

5. Application. On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace et on considère les points $B(2\,;0\,;0)$, $C(1\,;3\,;0)$ et $D(1\,;0\,;1)$.

a. Démontrer que le point $E\left(1\,;\frac{4}{3}\,;0\right)$ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $OBCD$.

b. Quel est le rayon de cette sphère ?

62 $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. K est le milieu du segment $[EH]$. On cherche l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace tels que $MB^2 - MD^2 = 1$.



1. Montrer que K appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

2. Soit M un point de l'espace. En utilisant des carrés scalaires de vecteurs, démontrer que $MB^2 - MD^2 = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$

3. a. Soit M un plan de l'ensemble $\mathscr{E}$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{BD}$?

b. En déduire que le point M appartient à un plan $\mathscr{P}$ que l'on caractérisera.

4. Réciproquement, démontrer que tout point M de $\mathscr{P}$ appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

5. Conclure.

63 PRISE D'INITIATIVE

Dans un repère orthonormé de l'espace, on a modélisé la trajectoire rectiligne de deux avions.

Le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ du premier avion a pour coordonnées $\begin{pmatrix}565\\565\\0\end{pmatrix}$ et celui $\vec{v}_2$ du second avion $\begin{pmatrix}800\\-400\\0\end{pmatrix}$, chaque valeur étant exprimée en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

À tout instant t, exprimé en heure, la position M_1 du premier avion est donnée par la relation $\overrightarrow{A_1M_1} = t\vec{v}_1$ avec $A_1(0\,;0\,;2)$ et la position M_2 du second avion est donnée par la relation $\overrightarrow{A_2M_2} = t\vec{v}_2$ avec $A_2(1\,;2\,;3)$.

• La visibilité n'excède pas trois kilomètres. Les avions pourront-ils s'apercevoir ?

ZOOM SUR... les vrai-faux

Les exercices de type « vrai ou faux » ont une consigne précise, comme « Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et donner une justification de la réponse choisie. » Il faut donc rédiger une démonstration ou donner un contre-exemple à chaque proposition. Les questions sont souvent indépendantes les unes des autres.

64 — 20 min — VRAI OU FAUX

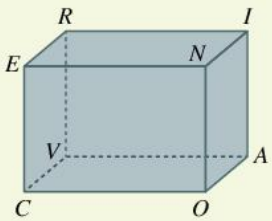
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et des droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausse, en justifiant la réponse.

1. Les droites d et d' sont parallèles.
2. La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles.
3. La droite d' et le plan $\mathscr{P}'$ sont orthogonaux
4. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

65 — 45 min — QCM

Ce pavé droit $COAVENIR$ est tel que, en cm :
$CO = 5$, $CV = 3$ et $CE = 4$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(C ; \frac{1}{5}\overrightarrow{CO}, \frac{1}{3}\overrightarrow{CV}, \frac{1}{4}\overrightarrow{CE}\right)$.

Donner la seule réponse correcte parmi les quatre proposées. Aucune justification n'est demandée.

1. Le produit scalaire $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}$ est égal à :
(a) -9 (b) 0 (c) 9
(d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

2. En cm, la distance du point I au plan (RVO) est égale à :
(a) $\frac{15}{\sqrt{34}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 3
(d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

3. En cm^2, l'aire du triangle RVO est égale à :
(a) $\sqrt{34}$ (b) $2\sqrt{34}$ (c) $3\sqrt{34}$
(d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

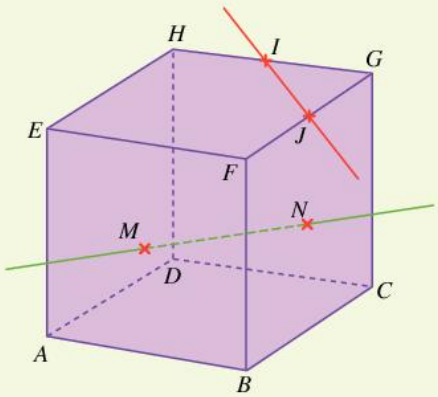
4. En cm^3, le volume du tétraèdre $RVOI$ est égal à :
(a) 10 (b) 20 (c) 30
(d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

66 — 35 min — QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples dont les réponses doivent être justifiées. Une seule des quatre propositions est correcte.

La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.



1. Les droites (IJ) et (BD) sont :
(a) perpendiculaires ;
(b) sécantes, non perpendiculaires ;
(c) orthogonales ;
(d) parallèles.

2. Les droites (IJ) et (EF) sont :
(a) perpendiculaires ;
(b) sécantes, non perpendiculaires ;
(c) orthogonales ;
(d) parallèles.

3. Les droites (IJ) et (MN) sont :
(a) perpendiculaires ;
(b) sécantes, non perpendiculaires ;
(c) orthogonales ;
(d) parallèles.

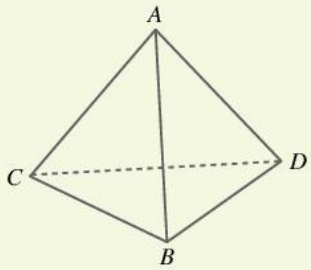
67 — 25 min

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1 ; 5 ; 3)$, $B(5 ; 5 ; -1)$ et $C(9 ; 5 ; 1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. a. Démontrer qu'il existe un unique point G de l'espace tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et déterminer ses coordonnées.
b. Montrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$
c. Que peut-on en déduire pour le point G ?
3. Soit $S(5 ; -7 ; 1)$.
a. Montrer que la droite (SG) est orthogonale aux droites (AB) et (AC).
b. En déduire que G est le projeté orthogonal de S sur la droite (AB).

68 35 min

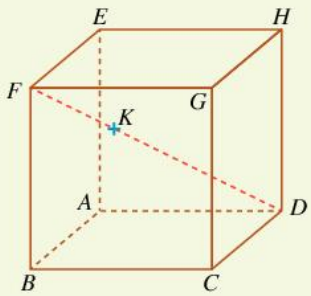
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(0 ; 0 ; 3)$, $B(2\sqrt{2} ; 0 ; -1)$, $C(-\sqrt{2} ; -\sqrt{6} ; -1)$ et $D(-\sqrt{2} ; \sqrt{6} ; -1)$.



1. Démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$.
Démontrer que $RSTU$ est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.

69 30 min

Soient $ABCDEFGH$ un cube de côté 4 et K le point défini par $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$.



1. Justifier que $\left(A ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées du point K dans ce repère.
3. Démontrer que le point K est le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF).
4. Calculer la distance du point E à la droite (DF).
5. Calculer la distance du point K au plan (GCD).

70 25 min

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2 ; -2 ; 4)$ et $B(-2 ; 2 ; 2)$.
1. Montrer que AOB est un triangle rectangle.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (AOB).
3. En déduire la distance du point $C(10 ; -10 ; 2)$ au plan (AOB).
4. Que peut-on déduire pour le point C ?

71 15 min

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $M(1 ; -1 ; -1)$, $N(0 ; 3 ; 4)$ et $P(2 ; 0 ; 2)$.
1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ et en déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PMN}$.
2. H est le projeté orthogonal du point N sur la droite (MP). Calculer NH, puis l'aire du triangle MNP.

72 25 min

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $R(1 ; 2 ; 2)$, $S(3 ; 1 ; -3)$, $T(2 ; 4 ; 2)$, $U(3 ; 0 ; 2)$ et $V(1 ; 1 ; 1)$.
1. Justifier que R, S et T définissent un plan.
2. La droite (UV) et le plan (RST) sont-ils orthogonaux ?
3. Montrer que $\overrightarrow{RV} = \frac{1}{5}\overrightarrow{RS} - \frac{2}{5}\overrightarrow{RT}$.
4. Que peut-on en déduire pour le point V ?
5. Quel est le projeté orthogonal du point U sur le plan (RST) ?
6. En déduire la distance du point U au plan (RST).

73 35 min

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(0 ; -1 ; 5)$, $B(2 ; -1 ; 5)$, $C(11 ; 0 ; 1)$, $D(11 ; 4 ; 4)$, $I(1 ; 0 ; 0)$, $J(0 ; 1 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 1)$.
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$, le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t seconde, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées :
$M_t(t ; -1 ; 5)$ et $N_t(11 ; 0{,}8t ; 1 + 0{,}6t)$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ?
c. Vérifier que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
2. a. Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.
b. À quel instant la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

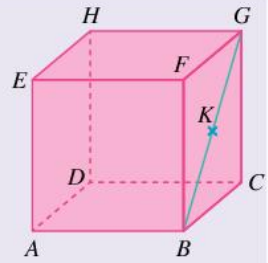
74 30 min

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(-1 ; 1 ; 0)$, $B(1 ; 1 ; -2)$ et $C(3 ; 1 ; -1)$.
1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer qu'il existe un unique point G de l'espace tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
3. a. Vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
b. Que peut-on en déduire pour le point G ?
4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 13.$$
a. En utilisant le point G dans l'égalité caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$, démontrer que $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow GM = 1$.
b. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$.

Consolider ses fondamentaux

75 Différentes orthogonalités dans un cube

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 10.
K est le milieu du segment $[BG]$.
On se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(A\,;\frac{1}{10}\overrightarrow{AB},\frac{1}{10}\overrightarrow{AD},\frac{1}{10}\overrightarrow{AE}\right)$.



Questions Va piano

On rappelle que la distance d'un point A à une droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donnée par la formule $\left\|\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right\|$.

1. a. Lire les coordonnées des points A, B, C, D et H.
b. Calculer celles du point K.
2. Calculer la distance du point K à la droite (DH).
3. Calculer la distance du point B à la droite (AG).
4. Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{10}{3}\,;\frac{10}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$. Démontrer que L est le projeté orthogonal de B sur (AG).

Questions Moderato

1. a. Lire les coordonnées des points A, B, C, D et H.
b. Calculer celles du point K.
2. a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (FHC).
b. En déduire la distance du point G au plan (FHC).
3. a. Démontrer que le triangle ABG est rectangle.
b. En considérant l'aire de ce triangle, calculer la distance du point B à la droite (AG).

Questions Allegro

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et H. Calculer celles du point K.
2. Soit $(a\,;b)$ un couple de réels. On note M le point tel que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AK}$ et N le point tel que $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DH}$.
a. Démontrer que $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AK}$ et à $\overrightarrow{DH}$ si et seulement si :

$$\begin{cases}3a-b=1\\2b-a=0\end{cases}$$

b. En déduire qu'il existe un unique point M' de la droite (AK) et un unique point N' de la droite (DH) tels que la droite $(M'N')$ soit à la fois orthogonale à (AK) et à (DH).
c. Déterminer la distance $M'N'$.

Se préparer aux études supérieures

76 Des fonctions scalaires de Leibniz

Approfondissement

Partie A

Soient A et B deux points de l'espace tels que $AB=2$.
Soit I le milieu de $[AB]$.
On définit deux fonctions f et g de la façon suivante : à tout point M de l'espace, on associe le nombre réel $f(M)$ tel que $f(M)=MA^2-MB^2$ et le nombre réel $g(M)$ tel que $g(M)=MA^2+MB^2$.
Les fonctions f et g associent à un point M de l'espace un nombre réel : ce sont des exemples de fonctions « scalaires » de Leibniz, du nom du mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

1. Déterminer les valeurs de $f(I)$ et de $g(I)$.
2. En utilisant le point I et le carré scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, démontrer que :

$$f(M)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

En déduire l'ensemble des points M tels que $f(M)=0$.
3. Démontrer que 0 n'a pas d'antécédent par la fonction g.
4. Soit k un réel. On s'intéresse aux antécédents de k par la fonction g.
a. Démontrer que pour tout point M de l'espace, $g(M)=2MI^2+2$.
b. Traiter le cas $k=4$.
c. Déterminer, selon les valeurs de k, l'ensemble des antécédents de k par la fonction g.

Partie B

1. Placer quatre points de l'espace A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un carré de côté 1.
2. Démontrer qu'il existe un seul point G de l'espace tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
Placer le point G.
3. On définit la fonction h de la façon suivante : à tout point M de l'espace, on associe le nombre réel $h(M)$ tel que :

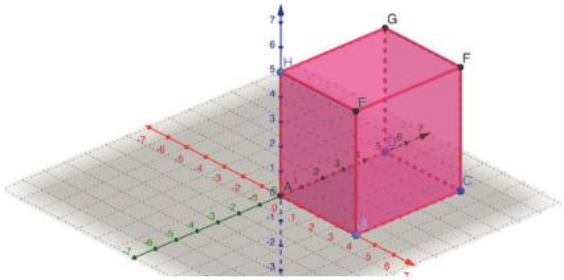
$$h(M)=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2.$$

a. Exprimer $h(M)$ à l'aide du point G.
b. Déterminer l'ensemble des antécédents de 2 par la fonction h.

No problem!

1 A 3D-sketch

An architect has made a 3D sketch to design an extension. She has used the scale 2 m to 1 unit.



1. What length and width should the builders take into account to build the extension?
2. Using a dynamic geometry software, draw the shape of the roof on the sketch using the coordinates (2, 0, 7) and (2, 5, 7) for its corners.
3. What will be the height of the roof?

2 Noughts and crosses GROUP WORK

- **Step 1:** choose a square.
- **Step 2:** solve the problem linked to that square.
- **Step 3:** if your answer is correct, write your symbol (a nought or a cross) in the square.

The aim of the game is to get a winning line of three noughts or three crosses in either a horizontal, vertical or a diagonal row.
To play this game, you need to use a cube $ABCDEFGH$ length a with point I midpoint of AB, and point O midpoint of EG. You will have to give some dot products in terms of a and explain your results to your classmate.

	A	B	C
1			
2			
3			

A1: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HG}$ **A2:** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$ **A3:** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ **B1:** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ **B2:** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB}$
B3: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EO}$ **C1:** $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{OG}$ **C2:** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}$ **C3:** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB}$

Final exam Past papers

1 MENTAL CALCULATION A vector is given by $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Which vector is not perpendicular to a?

a. $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

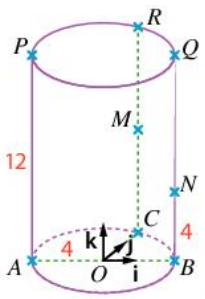
2 The position vectors of the points A, B, C, D are:
$\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$; $-\mathbf{i}+3\mathbf{k}$; $m\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ respectively, where m is a constant.

1. Show that the lines AB and CD are parallel when $m=\frac{3}{2}$.

2. When $m=2$, find the acute angle between the planes ABC and ABD, giving your answer in degrees.

3 The diagram on the right shows a solid cylinder standing on a horizontal circular base with centre O and radius 4 units. Points A, B and C lie on the circumference of the base such that AB is a diameter and angle $BOC=90°$. Points P, Q and R lie on the upper surface of the cylinder vertically above A, B and C respectively. The height of the cylinder is 12 units. The midpoint of CR is M and N lies on BQ with $BN=4$ units. Unit vectors $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ are parallel to OB and OC respectively and the unit vector $\mathbf{k}$ is vertically upwards.

- Evaluate $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PM}$ and hence find angle MPN.



CHAPITRE

12

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Ressources en +

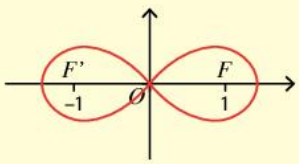
Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Faire de l'algèbre en géométrie

Jean-Dominique Cassini

Jean-Dominique Cassini (1625-1712) est un astronome et ingénieur italo-français.
Fin connaisseur des mathématiques, il enseigne la géométrie à l'université de Bologne, mais on lui doit surtout de grandes avancées en astronomie. Il est, par exemple, l'un des premiers à déterminer une valeur précise de la distance entre la Terre et le Soleil.

Les ovales de Cassini sont des types de courbes planes telles que le produit des distances de chaque point de la courbe à deux autres points fixés soit constant. Parmi elles figure celle que l'on nomme la lemniscate de Bernoulli.



Si l'on se place dans un repère orthonormé, chaque point de la courbe ci-dessus de coordonnées $(x\,;y)$ vérifie les équations :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\dfrac{t+t^3}{1+t^4} \\ y = \sqrt{2}\dfrac{t+t^3}{1+t^4} \end{cases}$$, où t décrit l'ensemble des réels.

Ce système d'équations est appelé représentation paramétrique. Dans l'espace, une droite peut être définie par une représentation paramétrique.

Rechercher d'autres façons de définir la lemniscate de Bernoulli, puis tracer cette courbe à l'aide de l'une de ces représentations sur un logiciel de géométrie dynamique. Vérifier ensuite avec le logiciel que le produit des distances de chaque point de la courbe aux points F et F' est bien constant.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

1 Vecteurs directeurs

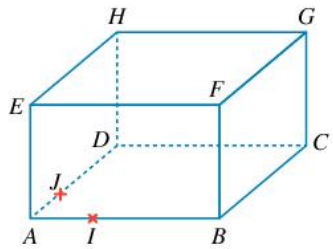
On considère six droites dirigées par les vecteurs ci-dessous.
À chaque droite $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$, associer la droite Δ_1, Δ_2 ou Δ_3 qui lui est parallèle. Justifier.

$\mathscr{D}_1 : \vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$; $\mathscr{D}_2 : \vec{v}\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$; $\mathscr{D}_3 : \vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\Delta_1 : \vec{m}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\0\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $\Delta_2 : \vec{n}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\frac{2\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$; $\Delta_3 : \vec{p}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2 Bases de l'espace

On considère le parallélépipède ci-dessous.



Recopier et compléter chacun des triplets suivants par un vecteur de façon à obtenir une base de l'espace.

1. $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \ldots)$
2. $(\overrightarrow{BD} ; \ldots ; \overrightarrow{BG})$
3. $(\overrightarrow{FD} ; \overrightarrow{FH} ; \ldots)$
4. $(\overrightarrow{IJ} ; \overrightarrow{BC} ; \ldots)$

3 Vecteurs orthogonaux

Pour quelle(s) valeur(s) du réel a les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\a\\a^2\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

4 Plan de l'espace

Théodore cherche à définir un plan dans l'espace. Inès lui propose les énoncés suivants.
Dans chacun des cas, expliquer pourquoi les données fournies ne permettent pas de définir un plan, puis corriger afin que ce soit le cas.

1. « Un plan de l'espace peut être défini par trois points quelconques. »
2. « Un plan de l'espace peut être défini par deux vecteurs non colinéaires. »
3. « Un plan de l'espace peut être défini par un point et une droite. »

5 Résolution de systèmes

On considère le système suivant, où t est un réel.

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

1. Lorsque t est égal à -2, quelles sont les valeurs des nombres x, y et z ?
2. a. Pour quelle valeur de t a-t-on $z = 0$?
   b. Quelles sont alors les valeurs des nombres x et y ?

6 Vecteur normal (1)

On considère un plan $\mathscr{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ avec :

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

- Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\7\\10\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$? Justifier.

7 Vecteur normal (2)

On considère le plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point $A(2 ; 0 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Le point $B(-1 ; -2 ; 1)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$? Justifier.
2. Le point $C(0 ; 1 ; 4)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$? Justifier.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Faisceau d'eau

Objectif
Étudier une trajectoire rectiligne.

Lors d'un exercice pour éteindre un feu dans une maison, un pompier utilise une lance à incendie. Si la lance est placée suffisamment proche du feu, la trajectoire de l'eau peut être considérée comme rectiligne et de vitesse constante.
Dans un repère orthonormé de l'espace dont l'unité est le mètre, on modélise la lance à incendie par le point $L(1\,;\,3\,;\,2)$ du repère. Le feu est en étage et la cible à atteindre est située au point $F(7\,;\,6\,;\,5)$. La vitesse de l'eau est donnée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, chaque coordonnée étant exprimée en mètre par seconde.
La trajectoire de l'eau est définie par la relation $\overrightarrow{LE}=t\vec{v}$, où t est le temps en seconde et E l'extrémité du filet d'eau.

1. Faire un dessin à main levée illustrant la situation.
2. Quel point l'eau atteint-elle en une seconde ?
3. Au bout de combien de temps l'eau atteindra-t-elle la cible ?

Situation 2 Ensemble de points et paramètre

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Conjecturer une représentation paramétrique d'une droite.

On se place dans un repère orthonormé de l'espace et on s'intéresse à l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont définies en fonction d'un paramètre, noté t, de la manière suivante.

$$x=2+3t\ ;\ y=3-t\ ;\ z=t, \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

1. Ouvrir une fenêtre d'un logiciel de géométrie dynamique 3D et créer un curseur t pouvant varier de –10 à 10.
2. Créer ensuite un point A de coordonnées $(2+3t\,;\,3-t\,;\,t)$.
3. **a.** Faire varier t et afficher la trace du point A.
   b. Quel ensemble le point A semble-t-il décrire ?
4. Conjecturer la nature de l'ensemble que le point A décrirait si le paramètre t décrivait l'ensemble des nombres réels.
5. En utilisant les conjectures établies précédemment et le logiciel, recopier et compléter la proposition suivante.
   « L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x=2+3t\\y=3-t\\z=t\end{cases}, \text{ où } t \text{ est un réel,}$$

est … qui passe par le point … et qui est dirigée par le vecteur …. »

Situation 3 Divers ensembles de points

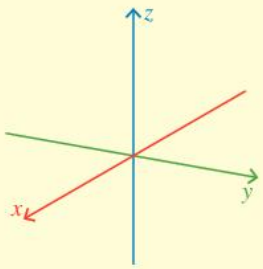
Objectif
Conjecturer la forme d'une équation cartésienne de plan.

1 On considère l'ensemble $\mathscr{S}_1$ des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x = 2$.

a. Les points A, B, C, D et E sont cinq points qui appartiennent à l'ensemble $\mathscr{S}_1$.
Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant.

Points / Coordonnées	A	B	C	D	E
x			2		2
y	1	−2	−1	0	
z	1	3		0	−3

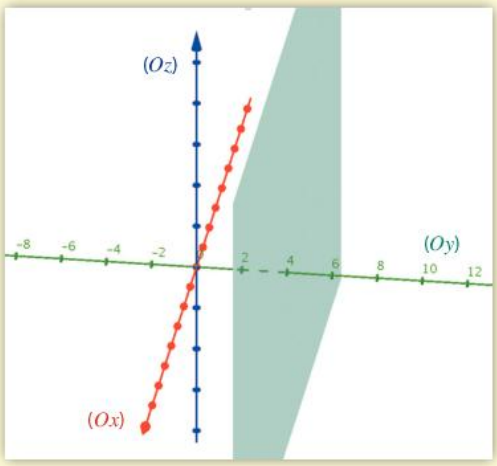
b. Dans un repère orthonormé de l'espace identique à celui ci-contre, placer à main levée les points A, B, C, D et E.



c. Conjecturer la nature de l'ensemble $\mathscr{S}_1$.

2 De la même manière, conjecturer la nature puis tracer à main levée l'ensemble $\mathscr{S}_2$ des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $z = -1$.

3 Sur un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé un ensemble de points et obtenu l'affichage suivant.



a. Quelle est la nature de cet ensemble de points ?

b. Conjecturer une équation vérifiée par les coordonnées de tous les points de cet ensemble, puis vérifier cette conjecture à l'aide du logiciel.

4 On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x + y - z + 1 = 0.$$

a. Les points I, J et K sont trois points qui appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$.
Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant.

Points / Coordonnées	I	J	K
x	−1		2
y		0	−1
z	1	3	

b. Les points I, J et K sont-ils alignés ? Justifier.

c. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ orthogonal au vecteur $\vec{IJ}$.
Est-il orthogonal au vecteur $\vec{JK}$?

d. Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\mathscr{E}$?

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Représentations paramétriques de droites

Soient a, b et c trois réels non nuls simultanément.

1. Caractérisation des points appartenant à une droite

Propriété

Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

DÉMO en ligne

On considère la droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et qui passe par le point A.
Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'espace.
Le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$.

2. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété et définition

Soient α, β et γ trois réels.
L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels, est la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

DÉMO p. 383

Ce système est une **représentation paramétrique** de $\mathscr{D}$.

Remarques

- Une droite peut être définie par la donnée d'une représentation paramétrique.
- Chaque valeur de t permet de déterminer les coordonnées d'un point de la droite. Réciproquement, à chaque point de la droite correspond une valeur de t.
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : en prenant un autre vecteur directeur ou un autre point de cette droite, on obtient une nouvelle représentation paramétrique.

Exemple

Soit $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui passe par le point $A(5 ; -2 ; -1)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

Pour $t = 0$, on retrouve les coordonnées du point A.
On cherche les coordonnées d'un point de la droite autre que A.

Pour $t = 1$, on obtient : $\begin{cases} x = 5 - 1 \\ y = -2 + 4 \\ z = -1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

Le point $C(4 ; 2 ; 2)$ appartient donc à $\mathscr{D}$.

Méthode 1 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

On considère la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $A(-3\,;\,-1\,;\,2)$ et le point $B(-2\,;\,-2\,;\,6)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
2. Le point $C(3\,;\,5\,;\,-1)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?

Solution commentée

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est $\begin{cases}x = x_A + at\\y = y_A + bt\\z = z_A + ct\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels. Cela équivaut à $\mathscr{D} : \begin{cases}x = -3 + t\\y = -1 - t\\z = 2 + 4t\end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

2. $C \in \mathscr{D} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}3 = -3 + t\\5 = -1 - t\\-1 = 2 + 4t\end{cases} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}6 = t\\6 = -t\\-3 = 4t\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}t = 6\\t = -6\\t = -\dfrac{3}{4}\end{cases}$

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également. Donc le point C n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 5 p. 390

Méthode 2 Exploiter une représentation paramétrique de droite

Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x = 1 + 3t\\y = 8 - 2t\\z = 6t\end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite.
2. La droite Δ est-elle parallèle à la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$?

Solution commentée

1. D'après le cours, une représentation paramétrique de la droite Δ est de la forme $\begin{cases}x = \alpha + at\\y = \beta + bt\\z = \gamma + ct\end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Le point $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ est un point de la droite et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette même droite. On identifie les différents nombres : $\alpha = 1$, $\beta = 8$ et $\gamma = 0$, donc le point A a pour coordonnées $(1\,;\,8\,;\,0)$. De même, $a = 3$, $b = -2$ et $c = 6$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$. On remarque que les coordonnées de A s'obtiennent en posant $t = 0$. En fixant une autre valeur de t, on obtient les coordonnées d'un autre point.

2. Δ est parallèle à $\mathscr{D} \Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\begin{cases}3 = k\\-2 = -2k\\6 = k\end{cases}$.

La dernière proposition est fausse. Par équivalences, la première l'est aussi. Les droites Δ et $\mathscr{D}$ ne sont donc pas parallèles.

EXERCICE 1 p. 390

2. Équations cartésiennes de plans

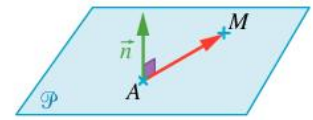
1. Caractérisation des points d'un plan par le produit scalaire

Propriété

DÉMO p. 383

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soient A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Un point M de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$



Remarque

Un plan peut être défini par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

Exemple

Soit $\mathcal{P}$ le plan qui passe par le point $B(1\,;\,-1\,;\,5)$ et qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

On cherche à déterminer si le point $D(3\,;\,0\,;\,3)$ appartient à $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

$D \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2\times 2 + 1\times 1 + (-2)\times(-3) = 0 \Leftrightarrow 4 + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 11 = 0$

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première l'est aussi.

Le point D n'appartient donc pas au plan $\mathcal{P}$.

2. Équation cartésienne d'un plan

Soient a, b et c trois réels non tous nuls.

Propriétés et définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

DÉMO p. 383

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de l'espace dont les cordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation :

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ où } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$

Cette équation est une **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$.

Remarque

Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point de ce plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

Propriété

Soit d un réel.

L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est

DÉMO p. 382

un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemple

L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Remarque

Un plan peut être défini par la donnée d'une de ses équations cartésiennes.

Méthode 1 Déterminer une équation cartésienne d'un plan

1. On considère le plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point $C(3\,;-2\,;\,5)$ et dont le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal. Déterminer une équation cartésienne de ce plan.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$, parallèle au plan $\mathscr{P}$ et qui passe par l'origine du repère.

Solution commentée

1. D'après le cours, $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, donc $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $-5x+3y+z+d=0$, où d est un réel.
De plus $C(3\,;-2\,;\,5)$ appartient à $\mathscr{P}$, donc les coordonnées du point C vérifient l'équation ci-dessus.
Cela donne $-5\times3+3\times(-2)+5+d=0 \Leftrightarrow -15-6+5+d=0 \Leftrightarrow -16+d=0 \Leftrightarrow d=16$.
Donc, une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $-5x+3y+z+16=0$.
On aurait aussi pu utiliser l'équivalence $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0$ pour trouver l'équation cartésienne ci-dessus.

2. Le plan $\mathscr{R}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$, donc tout vecteur normal à $\mathscr{P}$ est un vecteur normal à $\mathscr{R}$. On en déduit que $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{R}$, donc une équation cartésienne de $\mathscr{R}$ est de la forme :
$-5x+3y+z+d=0$, où d est un réel.
De plus, le plan $\mathscr{R}$ passe par l'origine du repère, donc $-5\times0+3\times0+0+d=0 \Leftrightarrow 0+d=0 \Leftrightarrow d=0$.
Donc une équation cartésienne de $\mathscr{R}$ est $-5x+3y+z=0$.

EXERCICE 24 p. 392

Méthode 2 Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne

On considère les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes.
$$\mathscr{P}_1 : -3x+2y+5z+1=0\,;\quad \mathscr{P}_2 : 2x+y+z=0\,;\quad \mathscr{P}_3 : y-z+5=0$$

1. On considère le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-200\\200\end{pmatrix}$. À quel plan ce vecteur est-il normal ?
2. Quelle est la position relative des plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$?

Solution commentée

1. On commence par déterminer un vecteur normal à chaque plan. D'après le cours, on identifie les coefficients de chacune des équations cartésiennes pour déterminer les coordonnées d'un vecteur normal.
Pour le plan $\mathscr{P}_1$, $a=-3$, $b=2$ et $c=5$, donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$. Pour le plan $\mathscr{P}_2$, $a=2$, $b=1$ et $c=1$, donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.
Pour le plan $\mathscr{P}_3$, $a=0$, $b=1$ et $c=-1$, donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_3$ est $\vec{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.
On constate que $\vec{w}=-200\,\vec{n_3}$, donc le vecteur $\vec{w}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n_3}$.
C'est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_3$.

2. $\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}=2\times0+1\times1+1\times(-1)=0$. Les vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont orthogonaux, donc les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont perpendiculaires.

EXERCICE 29 p. 393

Comprendre une démonstration

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement, puis répondre aux questions posées.

Soient a, b et c trois réels non tous nuls.
L'ensemble $\mathscr{P}$ des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration

Soient a, b et c trois réels non nuls simultanément.
On peut donc, par exemple, supposer que $a\neq 0$.

- Soit $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ le point de l'espace tel que $x_0=-\dfrac{d}{a}$, $y_0=0$ et $z_0=0$.
  On a alors $a\times\left(-\dfrac{d}{a}\right)+b\times 0+c\times 0+d=-d+d=0$.
  Donc le point M_0 appartient à l'ensemble $\mathscr{P}$.
- Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace.
  $M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$
  $M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow ax+by+cz+d=a\times x_0+b\times y_0+c\times z_0+d$
  $M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
  $M\in\mathscr{P}\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0}\cdot\vec{n}=0$, où $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
  On reconnaît la propriété caractéristique d'un plan.
  L'ensemble $\mathscr{P}$ est donc le plan passant par le point M_0 et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

1. Pourquoi peut-on supposer que $a\neq 0$? Aurait-on pu faire d'autres suppositions ?
2. Pourquoi le point M_0 est-il bien défini ?
3. a. Comment justifie-t-on que le point M_0 appartient à l'ensemble $\mathscr{P}$?
   b. Où cette information est-elle utilisée dans la suite du raisonnement ?
4. Justifier la dernière équivalence du raisonnement.
5. Énoncer la propriété caractéristique d'un plan.

Rédiger une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soit A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Un point M de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On raisonne par double implication. En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de cette propriété.

- Soit M un point de $\mathcal{P}$.
  Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{AM}$ pour le plan $\mathcal{P}$?
  Justifier que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
  Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$. Prouver alors que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = 0$.
  Justifier que $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
  En déduire que les points H et M sont confondus.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

En raisonnant par équivalences, prouver que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

2 Soient α, β et γ trois réels.
En raisonnant par équivalences, prouver que l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels, est la droite $\mathcal{D}$ qui passe par le point $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3 Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1 : x - 3y + 11z - 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 5x - 2y - z = 0$ sont perpendiculaires.

Démontrer une équivalence

Pour démontrer que deux propositions A et B sont équivalentes ($A \Leftrightarrow B$), on peut :
- soit raisonner par double implication.
On démontre alors les deux implications suivantes :
– si A est vraie, alors B est vraie ($A \Rightarrow B$) ;
– si B est vraie, alors A est vraie ($B \Rightarrow A$).
- soit raisonner par équivalences.
On montre que A est équivalent à B, en utilisant uniquement des équivalences tout au long du raisonnement.

Raisonnement déductif

À partir des données de l'énoncé, on déduit des informations en utilisant des propriétés ou des théorèmes du cours, jusqu'à pouvoir conclure que la proposition à démontrer est vraie.

Carte mentale

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Déterminer et exploiter une représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

La droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ a pour **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit l'ensemble des réels.}$$

- Chaque valeur de t permet de déterminer les coordonnées d'un point de la droite. Réciproquement, à chaque point de la droite correspond une valeur de t.
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : en prenant un autre vecteur directeur ou un autre point de cette droite, on obtient une nouvelle représentation paramétrique.

Déterminer une équation cartésienne d'un plan en identifiant les coefficients

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation :

$ax + by + cz + d = 0$, où $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Cette équation est une **équation cartésienne** du plan $\mathscr{P}$.

- Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes.

Déterminer une équation cartésienne d'un plan à l'aide du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

- L'expression de ce produit scalaire nul en fonction de x, y et z permet d'obtenir une **équation cartésienne** du plan $\mathscr{P}$.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

(a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2 On considère le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui passe par le point $A(0\,;6\,;0)$.
Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

(a) $-8x + 4y + 2z + 6 = 0$

(b) $-8x + 4y + 2z = 0$

(c) $8x - 4y - 2z + 24 = 0$

3 Soit $\mathcal{P}$ le plan dont une équation cartésienne est $-5x + 45y + 35z - 28 = 0$.
Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est :

(a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 45 \\ 35 \end{pmatrix}$

4 On considère le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $-x + y + z - 4 = 0$.
Ce plan est parallèle à la droite d, dont une représentation paramétrique est :

(a) $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 3t \\ z = 4 \end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

(b) $\begin{cases} x = -5t + 12 \\ y = 3t \\ z = -8t \end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

(c) $\begin{cases} x = -5t - 3 \\ y = -3t \\ z = 8t \end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1 Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = 12 + 2t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Affirmation : Le point $A(6\,;-9\,;16)$ appartient à Δ.

2 **Affirmation :** Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et passant par le point $C(-10\,;81\,;25)$ est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 81 - 3t \\ z = 25 + 5t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

3 Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace dont des équations cartésiennes respectives sont :
$10x + y - 2z - 2 = 0$ et $-x + 6y + 2z - 2 = 0$.
Affirmation : Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

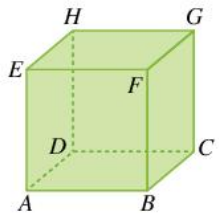
4 Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites de l'espace telles que :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -55t + 32 \\ y = 5t \\ z = -11t + 356 \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

$$\text{et } \Delta_2 : \begin{cases} x = u + 1 \\ y = -11u \\ z = 2\,020 \end{cases}, \text{ où } u \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Affirmation : Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point.

5 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{AB}\,; \vec{AD}\,; \vec{AE})$.



Affirmation : Une représentation paramétrique de la droite (FD) est :

$$\begin{cases} x = -20t \\ y = 20t + 1 \\ z = -20t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

TP Outils numériques

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

TP 1 Orthogonalité de deux plans

LOGICIEL DE CALCUL FORMEL

Objectif Étudier l'orthogonalité de deux plans définis par une équation cartésienne.

On considère le plan $\mathcal{P}_1$ qui passe par le point $A(-1;3;6)$ et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{P}_2$ le plan dont une équation cartésienne est $3x - 2y + 4z - 1 = 0$.

On souhaite déterminer si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

1. **a.** Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}_2$.
   b. Recopier et compléter la proposition suivante :
   « $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont … »
   c. Traduire cette proposition vectoriellement, puis sous forme d'un système.
2. Zoé, qui souhaite résoudre le problème, a obtenu l'affichage ci-contre avec un logiciel de calcul formel.

```
Résoudre({3 = −2a + 3b, −2 = a + 2b, 4 = 4a − 2b}, {a, b})
→ {}
```

   a. Expliquer la première instruction saisie.
   b. Interpréter géométriquement le résultat.
3. Soit $\mathcal{P}_3$ le plan dont une équation cartésienne est $-11x - 5y + 10 - 2\,020 = 0$.
   Utiliser un logiciel de calcul formel pour déterminer si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont perpendiculaires.

TP 2 Base de l'espace

LOGICIEL DE CALCUL FORMEL

Objectif Travailler avec une base de l'espace.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

1. On souhaite justifier que ces trois vecteurs forment une base de l'espace.
   a. Compléter la proposition suivante : « $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace si et seulement si … ».
   b. Justifier, en utilisant un logiciel de calcul formel, que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.
2. On souhaite déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   a. Écrire une relation vectorielle entre les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
   b. La traduire sous forme d'un système de trois équations à trois inconnues.
   c. Résoudre ce système à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
   En déduire les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Boîte à outils

Calcul formel

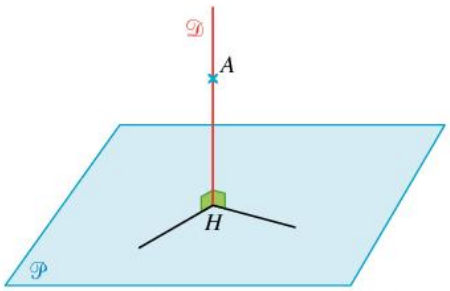
Pour résoudre un système d'équations :

- Sur Xcas, choisir le menu « Scolaire », puis sélectionner « résoudre : équation ou système ».
- Sur le logiciel de géométrie, choisir le menu « Calcul formel », puis saisir la commande `Résoudre(`.
- Entrer le système en ligne et mettre dans les parenthèses :
  – les équations (entre crochets sur Xcas, entre accolades sur le logiciel de géométrie), séparées par des virgules ;
  – les variables (entre crochets ou accolades selon le logiciel) après les équations.
- Appuyer sur « Entrée ».

TP 3 Distance d'un point à un plan LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectifs
Visualiser dans l'espace, émettre une conjecture et la démontrer.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère le plan $\mathscr{P}$, dont une équation cartésienne est $2x - z - 3 = 0$.
Soit a un réel. On note A le point de coordonnées $\left(1\,;a\,;a^2\right)$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$. On nomme $\mathscr{D}$ la droite (AH), qui est donc orthogonale à $\mathscr{P}$.



On cherche à savoir s'il existe une valeur du réel a pour laquelle la distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est minimale.

1. Dans une fenêtre graphique 3D d'un logiciel de géométrie, tracer le plan $\mathscr{P}$.
2. **a.** Créer un curseur a, variant de -10 à 10.
   b. Créer le point $A\left(1\,;a\,;a^2\right)$.
   c. Faire varier le curseur et observer la position relative du point A et du plan $\mathscr{P}$.
3. **a.** Tracer la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point A et qui est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   b. Lire dans la fenêtre « Algèbre » une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
4. **a.** Tracer le point H, intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$.
   b. Afficher la valeur de la longueur AH.
   c. Conjecturer la réponse au problème posé dans l'énoncé.
5. Démontrer la conjecture en suivant les étapes de raisonnement indiquées ci-dessous.
   a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
   b. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
   c. Calculer les coordonnées du point K en fonction de a, puis conclure.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie dynamique

- Pour créer un curseur, afficher une fenêtre « Graphique2 » et cliquer sur le bouton $a=2$.
  Le curseur se pilote depuis la fenêtre « Graphique2 ».
- Le point A est un objet 3D : il doit donc être créé dans la fenêtre 3D.
- Pour tracer une droite perpendiculaire à un plan passant par un point donné, utiliser le bouton .
- Pour tracer un point à l'intersection de deux objets, utiliser le bouton .
- L'affichage de la longueur AH se fait en cliquant sur le bouton cm, puis en sélectionnant les points A et H dans la fenêtre 3D ou la fenêtre « Algèbre ».

Se préparer à l'oral

Calcul mental

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Les quantités suivantes sont-elles nulles ?

1. $3\times 3-3\times 5+3$
2. $4\times 7-4\times 10+3\times 4$
3. $49\times 57-3\times 1+62\times 2$
4. $25\times 9-5\times 40-25$

2 Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=1+6t \\ y=-9-6t \\ z=3+6t \end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{D}$?

1. $M(7\,;-15\,;9)$
2. $N(-11\,;-9\,;9)$
3. $P(2\,;-10\,;4)$

3 Soit $\mathscr{R}$ le plan dont une équation cartésienne est :

$$-2x+3y-6z+10=0.$$

Les vecteurs suivants sont-ils des vecteurs directeurs de $\mathscr{R}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ 2. $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ 3. $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$

4 Calculer les coordonnées du point d'intersection entre le plan $\mathscr{P}$ d'équation $-5x+3y-2z+1=0$ et l'axe :

- (Ox) ; - (Oy) ; - (Oz).

5 Soit $\mathscr{P}$ le plan dont une équation cartésienne est :

$$11x+20y+20z=0.$$

Les points suivants appartiennent-ils au plan $\mathscr{P}$?

1. $A(0\,;0\,;0)$
2. $B(20\,;-11\,;0)$
3. $C\left(\frac{200}{11}\,;-\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{4}\right)$

6 On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-3+14t \\ z=19+76t \end{cases}, \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

- Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la droite Δ et l'axe des abscisses.

7 Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans suivants.

1. Le plan $\mathscr{R}_1$ qui passe par l'origine du repère et qui a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2. Le plan $\mathscr{R}_2$ qui passe par le point $B(1\,;3\,;-2)$ et qui a pour vecteur normal $\vec{j}$.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

8 Soit a un nombre réel.

On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$29x+4y+7z-12=0 \text{ et}$$
$$4x+8y+az-9=0.$$

1. Pour quelle valeur de a les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont-ils perpendiculaires ?
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle les deux plans sont parallèles ?

9 On considère la droite Δ passant par le point $E(-8\,;7\,;9)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=1+6t \\ y=-9-6t \\ z=3+6t \end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

- Les droites Δ et $\mathscr{D}$ sont-elles confondues ?

10 À quel(s) axe(s) de coordonnées les plans suivants sont-ils parallèles ?

1. $\mathscr{R}_1 : 5x+2y-8=0$
2. $\mathscr{R}_2 : -y-2\,020z+6=0$.

11 Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe (Oy) et passant par le point $T(7\,;10\,;18)$.

12 Soient $A\left(1\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $B(-1\,;1\,;2)$ et $C(0\,;0\,;3)$ trois points de l'espace.

1. Justifier que ces trois points définissent un plan.
2. Lequel des vecteurs suivants est un vecteur normal au plan (ABC) ?

- $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ - $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ - $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Les plans $\mathscr{P} : -x+2y-z+2=0$ et $\mathscr{S} : -x+2y-z+3=0$ sont confondus.
2. Les droites $\mathscr{D}$ et Δ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = -t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}, \text{ et } \Delta : \begin{cases} x = -1-2u \\ y = 1+u \\ z = 3 \end{cases}, \text{ où } u \in \mathbb{R},$$

sont coplanaires.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Soit $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 5-2t \\ z = 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, une droite de l'espace.

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x-2y+z-3=0$.

- Existe-t-il une droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$ et sécante avec $\mathscr{D}$?

Préparer un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

1. Dans l'espace, un plan peut être défini par un système d'équations paramétriques.
Faire des recherches sur ce sujet et proposer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques d'un même plan de l'espace.

2. Dans le plan, certaines courbes sont appelées courbes paramétrées.
La donnée du système $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$, où $t \in]-\pi ; \pi]$, définit ainsi l'une d'entre elles.
Faire des recherches sur les courbes paramétrées du plan, identifier la courbe paramétrée définie par le système ci-dessus, puis présenter en particulier les courbes paramétrées du plan nommées cycloïde et cardioïde.

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sauf mention contraire dans l'énoncé.

Représentation paramétrique d'une droite

1 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous. Pour chacune de ces droites, déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur.

1. $d_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 22 - t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 22t \end{cases}$
2. $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -11 - t \\ z = -44 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
3. $d_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$
4. $d_4 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2 + 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -t + 3 \end{cases}$

2 **Calculer, représenter**

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$$

1. Quelles sont les coordonnées du point de la droite obtenues lorsque $t = 2$? On nomme A ce point.
2. Quelles sont les coordonnées du point de la droite obtenues lorsque $t = -1$? On nomme B ce point.
3. Placer les points A et B dans un repère de l'espace, et en déduire le tracé de la droite $\mathscr{D}$ dans ce repère.

3 On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 - 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ.
2. Déterminer les coordonnées de deux points distincts de cette droite, que l'on nommera C et D.
3. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$? Justifier.

4 Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, donnés ci-dessous.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

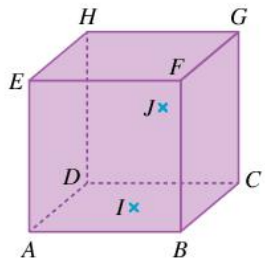
1. $A(-2 ; 4 ; 1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A(5 ; 0 ; -4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $A(-7 ; 8 ; 2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A(16 ; 4 ; 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

5 **Calculer, raisonner**

Soient $G(4 ; -6 ; -7)$ et $F(8 ; -3 ; -5)$ deux points de l'espace.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

6 On considère le cube $ABCDEFGH$. On note I le centre de la face $ABCD$ et J celui de la face $CDHG$.



- Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

7 **Calculer**

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{D}$? Justifier.

1. $C(0 ; -1 ; 4)$
2. $D(7 ; 4 ; 3)$
3. $E(-5 ; 8 ; -1)$
4. $F\left(\frac{11}{2} ; \frac{9}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

8 On considère une droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - t \\ z = -11 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les points $A(-5 ; 11 ; -7)$ et $B(9 ; -3 ; -21)$ appartiennent à Δ.
2. Les points A et B sont-ils alignés avec le point $C(-4 ; 4 ; 6)$?
3. Que peut-on en déduire sur la position relative du point C et de la droite Δ ?
4. Proposer une autre méthode pour justifier la réponse donnée à la question 3.

9 **Chercher, raisonner**

Soit a un réel fixé.

- Pour quelle valeur de a le point $A\left(5 ; -\frac{7}{8} ; a\right)$ appartient-il à la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3t \\ y = 1 - \frac{5}{4}t, t \in \mathbb{R} ? \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Position relative de deux droites

10 **Chercher, communiquer**

On considère les droites d_1 et d_2, dont on donne pour chacune une représentation paramétrique.

$$d_1 : \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -8t - 1 \\ z = 6t - 22 \end{cases}, t \in \mathbb{R} ; \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t' + 1 \\ y = 4t' \\ z = -3t' + 3 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.
2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles :
a. parallèles ?
b. coplanaires ?
c. confondues ?

11 On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous.

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soient $A(-2;2;6)$ et $B(-3;0;4)$ deux points de l'espace.
1. Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont-elles parallèles ?
2. Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont-elles orthogonales ?

12 On considère les droites Δ_1 et Δ_2 dont on donne pour chacune une représentation paramétrique.

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3t - 6 \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R} ; \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = -3t' + 3 \\ y = 2t' - 3 \\ z = t' + 2 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que le point $A(-3;1;4)$ appartient à chacune de ces deux droites.
2. Que peut-on en déduire sur la position relative de Δ_1 et Δ_2 ?
3. Ces deux droites sont-elles perpendiculaires ? confondues ?

13 **Raisonner**

On considère les droites d_1 et d_2 dont on donne pour chacune une représentation paramétrique.

$$d_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = t + 4 \\ z = -t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R} ; \quad d_2 : \begin{cases} x = 2u - 3 \\ y = 5u + 3 \\ z = u + 6 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

1. Ana doit résoudre un exercice et a obtenu l'affichage suivant dans un logiciel de calcul formel.

```
Résoudre({3 t = 2 u − 3, t + 4 = 5 u + 3, −t + 5 = u + 6}, {t, u})
→ {{t = −1, u = 0}}
```

Quelle pouvait être la question posée dans l'énoncé ?
2. Répondre à cette question en utilisant les résultats affichés dans le logiciel de calcul formel.

14 PRISE D'INITIATIVE

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Sur un logiciel de géométrie dynamique, tracer la droite $\Delta : \begin{cases} x = -2 \\ y = 3t + 1 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

15 Soit Δ la droite définie par la représentation paramétrique suivante.

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 - 4t \\ z = 10 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d parallèle à Δ qui passe par le point $A(-4;2;0)$.
2. a. Déterminer les coordonnées du point C de Δ de cote nulle.
b. En déduire une représentation paramétrique de la droite δ perpendiculaire à Δ qui passe par le point C.

16 **Projeté orthogonal**

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

• Le point $B(4;-1;3)$ est-il le projeté orthogonal sur la droite $\mathscr{D}$ du point $A(-1;0;1)$? Justifier.

Équations cartésiennes d'un plan

17 On considère les plans définis par les équations cartésiennes suivantes.

$\mathscr{P}_1 : 2x - 5y + z - 4 = 0$; $\mathscr{P}_2 : x + 3y - z + 12 = 0$;
$\mathscr{P}_3 : 8x - y + 5 = 0$; $\mathscr{P}_4 : x - z = 0$.

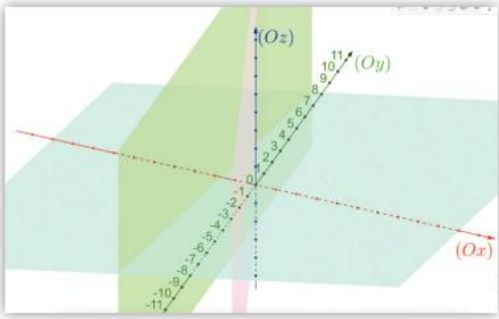
• Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun de ces plans.

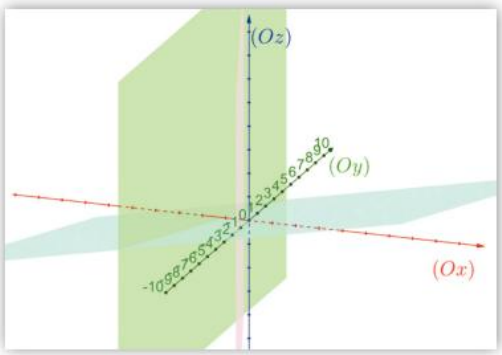
18 **Chercher, raisonner**

1. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations de plan ?
a. $-3x - 2y + 7z = 0$ b. $x^2 - 2y + 3z^2 + 1 = 0$
c. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ d. $-x + y - z = 1$
e. $y = 2x - 3$ f. $(x-1)^2 - x^2 + 3y + z = 0$
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun des plans trouvés.

19 Soit $\mathscr{P}$ le plan de l'espace dont une équation cartésienne est $6x + 3y + z - 12 = 0$.
1. Le point $A(5;-1;-7)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
2. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{P}$ dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales à -2.
3. Soit c un réel. Pour quelle(s) valeur(s) de c le point $C(c;c;c)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$?

20 **Représenter, communiquer**
On considère les plans :
$\mathcal{P}_1 : x - y - 5z = 0$, $\mathcal{P}_2 : 3x + y + 1 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : x = -2$.
1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun de ces plans.
2. On a représenté ces trois plans dans la fenêtre d'un logiciel de géométrie et effectué plusieurs captures d'écran. Associer à chacun d'eux sa couleur. Justifier.





21 Soit a un réel.
Soit $\mathcal{R}$ le plan de l'espace dont une équation cartésienne est $-8x + 5y - 3z - 1 = 0$.
• Pour quelle(s) valeur(s) du réel a le point $A(1; a; a^2)$ appartient-il au plan $\mathcal{R}$?

22 Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace dont une équation cartésienne est $-2x + 3y + 5z - 7 = 0$.
Les vecteurs suivants sont-ils des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$?

• $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ • $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ • $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ • $\vec{s}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$

23 **Raisonner, représenter**
Le plan $\mathcal{P}_1$ admet pour équation cartésienne :
$$2x + y + 4z - 8 = 0.$$
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec chacun des axes de coordonnées du repère.
2. Représenter alors ce plan dans un repère orthonormé de l'espace.
3. Mêmes questions avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation :
$$-2x - y + 10z - 5 = 0.$$

24 On considère le plan $\mathcal{R}$ qui passe par le point A et dont le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{R}$ dans chacun des cas suivants.

1. $A(-2;4;1)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$ 2. $A(5;3;-2)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$
3. $A(3;3;-5)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 4. $A(-1;2;-3)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$

25 On rappelle que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
• Déterminer une équation cartésienne du plan dont le vecteur $\vec{k}$ est un vecteur normal et qui passe par le point $D(-2;5;10)$.

26 **Calculer, raisonner**
On considère les points $A(1;-1;4)$; $B(2;-3;0)$ et $C(2;-1;5)$.
1. Justifier que ces trois points définissent bien un plan.
2. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Position relative de deux plans

27 On considère un plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $5x - 3y + 2z = 0$ ainsi que les points :
$$A(1;1;-1) ; B\left(0;3;\frac{9}{2}\right) \text{ et } C(4;0;-10).$$
• Justifier que le plan $\mathcal{R}$ est le plan (ABC).

28 **Raisonner, communiquer**
Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation cartésienne :
$$2x - y + z - 6 = 0$$
et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne :
$$x + 3y - 10z + 4 = 0.$$
On cherche à étudier la position relative des deux plans.
Andrea a obtenu l'affichage suivant avec un logiciel de calcul formel.

```
Résoudre({2x − y + z − 6 = 0, x + 3y − 10z + 4 = 0}, {x, y, z})
→ {{x = z + 2, y = 3 z − 2, z = z}}
```

1. Quel système Andrea a-t-il cherché à résoudre ?
2. À la lecture de l'affichage obtenu, peut-il conclure que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont :
a. parallèles ?
b. sécants ?
c. perpendiculaires ?

29 On considère les plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ dont on donne des équations cartésiennes :

$$\mathcal{R} : -3x+2y-z+7=0 \text{ et } \mathcal{S} : x+y+3=0$$

1. Le point $E(0\,;-3\,;1)$ appartient-il à ces deux plans ?
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun des deux plans.
3. Les deux plans sont-ils parallèles ? sécants ? perpendiculaires ? Justifier.

30 Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, d'équations cartésiennes respectives $2x+y-3z=0$ et $\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{9}{4}z-3=0$, sont-ils parallèles ? perpendiculaires ? Justifier.

31 **Calculer, raisonner**

Déterminer une équation cartésienne des plans suivants.

1. Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $D(-5\,;7\,;12)$ et parallèle au plan $\mathcal{P}_1 : 4x-2y+11=0$.
2. Le plan $\mathcal{U}$ passant par le point $E(6\,;-2\,;8)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{U}_1 : -x+3y-\sqrt{2}=0$.
3. Le plan $\mathcal{R}$ passant par le point $F(3\,;2\,;-2)$ et parallèle au plan (xOz).
4. Le plan $\mathcal{S}$ passant par le point $G(0\,;-5\,;3)$ et perpendiculaire au plan (xOz).

32 **Intersection de deux plans**

On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$-x+y-z+2=0 \text{ et } 5x-7y+4z-3=0.$$

1. a. Justifier que le point $E\left(\frac{11}{2}\,;\frac{7}{2}\,;0\right)$ appartient aux deux plans.

b. Que peut-on en déduire pour la position relative de ces deux plans ?

2. Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur commun à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ c. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$

3. En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble intersection des deux plans.

Position relative d'une droite et d'un plan

33 Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$.

1. $\mathcal{R}$ passe par le point $V(-1\,;4\,;-2)$ et est orthogonal à la droite (AC), avec $A(1;7\,;19)$ et $C(-3\,;0\,;12)$.
2. $\mathcal{R}$ passe par O, origine du repère, et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$: $\begin{cases}x=-3t+1\\y=-4t-3,\ t\in\mathbb{R}.\\z=t+1\end{cases}$

34 Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ qui passe par le point $D(-1;3\,;8)$ et qui est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-6y+3z-1=0$.

35 Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par la représentation paramétrique suivante.

$$\mathcal{D} : \begin{cases}x=-t+5\\y=11t+2\\z=-12t+3\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(5\,;-1\,;-1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$. Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\11\\-12\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. Voici la capture d'écran d'un logiciel de calcul formel.

```
Résoudre({3a + 5b = −1, a − 4b = 11, −2a + 3b = −12}, {a, b})
→ {{a = 3, b = −2}}
```

a. Quelle égalité vectorielle la première ligne traduit-elle ?

b. Quel est le résultat obtenu ?

c. Que peut-on en déduire sur la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$?

36 1. Dans chaque cas, déterminer si le plan $\mathcal{P}$ et la droite Δ sont parallèles.

a. $\mathcal{P} : -x+2y-3z=0$; $\Delta : \begin{cases}x=2t-1\\y=-t+2,\ t\in\mathbb{R}.\\z=3t+4\end{cases}$

b. $\mathcal{P} : 8x-23y-2z-4=0$; $\Delta : \begin{cases}x=t+13\\y=-8\\z=4t-2\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$

2. CALCULATRICE LOGICIEL DE CALCUL FORMEL Vérifier les résultats avec la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

37 1. Dans chaque cas, déterminer si le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

a. $\mathcal{P} : 2x+y+z-1=0$;
$\mathcal{D}$ passe par $A(1;-1;2)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\\-4\end{pmatrix}$.

b. $\mathcal{P} : 2x-y+z-5=0$; $\mathcal{D} : \begin{cases}x=1+2t\\y=-5+5t,\ t\in\mathbb{R}.\\z=-2+t\end{cases}$

c. $\mathcal{P} : x+z-10=0$;
$\mathcal{D}$ est la droite (BC) avec $B(-3\,;0\,;7)$ et $C(5\,;-4\,;-1)$.

2. LOGICIEL DE CALCUL FORMEL Vérifier les résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

38 **Projeté orthogonal**

Raisonner, calculer

On considère le plan $\mathcal{P} : x-3y+2z-2=0$ et le point $A(0\,;-1\,;1)$.

• Le point $B\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2}\,;0\right)$ est-il le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$? Justifier.

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sauf mention contraire dans l'énoncé.

39 **Chercher, communiquer**

Pour déterminer si trois vecteurs de l'espace forment une base, Leïla a utilisé un logiciel de calcul formel et obtenu l'affichage suivant.

```
Résoudre({3a + 2b = −4, −a + 5b = −27, 2a − 4b = 24}, {a, b})
→ {{a = 2, b = −5}}
```

1. Quelles sont les coordonnées des trois vecteurs ?
2. Forment-ils une base de l'espace ?

40 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

1. Justifier que ces vecteurs forment une base de l'espace si et seulement s'il n'existe pas de réels a et b tels que :

$$\begin{cases}1 = 3a + b\\-1 = -a - 2b\\4 = 2a + b\end{cases}$$

2. Résoudre ce système et conclure.

41 On considère les points :

$A(2 ; 1 ; 1)$, $B(3 ; -1 ; 2)$ et $C(14 ; -8 ; 10)$.

1. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$?
3. Que peut-on en déduire pour les points O, A, B et C ?

42 **Chercher, représenter**

On considère les points $A\left(1 ; 1 ; \frac{7}{3}\right)$, $B\left(4 ; 2 ; \frac{5}{3}\right)$, $C\left(-2 ; \frac{1}{3} ; \frac{7}{9}\right)$ et $D\left(\frac{25}{2} ; 5 ; 0\right)$.

1. Sont-ils coplanaires ? Justifier.
2. LOGICIEL Vérifier la réponse à l'aide d'un logiciel de calcul formel ou de géométrie dynamique.

43 PRISE D'INITIATIVE

On considère les points :

$A(0 ; -2 ; 1)$, $B(1 ; -3 ; 2)$ et $C(-2 ; 1 ; 4)$.

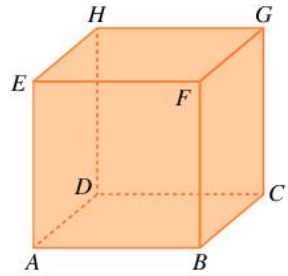
- Déterminer les coordonnées d'un point D tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit une base de l'espace.

44 Le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :

$$3x - 5y + 7z - 11 = 0.$$

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer ensuite les coordonnées de deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$.

45 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.



On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Justifier que $(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GF})$ est une base de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GA}$ et du vecteur $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ dans cette nouvelle base.

46 Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point $J(-1 ; 6 ; -4)$ et orthogonale aux axes (Ox) et (Oy).

47 Déterminer une équation cartésienne d'un plan parallèle à l'axe (Oz) et qui passe par le point $A(-2 ; 5 ; 7)$.

48 Soit Δ la droite définie par la représentation paramétrique suivante.

$$\Delta : \begin{cases}x = -4 + 2t\\y = 3 - t\\z = 10 + 3t\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, parallèle à Δ qui passe par le point $A(-2 ; 3 ; 0)$.
2. a. Déterminer les coordonnées du point C de Δ de cote nulle.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite δ perpendiculaire à Δ et qui passe par le point C.

3. Quelle est la position relative des droites $\mathcal{D}$ et δ ?

49 **Calculer, communiquer**

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par la représentation paramétrique suivante.

$$\Delta : \begin{cases}x = 9t + 2\\y = -5t + 1\\z = -2t - 4\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(3 ; 0 ; -2)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$.

1. On considère le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}9\\-5\\-8\end{pmatrix}$.

a. Justifier que $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$.

b. Que peut-on en déduire sur la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$?

2. La droite $\mathcal{D}$ est-elle incluse dans le plan $\mathcal{P}$?

50 **Raisonner, communiquer**

Dans une fenêtre d'un logiciel de calcul formel, Pierre a obtenu l'affichage suivant.

Résoudre({3x − 5y + 4z − 3 = 0, x = 2 + t, y = 4 − 2t, z = 3 + 3t}, {x, y, z, t})

→ $\left\{\left\{x=\frac{11}{5}, y=\frac{18}{5}, z=\frac{18}{5}, t=\frac{1}{5}\right\}\right\}$

1. De quel type d'objet Pierre a-t-il saisi les équations ?
2. Quelles sont ces équations ?
3. Que peut-on déduire à la lecture de l'affichage ?

51 On considère les points :

$A(3\,;1\,;-1), B(1\,;2\,;-2)$ et $C(4\,;2\,;1)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

1. Prouver que les points A, B et C définissent un plan.
2. Soient a, b et c trois réels non nuls simultanément et soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

a. Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases}-2a+b-c=0\\a+b+2c=0\end{cases}$$

b. En combinant les deux lignes du système ci-dessus, montrer que ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases}a=-c\\b=-c\end{cases}$$

c. En déduire les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) et écrire une équation cartésienne de ce plan.

2. En utilisant la méthode précédente, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) avec les points : $A(-3\,;5\,;2)$, $B(4\,;1\,;-1)$ et $C(2\,;-1\,;-3)$.

52 **Intersection d'une droite et d'un plan**

Calculer, communiquer

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x-5y+2z+1=0$ et la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=2-2t\\y=5-3t, t\in\mathbb{R}.\\z=2t\end{cases}$$

1. Justifier que la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.
2. Justifier qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{P}$ et Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$3(2-2t)-5(5-3t)+2(2t)+1=0.$$

3. En déduire l'intersection entre le plan $\mathcal{P}$ et la droite Δ.

53 Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ qui passe par le point $E(-3\,;1\,;-5)$ et qui est parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $-2x+7z-1=0$.

54 **Intersection de deux droites**

On considère les droites $\mathcal{D}$ et Δ de représentations paramétriques respectives :

$$\mathcal{D}:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t, t\in\mathbb{R};\\z=t\end{cases}\quad \Delta:\begin{cases}x=3+3u\\y=5+2u, u\in\mathbb{R}.\\z=2u\end{cases}$$

1. Justifier qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ si et seulement s'il existe un réel t et un réel u tels que :

$$\begin{cases}2+t=3+3u\\1-t=5+2u\\t=2u\end{cases}$$

2. En déduire les valeurs des réels t et u.
3. Conclure sur l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ.
4. LOGICIEL DE CALCUL FORMEL Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

55 **Chercher, calculer**

On considère les droites d_1 et d_2, dont on donne une représentation paramétrique ci-dessous.

$$d_1:\begin{cases}x=3t+1\\y=-t+3, t\in\mathbb{R};\\z=5t+2\end{cases}\quad d_2:\begin{cases}x=-t'+1\\y=3t'\\z=2t'-4\end{cases}, t'\in\mathbb{R}$$

1. d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? orthogonales ?
2. d_1 et d_2 admettent-elles un point commun ?
3. En déduire la position relative de d_1 et d_2.
4. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

56 On considère les droites d et d' de représentations paramétriques respectives :

$$d:\begin{cases}x=-t\\y=2t+9, t\in\mathbb{R};\\z=-t+8\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=-t'+1\\y=3t'\\z=7t'-4\end{cases}, t'\in\mathbb{R}$$

• d et d' sont-elles perpendiculaires ?

57 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner, calculer

On note Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=1+4t\\y=-3+t, t\in\mathbb{R}.\\z=1-t\end{cases}$$

On note d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=-t\\y=1+t, t\in\mathbb{R}.\\z=-2t\end{cases}$$

• Existe-t-il une droite orthogonale à la droite d et sécante avec la droite Δ ? Si oui, en donner une représentation paramétrique.

58 **Intersection de deux plans** Approfondissement

Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$3x-2y+z-4=0 \text{ et } 4x-3z+5=0.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

2. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans, où a, b et c sont trois réels non nuls simultanément.

a. Justifier que : $\begin{cases}3a-2b+c=0\\4a-3c=0\end{cases}$.

b. En déduire les coordonnées de $\vec{u}$ en fonction de c.

c. Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ lorsque $c=1$?

3. Déterminer les coordonnées d'un point $M(0;y;z)$ appartenant aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4. Déduire des questions précédents une représentation paramétrique de la droite intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

59 **Projeté orthogonal d'un point sur un plan**

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $4x+y+z-3=0$ et le point $A(3;2;0)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A, notée Δ.

2. En déduire une représentation paramétrique de Δ.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre Δ et $\mathscr{P}$.

4. Conclure.

60 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $-x+2y+2z-1=0$ et le point $A(1;1;1)$.

• Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

61 **Projeté orthogonal d'un point sur une droite**

Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases}x=3+2t\\y=5-3t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

et $A(0;-5;2)$ un point de l'espace.

1. Justifier que le point $H(x;y;z)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases}x=3+2t\\y=5-3t\\z=t\end{cases}$$

$$\text{et } 2(3+2t)-3(10-3t)+(t-2)=0.$$

2. Résoudre et conclure.

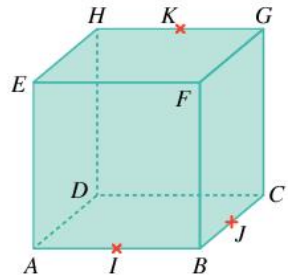
3. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Vérifier les résultats sur un logiciel de géométrie.

62 On considère la droite Δ passant par le point $A(-1;1;2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

• Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $Z(0;-2;1)$ sur la droite Δ.

63 **Raisonner, calculer**

On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant.



Le point I est le milieu du segment $[AB]$, J celui du segment $[BC]$ et K celui du segment $[GH]$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK) dans le repère orthonormé $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$.

2. Soit L le milieu du segment $[EH]$. Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ? Justifier par le calcul.

64 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-2y+2z-5=0$ et la droite Δ passant par l'origine du repère et perpendiculaire au plan $(O;\vec{j},\vec{k})$.

1. Justifier que $\mathscr{P}$ et Δ sont sécants.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

65 **Raisonner, calculer**

On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x-y=0 \text{ et } y+2z-3=0.$$

1. Justifier que ces plans se coupent suivant une droite que l'on nommera $\mathscr{D}$.

2. Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

a. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

c. $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=\dfrac{3-t}{2}\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

d. Le plan d'équation cartésienne $2x+2y-z=0$ est parallèle à $\mathscr{D}$ et contient la droite (OK), avec $K(1;0;2)$.

66 PRISE D'INITIATIVE

Soit m un réel. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - mt \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

et la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2m^2 - u \\ y = 2 + 2u \\ z = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

• Déterminer, suivant les valeurs du réel m, la position relative des droites $\mathscr{D}$ et Δ.

67 **Trajectoires de tortues**

Modéliser, calculer

Deux espèces de tortues endémiques (vertes et imbriquées) d'une petite île de l'océan Pacifique se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs. Des spécialistes ont constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 100 mètres.

Le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x ; y ; z)$, avec $z < 0$, se situe dans l'océan.

La modélisation des spécialistes établit que :

• la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite d_1 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} ;$$

• la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite d_2 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 10k \\ y = 2 + 6k \\ z = -4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.

2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}$ est normal aux droites d_1 et d_2.

b. On admet que la distance minimale entre les droites d_1 et d_2 est la distance HH', où $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$, avec H appartenant à la droite d_1 et H' appartenant à la droite d_2

Déterminer une valeur arrondie, en mètre, de cette distance minimale. On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel.

```
Résoudre({10k − 3 − t = 3p, 2 + 6k − 6t = 13p, −4k + 3t = 27p}, {k, p, t})
→ {{k = 675/1814, p = 17/907, t = 603/907}}
```

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer. Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2 ; 4 ; 0)$.

a. Soit M un point de la droite d_1.

Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

68 **Calculer, représenter**

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2 ; 1 ; 4)$, $(4 ; -1 ; 0)$, $(0 ; 3 ; 2)$ et $(4 ; 3 ; -2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3 ; 3 ; -1)$.

Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD), a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

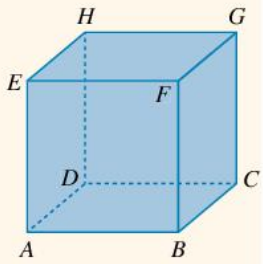
Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, sauf mention contraire dans l'énoncé.

69 PRISE D'INITIATIVE

On considère le cube $ABCDEFGH$.

L'espace est rapporté au repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$.



• Après avoir reproduit la figure, construire la section du cube par le plan $\mathcal{P}$. La construction devra être justifiée par des calculs.

70 **Distance d'un point à un plan**

Partie A. Cas général

Soient a, b et c trois réels non nuls simultanément, $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On nomme H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

On rappelle que la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la longueur AH.

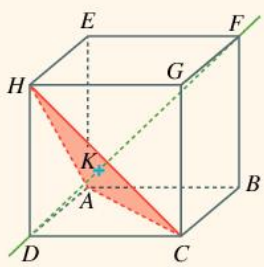
1. Justifier que $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}|=AH\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Démontrer que :
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=-ax_A-by_A-cz_A-d.$$
3. En déduire la valeur de AH.

Partie B. Cas particuliers

1. Déterminer la distance du point $A(-2\,;3\,;5)$ au plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est :
$$-2x+4y-5z+3=0.$$
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace équidistants des plans :
$\mathcal{P}_1 : x+2y-2z+1=0$ et $\mathcal{P}_2 : 4x-3y+3z-2=0$.

71 PRISE D'INITIATIVE

$ABCDEFGH$ est un cube. K est le centre de gravité du triangle ACH, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes du triangle ACH.



• Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH) en K.

72 PRISE D'INITIATIVE

Chercher, raisonner

On considère les points $A(2\,;-3\,;4)$ et $B(-1\,;1\,;5)$.

• Déterminer un système d'équations paramétriques du segment $[AB]$.

73 QCM **Raisonner, communiquer**

Pour chacune des questions suivantes, indiquer quelle affirmation est exacte sans justifier.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x+2y+9z-5=0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases}x=4t+3\\y=-t+2\\z=-t+9\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

(a) L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3\,;2\,;9)$.

(b) Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont orthogonaux.

(c) Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont parallèles.

(d) L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353\,;91\,;98)$.

2. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases}x=t+2\\y=2\\z=5t-6\end{cases},\ t\in\mathbb{R},$$
et le point $A(-2\,;1\,;0)$. Soit M un point variable de la droite d. La plus petite longueur AM :

(a) est égale à $\sqrt{53}$.

(b) est égale à $\sqrt{27}$.

(c) est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2\,;1\,;0)$.

(d) est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2\,;2\,;-6)$.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$, d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$, et le plan $\mathcal{P}'$, d'équation cartésienne $2x-y+2=0$.

(a) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

(b) L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite passant par les points $A(5\,;12\,;10)$ et $B(3\,;1\,;2)$.

(c) L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite passant par le point $C(2\,;6\,;5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

(d) L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite passant par le point $D(-1\,;0\,;0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}$.

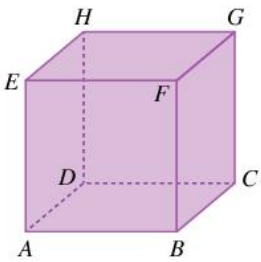
74 Tétraèdre orthocentrique

Chercher, communiquer

Dans un tétraèdre $MNPQ$, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).
Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

Partie A. Étude de cas particuliers

On considère un cube $ABCDEFGH$. On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.



1. On considère le tétraèdre $ABCE$.

a. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

b. Les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre $ACHF$ et on travaille dans le repère $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$.

a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est $x - y + z = 0$.

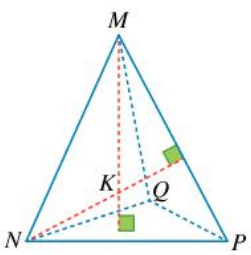
b. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.

c. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre $ACHF$ issues respectivement des sommets A, C et H.
Les quatre hauteurs issues des sommets du tétraèdre $ACHF$ sont-elles concourantes ?

Dans la suite de l'exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B. Un propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre $MNPQ$ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. a. Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK). On admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

b. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier.

2. Montrer que les arêtes $[MN]$ et $[PQ]$ sont orthogonales.
On obtient ainsi la propriété suivante :
« Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux. »
(on dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun).

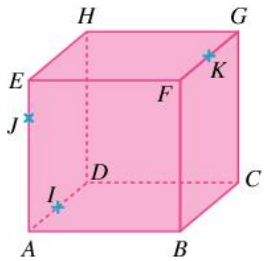
Partie C. Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points : $R(-3\,;5\,;2)$, $S(1\,;4\,;-2)$, $T(4\,;-1\,;5)$ et $U(4\,;7\,;3)$.

• Le tétraèdre $RSTU$ est-il orthocentrique ? Justifier.

75 Représenter, chercher

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.
Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :



• I est le milieu du segment $[AD]$;

• J est tel que $\vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AE}$;

• K est le milieu du segment $[FG]$.

Partie A

1. Reproduire la figure et construire, sans justifier, le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH).

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$.

1. a. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$ soit orthogonal aux vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$.

c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases}0<x<1\\0<y<1.\\0<z<1\end{cases}$

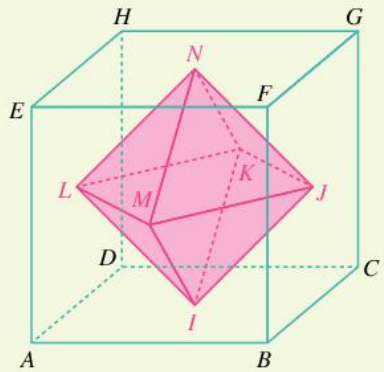
• Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

ZOOM SUR... les figures en géométrie

Les problèmes de géométrie dans l'espace sont parfois illustrés par une figure de l'espace. Il convient de bien l'analyser pour comprendre les positions relatives des différents objets en jeu : points, droites, plans, etc.

76 50 min

On relie les centres de chaque face d'un cube $ABCDEFGH$ pour former un solide $IJKLMN$ comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées $ABCD$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$, $ABFE$ et $EFGH$, donc les milieux des diagonales de ces carrés.

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées), justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.

2. a. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{NC}$ et $\vec{ML}$.

b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

3. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est $x - y + z = 1$.

b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

77 30 min

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3\,;1\,;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9, \text{ où } t \in \mathbb{R}. \\ z = t - 3 \end{cases}$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d est le point $B(5\,;5\,;-1)$.

3. Justifier que le point $C(7\,;3\,;-9)$ appartient au plan $\mathcal{P}$, puis montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

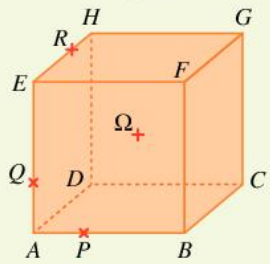
b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation :

$$t^2 - 4t = 0.$$

c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

78 60 min

Dans l'espace, on considère un cube $ABCDEFGH$ de centre Ω et d'arête de longueur 6.



Les points P, Q et R sont définis par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB},\ \vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AE} \text{ et } \vec{HR} = \frac{1}{3}\vec{HE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\,;0\,;0),\ F(6\,;0\,;6) \text{ et } R(0\,;4\,;6).$$

1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ soit un vecteur normal au plan (PQR).

c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est :

$$x - y + z - 2 = 0.$$

2. a. On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\frac{10}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.

c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points $J(6\,;4\,;0)$ et $K(6\,;6\,;2)$.

a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

c. Reproduire la figure et tracer la section du cube par le plan (PQR).

On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

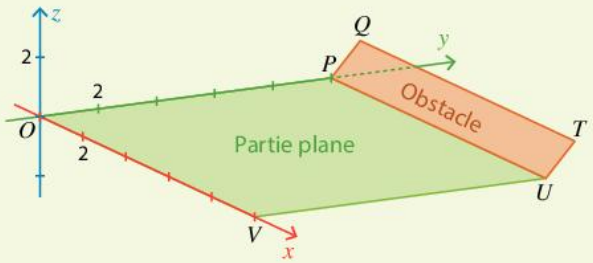
79 60 min Trajectoire de drones

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Maeva et Yanis, deux pilotes de drone, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane, qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère : $O(0;0;0)$, $P(0;10;0)$, $Q(0;11;1)$, $T(10;11;1)$, $U(10;10;0)$ et $V(10;0;0)$.

La partie plane est délimitée par le rectangle $OPUV$ et l'obstacle par le rectangle $PQTU$.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone de Maeva suit la trajectoire portée par la droite (AB), avec $A(2;4;0{,}25)$ et $B(2;6;0{,}75)$;
- le drone de Yanis suit la trajectoire portée par la droite (CD), avec $C(4;6;0{,}25)$ et $D(2;6;0{,}25)$.

Partie A. Trajectoire du drone de Maeva

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQU).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2;\frac{37}{3};\frac{7}{3}\right)$.

4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone de Maeva ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B. Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Maeva et Yanis imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.

Pour vérifier si cette consigne est respectée, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD). Il existe alors deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$.

On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\begin{pmatrix}2-2b\\2-2a\\-0{,}5a\end{pmatrix}$.

2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).

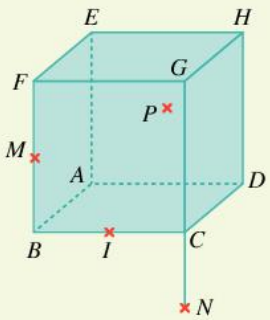
Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

80 50 min

On considère un cube $ABCDEFGH$.

Le point M est le milieu de $[BF]$, I est le milieu de $[BC]$, le point N est défini par la relation $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ et le point P est le centre de la face $ADHE$.



Partie A

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment $[BC]$ en son milieu I.

2. Reproduire la figure et construire la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP). En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par G et orthogonale au plan (MNP).

3. Montrer que la droite d coupe le plan (MNP) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

En déduire la distance GK.

4. On admet que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires et que l'aire du quadrilatère $MEDI$ est $\frac{9}{8}$ unité d'aire. Calculer le volume de la pyramide $GMEDI$.

Consolider ses fondamentaux

81 Plan et point

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $2x - 4y + 5z - 2 = 0$ et le point $A(-1;3;0)$.

Questions Va piano

1. Justifier que le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
2. Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Cette droite est-elle perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$?
b. Justifier que le point A n'appartient pas à la droite Δ.
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à Δ et passant par A.

Questions Moderato

1. Soient b et c deux réels. On considère les points $B(0;b;0)$ et $C(0;0;c)$ qui appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
a. Déterminer les valeurs de b et c.
b. Dans un repère orthonormé de l'espace, placer à main levée les points B et C.
c. Quelle est la position relative de l'axe (Ox) et du plan $\mathcal{P}$? Justifier.
d. Tracer le plan $\mathcal{P}$ dans le repère orthonormé choisi.
2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AC).
b. La droite (AC) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ perpendiculaire à la droite (AC) et passant par B.

Questions Allegro

1. Justifier que le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
3. On considère les points $Z\left(1\ ;\ 2\ ;\ \frac{8}{5}\right)$ et $T(-1\ ;-1\ ;0)$.
a. Justifier que les points Z et T appartiennent au plan $\mathcal{P}$, puis calculer l'aire du triangle ZHT.
b. En déduire le volume de la pyramide $AZHT$ (l'unité de longueur est le mètre).
c. Combien de bouteilles d'eau d'un litre et demi pourraient être versées dans cette pyramide ?

Se préparer aux études supérieures

82 La sphère Approfondissement

Partie A. Équation cartésienne d'une sphère

Soit Ω un point de l'espace. Soit R un réel non nul.
La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

1. On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega ; x_\Omega ; z_\Omega)$ et de rayon R.
Prouver la propriété suivante :
« $M(x;y;z)$ appartient à la sphère $\mathcal{S}$ si et seulement si les coordonnées de M vérifient l'équation : $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$ ».
Cette égalité est appelée **équation cartésienne de la sphère**.
2. a. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $\Omega\ (1;-1;3)$ et de rayon 2.
b. Le point $A(0;0;2)$ appartient-il à la sphère $\mathcal{S}_1$?
3. On considère l'équation suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z = 11.$$

Justifier que cette équation est l'équation cartésienne d'une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Partie B. Intersection d'une sphère et d'une droite.

On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(-1;1;1)$ et de rayon $R = 5$.
Soit Δ une droite.

1. Dessiner à main levée les positions relatives possibles entre la sphère $\mathcal{S}$ et la droite Δ.
Identifier le cas échéant la nature de leur intersection.
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer par le calcul la position relative de $\mathcal{S}$ et Δ, ainsi que les coordonnées des éventuels points d'intersection.

a. $\Delta : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 7 + 2t \\ z = 9 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. $\Delta : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite tangente à la sphère $\mathcal{S}$ au point $C(2;0;5)$.

1 Points, lines and planes

Let $A(2, 1, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(0, 1, 5)$, $D(-1, 0, 1)$ and $E(6, 2, 3)$ be five points defined by their coordinates in a 3D coordinate system.

1. Check that A, B and C are not collinear.

2. Compute the real numbers c and d such that vector $\mathbf{n}\begin{pmatrix} c \\ d \\ 1 \end{pmatrix}$ is a normal vector to plane ABC.

3. Find parametric simultaneous equations for line DE.

4. Study the intersection of line DE and plane ABC.

2 A solar panel

A solar panel is mounted on the roof of a house. The panel may be regarded as positioned at points of coordinates : $A(8, 0, 0)$, $B(8, 18, 0)$, $C(0, 18, 8)$, and $D(0, 0, 8)$.

1. Show that vector $\mathbf{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ is a normal vector to plane ABC.

2. Find the cartesian equation of the plane that contains the solar panel.

3. Find parametric equations of line L that passes through the centre of the solar panel and has direction vector $\mathbf{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ which points towards the position of the sun at a particular time of day.

3 Matching words PAIR WORK

Let $A(0, -4, 0)$, $B(1, 0, 1)$ be two points defined by their coordinates in a 3D coordinate system.

Line $\mathscr{D}$ is given by the following parametric equations: $\begin{cases} x = -6a + 6 \\ y = 4a - 9 \\ z = 0 \end{cases}$ with a a real number.

Plane $\mathscr{P}$ is given by the equation $3x - 2y - 10 = 0$.

Match each expression in the left-hand column to an expression in the right-hand column in order to form a sentence that becomes true. Justify your choices to your classmate.

• Line $\mathscr{D}$ and plane $\mathscr{P}$...	• are parallel.
• Line AB and plane $\mathscr{P}$...	• intersect.
• Line AB and line $\mathscr{D}$...	• do not intersect.

Final exam Past papers

1 The straight line l_1 passes through the points (0, 1, 5) and (2, −2, 1). The straight line l_2 has equation:

$$r = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mu(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}), \text{ where } \mu \in \mathbb{R}.$$

1. Show that the lines l_1 and l_2 are skew.

2. Find the acute angle between the direction of the line l_2 and the direction of the x-axis.

2 Three planes have equations : $x - y + kz = 3$; $kx - 3y + 5z = -1$; $x - 2y + 3z = -4$, where k is a real constant. The planes do not meet at a unique point.

1. Find the possible values of k.

2. There are two possible geometric configurations of the given planes. Identify each possible configuration, stating the corresponding values of k. Fully justify your answer.

CHAPITRE

13 Loi binomiale

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Un objet pour plancher sur les probabilités

Francis Galton

Sir Francis Galton (1822-1912) est un scientifique britannique dont les travaux portent sur des sujets très variés. Cousin de Charles Darwin, il s'intéresse principalement aux statistiques et à la psychologie, mais on lui doit aussi de nombreuses avancées en géographie et en météorologie, comme l'invention du terme « anticyclone ». Son besoin de tout quantifier le mène notamment à initier l'identification humaine par les empreintes digitales.

On doit à Galton la « planche » qui porte son nom : c'est un objet dans lequel plusieurs billes tombent au travers d'une pyramide de clous (voir la photo ci-dessus). La partie basse de la planche de Galton se compose de boîtes dans lesquelles tombent les billes. À chaque clou, la bille se dirige vers la droite ou vers la gauche avec une probabilité identique et on s'intéresse à la répartition des billes dans les boîtes.

En représentant une planche de Galton à quatre étages de clous, combien compte-t-on de boîtes dans la partie basse ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Loi de probabilité (1)

Une variable aléatoire X suit la loi donnée dans le tableau suivant.

x_i	1	3	7	10
$P(X = x_i)$	0,3	0,12		0,57

• Quelle est la valeur manquante ?

2 Probabilités conditionnelles

1. A et B étant deux événements, rappeler la formule permettant de calculer $P_B(A)$.
2. Dans une population, on sait que 12 % des individus sont gauchers et que, parmi ceux-ci, 37 % sont des femmes. Si l'on choisit au hasard une personne dans cette population, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme gauchère ?

3 Dénombrement

Traduire chacun des nombres suivants en nombres de parties d'ensembles, puis les calculer.

a. $\binom{6}{1}$ b. $\binom{15}{15}$ c. $\binom{12}{8}$ d. $\binom{12}{4}$ e. $\binom{30}{0}$

4 Paramètres d'une variable aléatoire

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « Face » obtenus.

• Déterminer la loi de X, son espérance et son écart type.

5 Jeu équitable

Dans un jeu de hasard, on mise une certaine somme. On peut gagner 7 € avec une probabilité de 0,3 et 10 € avec une probabilité de 0,1. On peut aussi perdre sa mise.

• Que doit valoir la mise pour que le jeu soit équitable ?

6 Loi de probabilité (2)

Une variable aléatoire X suit la loi donnée dans le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,11	0,1	0,02	0,1	0,47

1. Calculer $P(X \leqslant 3)$.
2. Calculer $P(X \geqslant 4)$.

7 Algorithme

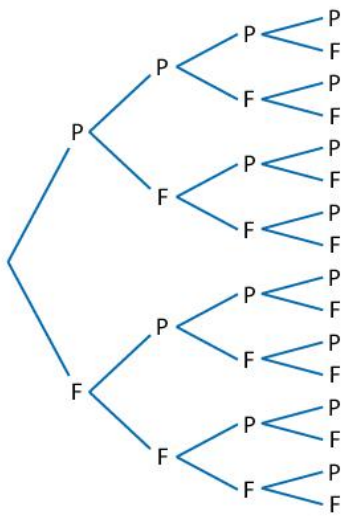
Que fait l'algorithme ci-dessous écrit en Python ?

```
1 from random import random
2
3 def expe():
4     a=random()
5     if a<0.3:
6         b=0
7     else:
8         b=1
9     return b
```

L'instruction random() renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1.

8 Arbre de probabilités

Cet arbre représente la répétition de quatre lancers d'une pièce de monnaie.
P représente l'issue « Pile » et F représente l'issue « Face ».



1. Combien de chemins dans cet arbre correspondent à l'événement « obtenir quatre "Pile" » ?
2. Même question avec l'événement « obtenir au moins un "Pile" ».

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Multijeux

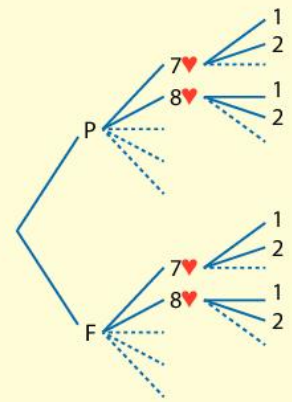
Objectif Découvrir la répétition d'épreuves indépendantes.

On joue à trois jeux différents.
- Jeu 1 : on lance une pièce de monnaie équilibrée et on note la face obtenue (P ou F).
- Jeu 2 : on pioche une carte dans un jeu de 32 cartes et on regarde sa hauteur (7, 8, 9, 10, V, D, R ou A) et sa couleur (♠, ♣, ♥ ou ♦).
- Jeu 3 : on lance un dé équilibré à six faces et on note le nombre obtenu.

1. Donner les issues possibles de chacun des trois jeux et leurs probabilités. On notera Ω_1, Ω_2 et Ω_3 les univers respectifs.

L'expérience aléatoire étudiée consiste à enchaîner ces trois jeux l'un après l'autre.

2. Donner une issue possible lorsqu'on enchaîne les trois jeux.
3. Ces trois jeux semblent-ils indépendants les uns des autres ?
4. Expliquer pourquoi les issues de l'expérience aléatoire sont les éléments du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$.
5. Quelles probabilités faut-il inscrire pour compléter l'arbre pondéré ébauché ci-contre, qui représente cette expérience aléatoire ?
6. Calculer la probabilité de l'issue (F ; D♣ ; 3).
7. Quelle est la probabilité d'obtenir un « Pile », un pique et un nombre impair ?



Situation 2 Angine bactérienne ou virale ?

Objectif Découvrir une épreuve et le schéma de Bernoulli.

Chez l'être humain, l'angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas. On choisit un malade au hasard. L'expérience aléatoire consiste à savoir si son angine est d'origine bactérienne (notée B) ou non (notée V).

1. Combien cette expérience compte-t-elle d'issues ?
2. Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit d'origine bactérienne ?
3. Décrire cette expérience grâce à un arbre pondéré.

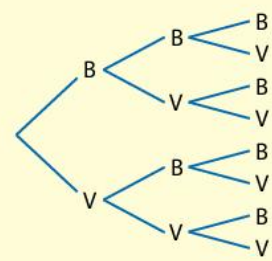
Trois malades atteints d'une angine se sont présentés au cabinet d'un médecin. Ils n'ont eu aucun contact entre eux. On s'intéresse au nombre X d'angine(s) bactérienne(s) parmi ces malades.

4. Pourquoi est-il important de préciser ici que les malades n'ont pas été en contact les uns avec les autres ?
5. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
6. Recopier et compléter l'arbre ci-contre en précisant les probabilités.
7. **a.** Combien de chemins correspondent à l'événement $\{X = k\}$ pour k allant de 0 à 3 ?

b. L'événement $\{X = k\}$ correspond à l'ensemble des triplets écrits avec les lettres B et V, où B apparaît k fois et V apparaît $(3 - k)$ fois.

Faire le lien entre les réponses à la question précédente et la notation $\binom{3}{k}$ vue au chapitre 9.

c. Expliquer pourquoi la formule $\binom{3}{k} \times 0{,}25^k \times 0{,}75^{3-k}$ permet de calculer $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 3.



Situation 3 Conditions d'une loi binomiale

Objectif
Identifier une loi binomiale.

Pour se placer dans le cadre de la loi binomiale, les trois conditions suivantes doivent être réunies.

- Condition 1 : l'expérience aléatoire ne doit présenter que deux issues dont l'une est identifiée comme le succès (avec sa probabilité p).
- Condition 2 : cette expérience doit se répéter de façon identique et indépendante un certain nombre de fois (noté n).
- Condition 3 : on compte le nombre de succès lors de ces répétitions (avec une variable aléatoire X).

• Expliquer pourquoi les énoncés suivants ne relèvent pas de la loi binomiale. On ne demande pas de répondre à la question des énoncés.

Énoncé (a)
Le bonsaï de Corentin présente deux fleurs blanches et huit fleurs roses. Il cueille successivement et au hasard trois fleurs sur le bonsaï. Quelle est la probabilité qu'il ait deux fleurs blanches ?

Énoncé (b)
Chaque matin de la semaine, Melissa choisit de façon équiprobable pour son petit déjeuner soit un café, soit un chocolat chaud, soit un cappuccino, soit un lait macchiato. Quelle est la probabilité qu'elle ait pris deux cafés et un chocolat chaud la semaine dernière au petit déjeuner ?

Énoncé (c)
Le système de gestion des feux de signalisation de nombreuses villes en France, nommé Gertrude, permet de réguler le trafic routier en temps réel en coordonnant les feux tricolores. Josselin doit se rendre au lycée et franchit cinq feux gérés par ce système. Quelle est la probabilité qu'il ne s'arrête jamais sur son parcours à cause d'un feu tricolore ?

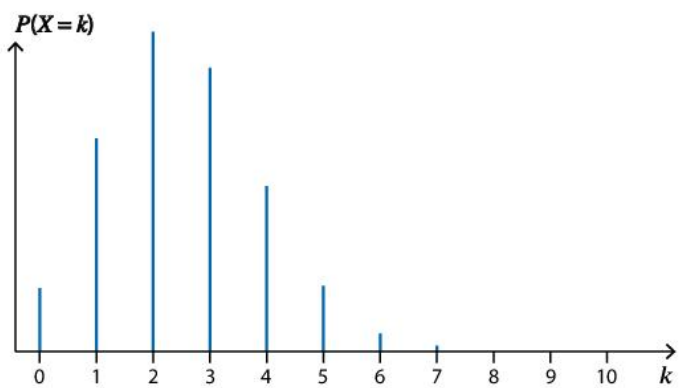
Énoncé (d)
Kenza lance plusieurs fois une pièce de monnaie équilibrée et compte le nombre X de lancers nécessaires avant d'avoir obtenu un « Pile ». Quelle est la probabilité $P(X = 4)$?

Situation 4 Loi binomiale et graphique

Objectif
Utiliser la représentation graphique de la loi binomiale.

On considère une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}25$. Le diagramme en bâtons suivant représente les probabilités $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 10.

k	$P(X=k)$
0	0,056
1	0,188
2	0,282
3	0,25
4	0,146
5	0,058
6	0,016
7	0,005
8	0
9	0
10	0



1. Calculer les probabilités suivantes en donnant les résultats au centième près.
   a. $P(X = 5)$ **b.** $P(X \leqslant 2)$ **c.** $P(3 \leqslant X \leqslant 5)$ **d.** $P(6 \leqslant X)$
2. Rappeler la formule de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale dans le cas général, puis calculer celle de X.
3. Comment l'espérance apparaît-elle sur le graphique ?

1. Succession d'épreuves indépendantes

1. Univers d'une succession d'épreuves

Définition

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes E_1, E_2, E_3, …, E_n, **l'univers des issues possibles** est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \ldots \times \Omega_n$, où Ω_i désigne l'univers de l'épreuve E_i pour i allant de 1 à n.

Une **issue** de la succession d'épreuves est donc un n-uplet $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$, où i_p est une issue de E_p.

Remarque

On représente cette situation par un arbre dans lequel un chemin correspond à une issue.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce équilibrée et à noter sa face, puis à piocher une carte dans un jeu de huit cartes et noter sa hauteur.

L'univers de la première épreuve est $U = \{P ; F\}$.

L'univers de la seconde épreuve est :

$V = \{7 ; 8 ; 9 ; 10 ; \text{valet} ; \text{dame} ; \text{roi} ; \text{as}\}$.

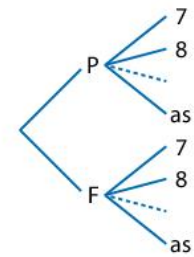
Les deux épreuves sont indépendantes l'une de l'autre car le résultat de la hauteur de la carte ne dépend pas de la face obtenue avec la pièce.

L'univers Ω de la succession des deux expériences précédentes est le produit cartésien des univers des expériences :

$\Omega = U \times V = \{(P ; 7) ; (P ; 8) ; \ldots ; (P ; \text{as}) ; (F ; 7) ; (F ; 8) ; \ldots ; (F ; \text{as})\}$

Il y a 16 issues possibles. C'est le nombre de branches finales de l'arbre.

On lit les issues en parcourant les chemins de l'arbre.



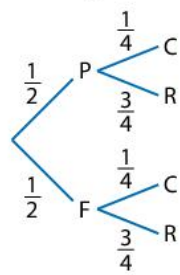
2. Calcul de probabilités

Propriété (admise)

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

Exemple

On considère une expérience aléatoire qui consiste à tirer une pièce équilibrée à Pile (P) ou Face (F), puis à choisir un jeton dans une urne contenant un jeton carré (C) et trois jetons ronds (R).



La probabilité de l'issue (F ; C) est alors égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

La probabilité d'obtenir un jeton carré est égale à :

$$P(C) = P((P ; C)) + P((F ; C)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Méthode 1 Reconnaître une succession d'épreuves indépendantes

On pioche trois pions dans une urne contenant cinq pions blancs et deux pions rouges et on note leurs couleurs. Il est possible de piocher ces trois pions de trois façons différentes.

- Méthode A : les trois simultanément.
- Méthode B : l'un après l'autre, sans remise.
- Méthode C : l'un après l'autre, avec remise.
- Une de ces méthodes correspond à une succession d'épreuves indépendantes. Laquelle ?

Solution commentée

- La méthode A présente un univers qui se compose du nombre de parties à trois éléments dans un ensemble à 7 éléments. Il y a donc $\binom{7}{3}$ issues. On ne reconnaît pas une succession d'épreuves.
- La méthode B correspond à une succession de trois épreuves (piocher un jeton l'un après l'autre) mais induit une modification de la composition de l'urne entre chaque épreuve : les deuxième et troisième épreuves sont donc dépendantes des précédentes.
- La méthode C est une succession de trois épreuves indépendantes (piocher un jeton) car, entre chaque pioche, l'urne reste identique, et chaque épreuve est indépendante de la précédente.

EXERCICE 1 p. 420

Méthode 2 Exploiter une succession d'épreuves indépendantes

À bord d'un bateau de longue traversée, le cuisinier pioche pour chaque repas au hasard dans le placard des féculents, qui contient 200 sacs de riz (événement R) et 300 sacs de pâtes (événement $\overline{R}$) ; puis au hasard dans le placard des protéines, qui contient 300 boîtes de thon (événement T), 200 boîtes de viande de veau (événement V) et 100 boîtes de viande de bœuf (événement B).

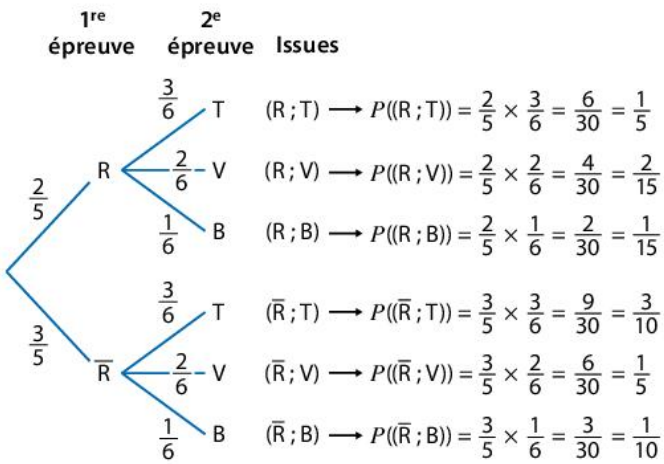
1. À l'aide du produit cartésien, lister les différents menus que le cuisinier peut proposer aux matelots.
2. Donner la probabilité de chacun des menus après avoir dressé un arbre représentant la situation.

Solution commentée

1. Le choix d'un menu repose sur la succession de deux épreuves indépendantes, car le choix se fait au hasard dans les deux placards. La première épreuve a pour univers $\Omega_1 = \{R ; \overline{R}\}$ et la deuxième épreuve $\Omega_2 = \{T ; V ; B\}$. Les différents menus sont donc regroupés dans l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$, à savoir :

$$\{(R ; T),(R ; V),(R ; B),(\overline{R} ; T),(\overline{R} ; V),(\overline{R} ; B)\}.$$

2. La probabilité d'une issue se calcule en faisant le produit des probabilités écrites sur les branches qui mènent à cette issue



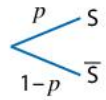
EXERCICE 2 p. 420

2. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

1. Épreuve et schéma de Bernoulli

Définition

Soit p un réel compris entre 0 et 1. On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre p** une expérience aléatoire ayant deux issues : l'une nommée « succès » notée S, de probabilité p, et l'autre « échec » notée $\overline{S}$.



Propriété

DÉMO en ligne

Soit p un réel compris entre 0 et 1. La **loi** d'une épreuve **de Bernoulli** de paramètre p est donnée par le tableau ci-contre.

Issue	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel compris entre 0 et 1.
Soit n un entier naturel non nul. On définit un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p** lorsqu'on répète n fois de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli.

Remarque

Si l'on définit X comme la variable aléatoire égale au nombre de succès dans ce schéma, X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$.

2. Loi binomiale

Soient n entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Définition

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans ce schéma.
On dit alors que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

Propriété

DÉMO p. 412

La loi de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p est donnée, pour tout entier k compris entre 0 et n, par $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Propriétés

DÉMO p. 444

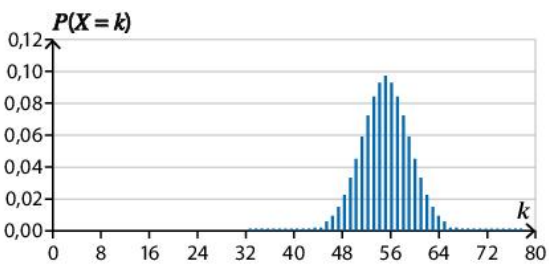
Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes.

Exemple

La représentation graphique de la loi binomiale $\mathcal{B}(80\ ;\ 0{,}7)$ est donnée ci-contre.



Méthode 1 Reconnaître un schéma de Bernoulli

Pourquoi l'énoncé suivant peut-il être modélisé par un schéma de Bernoulli ?
« Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre vertes et deux jaunes.
On tire successivement au hasard deux boules de l'urne, en prenant soin de remettre la première boule tirée dans l'urne. On s'intéresse au nombre de boules vertes tirées. »

Solution commentée

On répète deux fois une épreuve de Bernoulli (il y a deux issues uniquement à chaque tirage) avec une répétition identique et indépendante. En effet, la première boule tirée ne change pas la composition de l'urne avant le deuxième tirage, puisqu'il y a remise. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{4}{6}$.

EXERCICE 9 p. 420

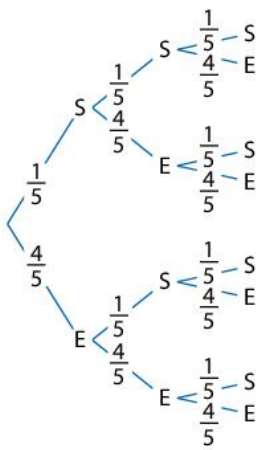
Méthode 2 Déterminer une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{5}$.

- Donner la loi de X.

Solution commentée

On note S le succès et E l'échec.



$$P(X=0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 \times \frac{64}{125} = \frac{64}{125}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{5} \times \frac{16}{25} = \frac{48}{125}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{25} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{125}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{125} = \frac{1}{125}$$

On obtient donc la loi de X dans le tableau suivant.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

EXERCICE 13 p. 421

Méthode 3 Étudier une situation avec une loi binomiale

Un sac contient 150 jetons indiscernables au toucher dont 105 sont gris et les autres sont marron.
On tire au hasard, successivement et avec remise, dix jetons de ce sac.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux jetons gris.
2. Si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience, combien de jetons gris obtient-on en moyenne ?

Solution commentée

1. On répète dix fois la même épreuve de Bernoulli (dont le succès est « obtenir un jeton gris ») de paramètre $p = \frac{105}{150} = 0{,}7$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}7$. La variable aléatoire X comptant le nombre de jetons gris obtenus suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}7)$. On cherche $P(X \geqslant 2)$.

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{10}{1} \times 0{,}7^0 \times 0{,}3^{10} - \binom{10}{1} \times 0{,}7^1 \times 0{,}3^9 \approx 0{,}9999$$

La probabilité d'obtenir au moins deux jetons gris est donc d'environ 0,9999.

2. Cela revient à calculer l'espérance de la variable X : $E(X) = 10 \times 0{,}7 = 7$. Si l'on réitère un grand nombre de fois cette expérience, on obtient sept jetons gris en moyenne par expérience.

EXERCICE 25 p. 422

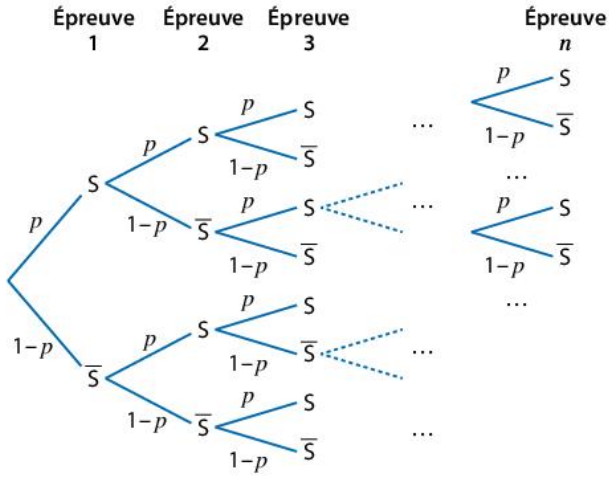
Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p, la loi de la variable aléatoire X est donnée, pour tout entier k compris entre 0 et n, par $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration

X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On représente le schéma de Bernoulli par l'arbre suivant.



- Soit k un nombre entier compris entre 0 et n. Sur un des chemins menant à exactement k succès, on dénombre k fois la probabilité p et $(n-k)$ fois la probabilité $(1-p)$. (1)

La probabilité de l'issue correspondant à ce chemin est donc égale à $p^k(1-p)^{n-k}$. (2)

- Le nombre de chemins menant à k succès et donc à $(n-k)$ échecs est égal au nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. (3)

Ce nombre s'écrit $\binom{n}{k}$ (voir le chapitre 9).

- On sait que l'événement $(X=k)$ est la réunion de tous les chemins présentant exactement k succès, donc sa probabilité est égale à la somme des probabilités de chacun des chemins qui le composent.
- Ainsi, $P(X=k)=P(\text{chemin 1})+P(\text{chemin 2})+P(\text{chemin 3})+\ldots$

$P(X=k)=p^k(1-p)^{n-k}+p^k(1-p)^{n-k}+p^k(1-p)^{n-k}+\ldots$ (le même nombre répété $\binom{n}{k}$ fois).

- Par conséquent, $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k(1-p)^{n-k}$.

1. Expliquer pourquoi, à la ligne (1), on écrit : « $(n-k)$ fois la probabilité $(1-p)$ ».
2. Justifier le résultat de la ligne (2).
3. Écrire, sous forme d'un n-uplet formé de S et de $\overline{S}$, le chemin le plus « en haut » rencontré dans l'arbre qui présente exactement k succès. Justifier alors l'affirmation de la ligne (3).

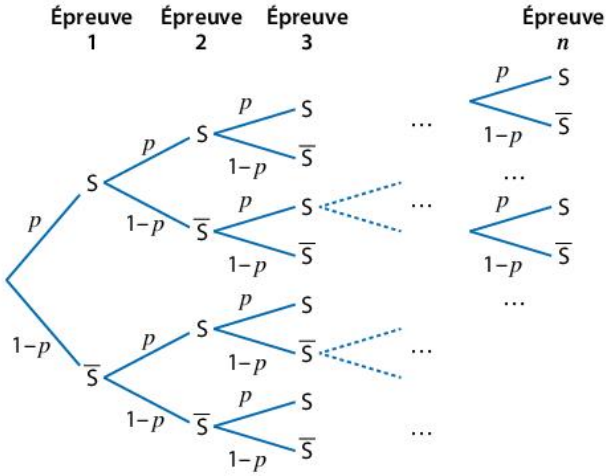
Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante d'une autre manière que dans le chapitre 9.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < n$. On a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de cette propriété.

- En considérant l'arbre ci-contre, constitué de chemins de longueur n contenant les succès et les échecs d'un schéma de Bernoulli, déterminer le nombre d'échecs sur un chemin menant à k succès.
- En déduire que le nombre de chemins menant à k succès est le même que celui menant à $(n-k)$ échecs.
- En utilisant le rôle symétrique que possèdent les échecs et les succès sur une branche donnée, montrer que le nombre de chemins menant à $(n-k)$ échecs est le même que celui de chemins menant à $(n-k)$ succès.
- Conclure.



2 On souhaite démontrer la propriété suivante d'une autre manière que dans le chapitre 9.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < n$. On a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de cette propriété.

- Tracer l'allure de l'arbre qui représente $(n+1)$ répétitions d'une épreuve de Bernoulli, sur le même modèle que l'arbre de la démonstration 1.
- Expliquer pourquoi l'événement A : « obtenir $(k+1)$ succès parmi $(n+1)$ épreuves » est la réunion des événements B : « obtenir exactement k succès parmi n épreuves » et C : « obtenir exactement $(k+1)$ succès parmi n épreuves ».
- Déterminer si ces deux événements sont incompatibles, c'est-à-dire s'il existe ou non un chemin de l'arbre qui réalise A et B en même temps.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

On considère une répétition de 50 épreuves de Bernoulli pour lesquelles le succès a une probabilité de 0,7. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On suppose que $E(X) = 42$.

- Peut-on affirmer que les répétitions se font de façon identique et indépendante ?

Raisonnement par l'absurde

Dans un raisonnement par l'absurde, on suppose qu'un énoncé est vrai et on aboutit à une contradiction.

Répéter en solo

Carte mentale

Représenter une succession d'épreuves indépendantes

- Si l'expérience aléatoire est une succession de n épreuves indépendantes E_i d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, l'univers des issues possibles est :

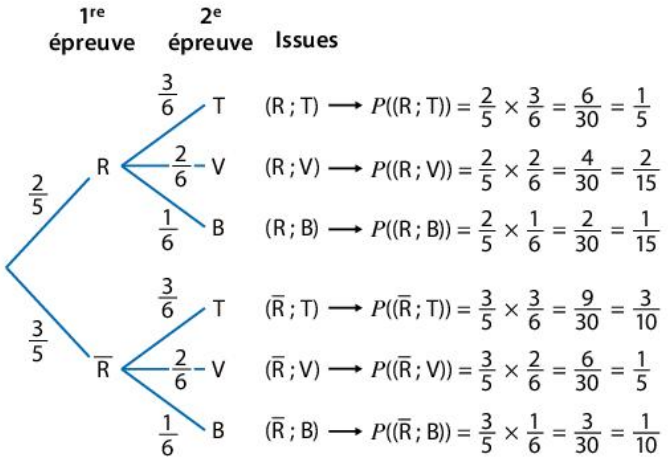
$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n.$$

- Une issue de l'expérience est un n-uplet $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$, où i_p est une issue de l'épreuve E_p.

Calculer la probabilité d'une issue $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

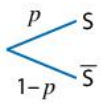
Exemple :



Loi binomiale

Reconnaître un schéma de Bernoulli

- Une **épreuve de Bernoulli de paramètre p** est une expérience aléatoire ayant deux issues : l'une nommée « succès » (noté S) de probabilité p, et l'autre nommé « échec » (noté $\overline{S}$) de probabilité $1 - p$.



- Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, cette épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p.**

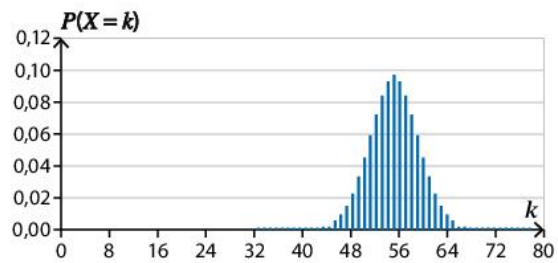
Calculer la probabilité de k succès avec la loi binomiale

- Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n répétitions suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathcal{B}(n ; p)$.

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple : $\mathcal{B}(80 ; 0{,}7)$



- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Dans un jeu de société, on doit lancer deux dés à six faces. Si l'on obtient deux fois le même chiffre, on a le droit de rejouer.
À l'aide d'une ébauche d'arbre, on peut dire que la probabilité de rejouer est égale à :

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{36}$ (c) $\frac{1}{2}$

2 Dans une urne ne contenant que des boules blanches et noires, on tire une boule à chaque fois, avec remise. On renouvelle dix fois l'expérience et on compte le nombre X de boules blanches obtenues.

(a) La probabilité de tirer une boule blanche est toujours la même d'un tour à l'autre.
(b) La probabilité de tirer une boule blanche augmente à chaque tour.
(c) La variable aléatoire X ne suit pas un schéma de Bernoulli.

3 On lance dix fois un dé équilibré à six faces. On répète un grand nombre de fois cette expérience. Le nombre moyen de « 6 » obtenus est :

(a) $\frac{1}{6}$ (b) 5 (c) $\frac{5}{3}$

4 Lorsqu'on représente un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 7$ et $p = 0{,}5$ par un arbre, le nombre de chemins menant à quatre succès s'écrit :

(a) $\binom{7}{0{,}5}$ (b) $\binom{7}{4}$ (c) $\binom{4}{7}$

5 Lorsqu'on représente un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 7$ et $p = 0{,}5$ par un arbre, le nombre de chemins menant à quatre succès est égal à :

(a) 35 (b) 28 (c) 2

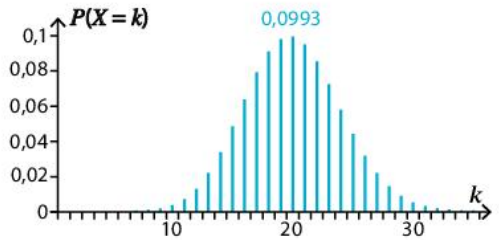
6 Si la variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}3)$, alors $P(Z = 8)$ vaut :

(a) $\frac{2}{5}$.
(b) à peu près 0,1144.
(c) à peu près 0,0039.

7 Si la variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}3)$, alors $P(Z \leqslant 6)$ vaut :

(a) 0,3.
(b) à peu près 0,4164.
(c) à peu près 0,608.

8 On a représenté une loi binomiale avec en abscisse le nombre de succès et en ordonnée la probabilité correspondante.



L'espérance de cette loi et proche de :

(a) 0,10 (b) 2 (c) 20

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 Si un candidat à un concours répond au hasard aux dix questions d'un exercice de type « vrai ou faux », alors le nombre de réponses justes suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}5$.

2 Si Z est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}5)$, alors la probabilité que le nombre de succès atteigne ou dépasse 6 est à peu près égal à 0,9894.

3 Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}3$ et a pour espérance 300, alors $n = 300$.

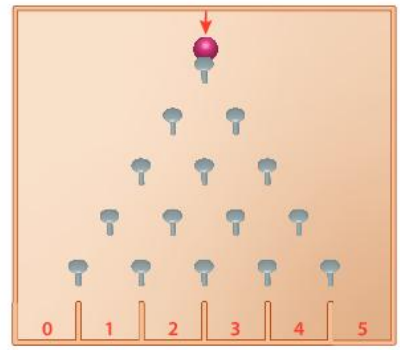
4 X étant une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, si $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$, alors $P(X = 29) \approx 0{,}010$.

5 Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200\ ;\ 0{,}4)$, alors :
$P(X \geqslant 90) < P(X \leqslant 75)$.

TP 1 Planche de Galton ALGO PYTHON

Objectif Simuler le fonctionnement d'une planche de Galton avec un algorithme.

La planche de Galton (voir p. 404) est un dispositif permettant d'illustrer un schéma de Bernoulli.
Elle est constituée d'une planche en bois verticale sur laquelle sont fixées un certain nombre de rangées de clous.
On lance une bille sur cette planche et, à chaque clou rencontré, la bille passe à droite ou à gauche du clou avec une probabilité de 0,5.
Elle termine son trajet dans les cases numérotées en bas de la planche.



On considère cinq rangées de clous. Une partie consiste à lancer une bille en haut de la planche, comme indiqué sur le schéma ci-dessus, et on cherche à savoir dans quelle case la bille va arriver.
La fonction ci-dessous écrite en Python simule une partie.

```
1  import random
2
3  def galton5():
4      L=[]
5      for i in range(6):
6          L.append(0)
7      S=0
8      for k in range(5):
9          S=S+random.randint(0,1)
10     L[S]=L[S]+1
11     return L
```

1. Que représente le nombre 6 dans la ligne 5 de l'algorithme ?
2. À quoi servent les lignes 4 à 6 de l'algorithme ?
3. Que représentent chacune des deux valeurs renvoyées par l'instruction `random.randint(0,1)` ? Que contient la liste L ?
4. Tester six fois la fonction, noter les résultats obtenus puis recopier et compléter le tableau suivant.

Case	0	1	2	3	4	5
Nombre de billes						

5. On souhaite pouvoir choisir le nombre de billes lancées et obtenir directement les résultats comme à la question **4**. À l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `galton5_bis` qui prend en argument le nombre `n_billes` de billes lancées et renvoie la même liste L.
6. On souhaite obtenir les fréquences d'apparition des billes dans chaque case.

   a. Compléter la fonction ci-contre afin que la liste L renvoie les fréquences d'apparition des billes dans chaque case.

   b. Tester la fonction précédente pour différents nombres de billes, puis noter le résultat obtenu pour 100 000 billes.

```
13 def galton5_frequence(n_billes):
14     L=galton5_bis(n_billes)
15     for i in range(len(L)):
16         ........
17     return L
```

7. On considère que l'on gagne à chaque fois que la bille passe à droite d'un clou. Le numéro de la case correspond donc au nombre de succès obtenus lors de son passage à travers les cinq rangées de clous. On note X le nombre de fois où la bille est passée à droite d'un clou.

   a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

   b. Comparer avec la réponse à la question **6.b**. Expliquer le résultat.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- La bibliothèque « random » contient toutes les fonctions qui permettent de simuler le hasard.
- La fonction `random.randint(0,1)` renvoie aléatoirement le nombre 0 ou 1.

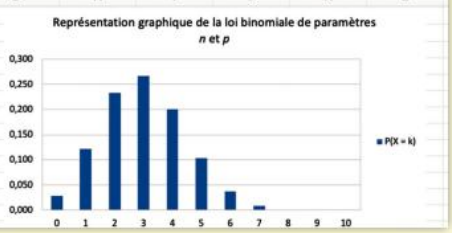
TP 2 Représentation de la loi binomiale TABLEUR

Objectif Représenter graphiquement une loi binomiale à l'aide d'un tableur.

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

1. À l'aide du tableur, on peut réaliser un diagramme en bâtons représentant graphiquement cette loi.

	A	B	C	D	E	F
1	k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$		n	p
2	0	0,028	0,028		10	0,3
3	1	0,121	0,149			
4	2	0,233	0,383			
5	3	0,267	0,650			
6	4	0,200	0,850			
7	5	0,103	0,953			
8	6	0,037	0,989			
9	7	0,009	0,998			
10	8	0,001	1,000			
11	9	0,000	1,000			
12	10	0,000	1,000			
13						



On a entré dans les cellules E2 et F2 les valeurs de n et de p afin de pouvoir faire varier ces valeurs.

a. Quelle est la formule entrée dans la cellule B2 puis recopiée vers le bas ?

b. Quelle est la formule entrée dans la cellule C2 puis recopiée vers le bas ?

c. Quelles colonnes faut-il sélectionner pour réaliser le diagramme ?

d. Reproduire la feuille de tableur ci-dessus et réaliser le diagramme.

2. Observer le diagramme pour $p = 0{,}2$; $p = 0{,}6$ et $p = 0{,}9$. Que remarque-t-on ?

3. Réaliser le diagramme représentant une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}3$.

TP 3 Surréservation TABLEUR

Objectif Simuler et utiliser la loi binomiale avec un tableur.

Une compagnie aérienne dispose d'un avion de 150 places. On suppose que, pour chaque client ayant acheté un billet, la probabilité qu'il se présente à l'embarquement est de 90 %. Pour cette raison, la compagnie aérienne pratique la surréservation, c'est-à-dire qu'elle vend plus de billets que de places disponibles.

1. On suppose que la compagnie vend 170 billets.

a. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients ayant acheté un billet et qui se présentent à l'embarquement. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. À l'aide du tableur, calculer les valeurs de $P(X \leqslant k)$ pour k entre 0 et 170.

c. Déterminer la probabilité qu'il y ait des clients ayant acheté un billet qui n'aient pas de place dans l'avion.

2. La compagnie veut limiter la surréservation. Elle souhaite que la probabilité qu'un client ayant acheté un billet n'ait pas de place soit inférieure à 0,02. Elle cherche à déterminer le nombre de billets maximal qu'elle doit vendre pour que cela soit respecté.
On considère la variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}9$.

a. Montrer que le problème revient à déterminer le plus grand entier n tel que $P(X_n \leqslant 150) < 0{,}98$.

b. À l'aide du tableur, déterminer les valeurs des probabilités $P(X_n \leqslant 150)$ pour n entier compris entre 150 et 170.

c. Conclure.

Boîte à outils

Tableur

- La formule `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)` permet d'obtenir la valeur de $P(X = k)$ lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
- La formule `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` permet d'obtenir la valeur de $P(X \leqslant k)$ lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Se préparer à l'oral

Calcul mental

1 Calculer le plus rapidement possible.

a. $\binom{50}{0}$ b. $\binom{8}{7}$ c. $\binom{16}{16}$

2 Calculer le plus rapidement possible.

a. $\binom{3}{1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

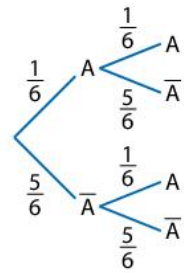
b. $\binom{4}{1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$

c. $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$

3 On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;p)$ telle que $E(X)=7$.

• Calculer p, puis $\sigma(X)$.

4 D'après cet arbre, quelle est la probabilité d'avoir au moins un « A » après deux épreuves ?



5 La variable aléatoire X suit une loi binomiale et on sait que $P(6\leqslant X\leqslant 9)\approx 0{,}39$ et $P(X\leqslant 9)\approx 0{,}41$.

1. A et B étant deux événements, rappeler la formule qui permet de calculer $P_B(A)$.
2. Calculer $P_{(X\leqslant 9)}(6\leqslant X)$.

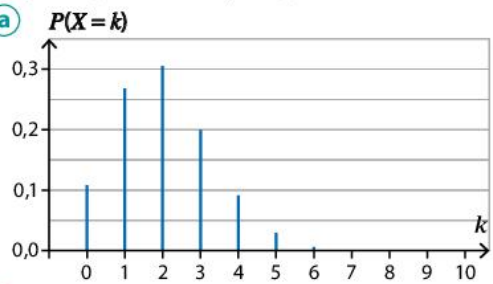
DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

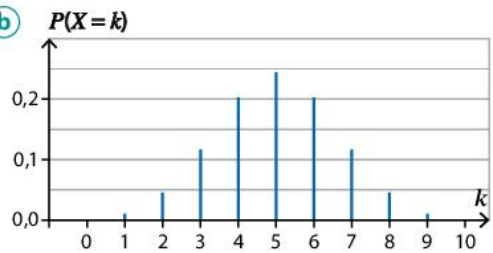
6 Associer chaque loi binomiale ci-dessous à sa représentation graphique.

• $\mathcal{B}\left(10\,;\frac{3}{4}\right)$ • $\mathcal{B}\left(10\,;\frac{1}{5}\right)$ • $\mathcal{B}(10\,;0{,}5)$

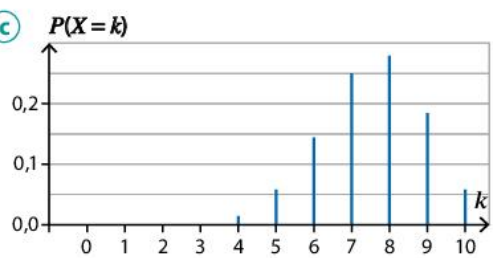
(a)



(b)



(c)



7 Dans un jeu de 52 cartes, on pioche successivement 10 cartes. On s'intéresse au nombre de « roi » obtenus.

1. Que faut-il imposer à la règle du jeu en plus pour retrouver le cadre d'une loi binomiale ?
2. Quels sont alors ses paramètres ?

8 Dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n=4$ et $p=0{,}3$, combien de chemins mènent à exactement un échec ?

9 On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;\,0{,}1)$.

Expliciter les événements contraires des événement suivants.

1. A : « obtenir au moins trois succès ».
2. B : « $X<5$ ».
3. C : « $X=0$ ».

10 La variable aléatoire X suit une loi binomiale et on donne :

$$P(X=7)=\binom{50}{7}\times 0{,}3^{43}\times 0{,}7^{7}.$$

Quelle(s) expression(s) donne(nt) $P(X=10)$?

(a) $\binom{50}{10}\times 0{,}3^{10}\times 0{,}7^{40}$ (b) $\binom{50}{40}\times 0{,}3^{10}\times 0{,}7^{40}$

(c) $\binom{50}{10}\times 0{,}3^{40}\times 0{,}7^{10}$ (d) $\binom{50}{40}\times 0{,}3^{40}\times 0{,}7^{10}$

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si la proposition est vraie ou fausse.

Une classe de terminale compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés aux cours précédents.

• Le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 est égal à 30.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Une entreprise de produits bio fabrique, en très grande quantité, des gélules dont la masse est exprimée en milligramme. On admet que 4 % des gélules de ce type produites par l'entreprise ne sont pas acceptables en ce qui concerne leur masse. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélèvement de N gélules à un tirage de N gélules avec remise.

• Commenter les propos de trois salariés de l'entreprise.

– Responsable du conditionnement : « Avec un taux de non-conformité de 4 % par gélule, si nous conditionnons les gélules par sachets de 10, nous aurons moins de 70 % de nos sachets qui ne comporteront que des gélules acceptables. »

– Responsable marketing : « Avec un taux de non-conformité de 4 % par gélule, si nous conditionnons les gélules par sachets de 10, nous aurons au moins 95 % de nos sachets qui comporteront 9 ou 10 gélules conformes. »

– Responsable qualité : « La probabilité de n'avoir que des gélules acceptables au sein d'un sachet de 10 doit être supérieure ou égale à 0,8. Il faut déterminer le taux de non-conformité maximal par gélule pour pouvoir atteindre cet objectif. »

Préparer un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg a été énoncé par Nicolas Bernoulli en 1713 sous la forme de la question suivante : « Pourquoi les joueurs refusent de jouer à un jeu tout leur argent alors que ce jeu propose une espérance de gain infinie ? »

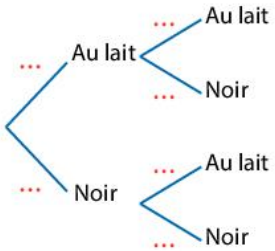
• Rechercher la règle du jeu qu'évoque Bernoulli et détailler le calcul de l'espérance de ce jeu.

+ D'ENTRAÎNEMENT SUR LA PLATEFORME D'EXERCICES

Succession d'expériences

1 Une boîte de chocolats contient quatre chocolats au lait et six chocolats noirs.
On choisit au hasard un chocolat dans la boîte, puis un deuxième.

1. Recopier et compléter l'arbre suivant.



2. Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ? Justifier.
3. Quelle est la probabilité de manger un chocolat de chaque sorte ?

2 Une urne contient dix boules blanches et deux boules rouges. On pioche successivement et au hasard trois boules avec remise.

1. À l'aide du produit cartésien, lister les issues possibles.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux boules blanches.

3 On considère deux urnes A et B. L'urne A contient trois jetons jaunes et deux jetons bleus. L'urne B contient trois jetons noirs, deux rouges et un jaune. L'expérience consiste à choisir une urne au hasard, puis à piocher un jeton dans l'urne choisie. On s'intéresse à la couleur du jeton saisi.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. Cette expérience est-elle une succession de deux épreuves indépendantes ?
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité de l'événement J : « obtenir une boule jaune ».
4. Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

On rappelle la formule $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

5. On modifie l'expérience précédente, en considérant que l'on choisit l'urne A avec une probabilité égale à p. Pour quelle valeur de p la probabilité de l'événement J est-elle maximale ?

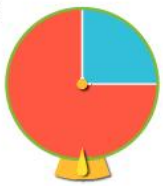
4 Un examen consiste à passer trois épreuves indépendantes.

- Épreuve 1 : on a 80 % de chances de réussir.
- Épreuve 2 : on a 60 % de chances de réussir.
- Épreuve 3 : on a 25 % de chances de réussir.

On est reçu à l'examen si l'on réussit au moins deux épreuves sur trois.

- Quelle est la probabilité de réussir l'examen ?

5 On fait tourner trois fois la roue de loterie ci-contre dont un quart de la surface est bleue.



1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la couleur bleue ?
2. On gagne si l'on obtient au moins une fois la couleur bleue. Quelle est la probabilité de gagner ?

6 Dans une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5, on tire au hasard une boule puis, sans la remettre, on tire une seconde boule. On note b le numéro porté par la première boule et c le numéro porté par la seconde.
X est la variable aléatoire qui, à un tirage, associe le nombre de solutions de l'équation du second degré :

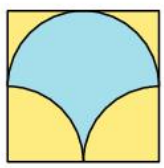
$$x^2 + bx + c = 0.$$

- Déterminer la loi de probabilité de X.

7 Un drone A est muni de deux moteurs et un drone B est doté de quatre moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne. Les pannes surviennent de façon indépendante.
Chaque drone arrive à destination si et seulement si strictement moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne.

- Quel drone doit-on choisir ?

8 Un pistolet au laser, commandé par un logiciel, vise au hasard un point de la cible ci-contre, composée d'un carré de côté 2 m, la partie bleue étant limitée par un demi-cercle et deux quarts de cercle.



On tire deux fois sur cette cible et on gagne si on atteint au moins une fois la zone bleue.

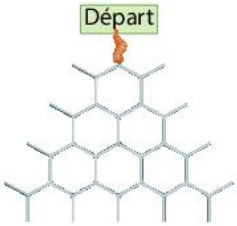
- Quelle est la probabilité de gagner ?

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

9 CALCULATRICE Une entreprise dispose d'un parc de 600 ordinateurs neufs. La probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne pendant la première année est de 0,1. La panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner ses paramètres.
2. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre d'ordinateurs tombant en panne durant la première année. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Quelle est la probabilité que 20 appareils tombent en panne la première année ?
4. Quelle est la probabilité que 40 appareils ou moins tombent en panne durant la première année ?

10 Une chenille processionnaire descend le long du grillage ci-contre. À chaque jonction de fil, elle prend la maille de droite une fois sur trois, celle de gauche deux fois sur trois. Elle descend ainsi quatre niveaux.



1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli et donner ses paramètres.
2. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre de fois où la chenille a pris la maille de droite. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Calculer $P(X = 3)$, puis interpréter le résultat.
4. Quelle est la probabilité que la chenille ait pris trois fois la maille de gauche sur les quatre niveaux ?

11 Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel.
On choisit dix personnes dans l'entreprise, qui possède un effectif suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre de personnes choisies qui ont suivi le stage.
1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer $P(X = 3)$. Que représente ce nombre ?
3. Calculer la probabilité que quatre personnes au plus parmi les dix choisies aient suivi le stage.
4. Calculer la probabilité qu'au moins cinq personnes parmi les dix choisies aient suivi le stage.

12 **Communiquer**
On lance dix fois un dé cubique non truqué.
1. Décrire le schéma de Bernoulli associé à cette expérience si on s'intéresse au nombre de « 6 » obtenus.
2. Décrire le schéma de Bernoulli associé à cette expérience si on s'intéresse au nombre de multiples de 3 obtenus.

13 Le daltonisme est une anomalie de la vision affectant la perception des couleurs. La fréquence du daltonisme en France est de 8,5 % pour les hommes et de 0,4 % pour les femmes. On considère que la taille de la population française est suffisamment grande pour que le choix de personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise.
1. On choisit au hasard 20 hommes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir deux daltoniens ?
2. On choisit au hasard 20 femmes dans la population française. Quelle est la probabilité d'obtenir deux daltoniennes ?

14 CALCULATRICE **Calculer**
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,71$.
Calculer, à 10^{-3} près, les probabilités suivantes.
1. $P(X = 25)$ 2. $P(X \leqslant 30)$ 3. $P(X < 20)$
4. $P(X > 21)$ 5. $P(X \geqslant 12)$

15 CALCULATRICE X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que :
$$P(X = 4) = \binom{13}{4} \times 0,3^4 \times 0,7^9.$$
• Déterminer $P(X = 8)$.

16 X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale telle que :
$$P(X = 5) = \binom{17}{5} \times 0,2^5 \times 0,8^{12}.$$
• Inventer un énoncé de situation faisant intervenir cette variable aléatoire.

17 Dans une entreprise, la probabilité qu'un ordinateur soit défaillant est égale à 0,09. On considère que les pannes informatiques sont indépendantes les unes des autres.
1. Calculer la probabilité que, dans le service comptabilité qui compte 24 ordinateurs, trois ordinateurs exactement tombent en panne.
2. Ce service peut assumer son travail si au moins $\frac{3}{4}$ des ordinateurs fonctionnent. Quelle est la probabilité que ce service ne puisse pas continuer son travail ?

18 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et p est partiellement donnée ci-dessous.

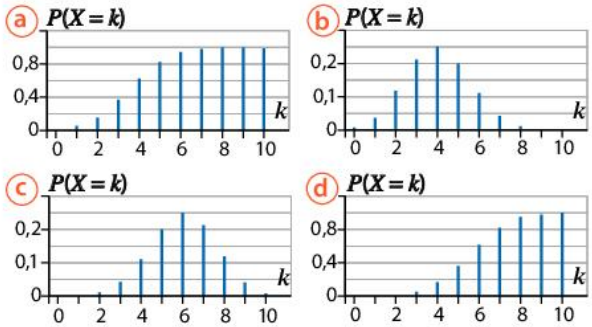
k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{16}{81}$				

• Déterminer le paramètre p et compléter le tableau après l'avoir recopié.

19 **Modéliser**
Une pièce truquée a 40 % de chance de tomber sur « Face ». On donne ci-contre la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de « Face » lors de 15 lancers successifs.
1. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,40$.
2. Que représente le nombre 0,063 ? le nombre 0,991 ?
3. Déterminer la plus petite valeur de N pour que la probabilité d'avoir au plus N « Face » dépasse 90 %.

k	$P(X = k)$	$P(X \leqslant k)$
0	0	0
1	0,005	0,005
2	0,022	0,027
3	0,063	0,091
4	0,127	0,217
5	0,186	0,403
6	0,207	0,610
7	0,177	0,787
8	0,118	0,905
9	0,061	0,966
10	0,024	0,991
11	0,007	0,998
12	0,002	1
13	0	1
14	0	1
15	0	1

20 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et p.
Parmi les graphiques suivants, lequel représente :
1. les valeurs de $P(X = k)$ pour $p = 0,4$?
2. les valeurs de $P(X \leqslant k)$ pour $p = 0,4$?
3. les valeurs de $P(X = k)$ pour $p = 0,6$?
4. les valeurs de $P(X \leqslant k)$ pour $p = 0,6$?

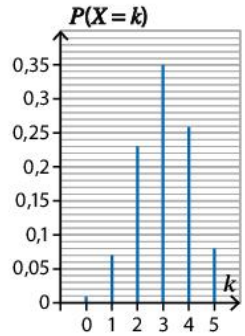


21 Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante et la probabilité qu'un retard se produise pour le dépannage à la suite d'un appel est $p = 0,25$. Un même client a appelé le service à huit dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subis.
1. Définir la loi de probabilité de X.
2. Calculer les probabilités des événements :
a. A : « le client a subi au moins un retard » ;
b. B : « le client a quatre retards ou moins ».

22 CALCULATRICE **Sondage sur un barrage**

On interroge 56 personnes et la variable aléatoire X compte le nombre de personnes qui sont contre la construction d'un barrage. Les sondages précédents annoncent que 65 % des personnes interrogées sont contre la construction du barrage. On considère que les résultats n'ont pas changé et que la population est suffisamment grande pour considérer que le sondage s'assimile à un tirage avec remise.
1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'exactement 40 personnes interrogées soient contre la construction du barrage ?
3. Quelle est la probabilité de compter 35 opposants ou moins à la construction du barrage ?
4. Quelle est la probabilité de compter au moins 30 opposants à la construction du barrage ?

23 **Chercher**
On a représenté graphiquement ci-contre une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.
• Avec un minimum de calcul, déterminer les valeurs des paramètres n et p.



24 CALCULATRICE **Raisonner**
Une élève répond au hasard et indépendamment à chacune des dix questions d'un QCM. Pour chaque question, il y a trois propositions dont une seule est correcte. Soit X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'élève.
1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'élève obtienne exactement une bonne réponse.
3. Recopier puis compléter le tableau suivant à 10^{-3} près.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,017		0,195		0,228	
k	6	7	8	9	10	
$P(X = k)$	0,057	0,016	0,003	0	0	

4. Chaque bonne réponse rapportant un point, quelle est la probabilité que l'élève ait au moins la moyenne ?
5. Combien faudrait-il de questions pour que la probabilité que l'élève obtienne au moins une bonne réponse dépasse 99 % ?

Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

25 Dans la population française, 6 % des personnes sont donneurs universels, c'est-à-dire que leur groupe sanguin est O négatif.
60 donneurs se présentent au centre de transfusion pendant une semaine. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de donneurs universels parmi les 60 personnes qui se présentent.
1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Établir la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins deux donneurs soient de groupe O négatif ?
4. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce nombre.

26 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,4$.
1. Calculer $P(X = 23)$ et $P(X \leqslant 12)$.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

27 Clara dispose de 20 fléchettes. À chaque lancer, elle a une probabilité égale à 0,1 de tirer au centre de la cible. On suppose les lancers indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes que Clara a mises au centre de la cible.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité que Clara mette au plus une fléchette au centre de la cible.
3. Calculer l'espérance de X.

28 Dans un club de tir, le meilleur tireur touche une cible 19 fois sur 20. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par ce tireur lors d'une série de cinq tirs.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par T.
2. Quelle est la probabilité que ce tireur réussisse exactement trois tirs ?
3. Calculer $P(T \geqslant 4)$.
4. Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$. Que représentent ces résultats ?

29

Dans le métro d'une ville, on estime que 9 % des voyageurs fraudent. Chaque jour, dans une station, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Déterminer les paramètres de la loi que suit X.
2. Combien de personnes, en moyenne, vont être signalées en fraude lors d'un de ces contrôles ?

30 Dans un pays comportant 8 % de gauchers, on choisit au hasard 15 personnes. On appelle G la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans l'échantillon.

• En supposant la population assez importante pour considérer que les tirages peuvent être assimilés à des tirages avec remise, déterminer la loi de probabilité de G ainsi que son espérance. Interpréter.

31

1. Rappeler les formules permettant de calculer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
2. Proposer des couples de valeurs $(n\,;p)$ et $(n'\,;p')$ tels que les variables aléatoires suivant les lois $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $\mathcal{B}(n'\,;p')$ aient la même espérance, mais des écarts types différents.
3. TABLEUR Avec les valeurs proposées à la question précédente, représenter avec un tableur la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, puis la loi $\mathcal{B}(n'\,;p')$. On pourra s'aider du TP 2 p. 417.
4. Comment se traduit graphiquement la différence d'écart type entre les deux lois binomiales ?

32 **Faire mouche**

Antoine et Romain sont des fameux pêcheurs. On note A la variable aléatoire égale au nombre de lancers réussis lors d'une série de 15 lancers pour Antoine et R celle pour Romain lors d'une série de 25 lancers. Un lancer est réussi lorsqu'un poisson vient s'accrocher à l'hameçon. À chaque lancer, un poisson mord à la ligne d'Antoine avec une probabilité de 0,4 alors qu'elle vaut 0,25 pour Romain.

1. Préciser les lois de probabilité suivies par A et R.
2. Quelles sont les probabilités que ces pêcheurs réussissent chacun exactement trois lancers ?
3. Calculer $E(A)$, $\sigma(A)$, $E(R)$ et $\sigma(R)$.
4. Interpréter ces résultats.

33 Une entreprise fabrique des téléphones portables. Un test de performance est appliqué à ces téléphones : il est positif dans 96 % des cas. Un téléphone dont le test est positif est vendu 500 €. Si le test est négatif, il est soldé à 300 €.

On prélève au hasard 400 téléphones dans la production. Le volume de la production permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de téléphones conformes parmi les 400.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter.
3. TABLEUR On appelle G la variable aléatoire qui modélise la recette réalisée sur la vente des 400 téléphones.

a. À l'aide d'un tableur, donner la loi de G.

b. En déduire la recette moyenne réalisée sur la vente de 400 téléphones.

34 **Entraînement au biathlon**

Une biathlète effectue à l'entraînement une série de 20 tirs considérés indépendants. De façon habituelle, elle atteint sa cible neuf fois sur dix.

1. Proposer un modèle de représentation de la situation.
2. Calculer la probabilité qu'elle atteigne toujours la cible.
3. Calculer la probabilité qu'elle atteigne au moins une fois la cible.
4. En moyenne, combien de fois atteindra-t-elle la cible lors d'une série d'entraînement de 20 tirs ?

35 CALCULATRICE **Calculer**

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$.

1. Calculer les probabilités suivantes en donnant le résultat à 10^{-3} près.

a. $P(X = 3)$ b. $P(X \leqslant 5)$

c. $P(X > 4)$ d. $P(X < 7)$

e. $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$ f. $P_{(X \leqslant 9)}(6 \leqslant X)$

g. $P_{(X \leqslant 5)}(6 \leqslant X)$ h. $P_{(X \leqslant 9)}(X \leqslant 8)$

2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

36 On donne ci-dessous la table de valeurs d'une loi binomiale calculée avec le tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	k	0	1	2	3	4
2	$P(X = k)$	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

1. Déterminer les paramètres de cette loi.
2. Quelle formule a été entrée dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite afin d'obtenir ces résultats ?

On pourra s'aider de la boîte à outils p. 417.

37 On donne ci-dessous la table de valeurs des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$ d'une loi binomiale calculée avec le tableur.

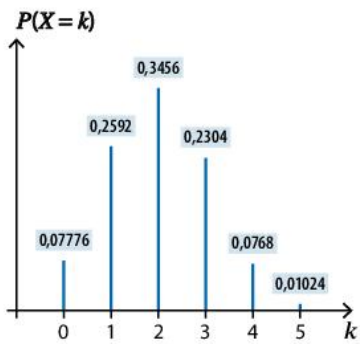
	A	B	C	D	E	F	G
1	k	0	1	2	3	4	5
2	$P(X \leqslant k)$	1,00E-05	0,0005	0,0086	0,0815	0,4095	1

1. Déterminer les paramètres de cette loi.
2. Quelle formule a été entrée dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite afin d'obtenir ces résultats ?

On pourra s'aider de la boîte à outils p. 417.

38 **Représenter**

On a représenté graphiquement la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p.



1. Donner la valeur du paramètre n.
2. Calculer l'espérance de X.
3. En déduire la valeur du paramètre p.

39 Sous l'hypothèse que 4 % des êtres humains ont les cheveux roux, calculer la probabilité que, parmi 100 personnes, 6 au plus aient les cheveux roux.

40 Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissement des courriers publicitaires à envoyer à ses clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de trois lettres sur cinq au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées à quatre médecins d'un cabinet médical.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

a. A : « au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent »

b. B : « exactement deux médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent ».

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 100 lettres envoyées.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Quelle est son espérance ? sa variance ?

41 PRISE D'INITIATIVE

Communiquer

Emma décide d'inviter ses amis à sa fête d'anniversaire. Elle lance les invitations via les réseaux sociaux et reçoit 117 réponses positives. Malheureusement, la salle qu'elle avait prévue ne peut pas accueillir plus de 100 personnes pour des raisons de sécurité. Elle estime qu'une personne ayant répondu favorablement à son invitation a 10 % de chance de se désister.

• Quelle est la probabilité qu'elle ait à changer de salle ?

42 1. On lance trois fois un dé à jouer cubique non pipé et on note le numéro obtenu.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir trois « 5 » ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 15 ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier « 5 » au troisième lancer ?

2. On lance trois fois trois dés à jouer cubiques non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois une somme de 15 ?

43 Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante. Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème dans un conditionnement de 50 mL. On considère que la proportion de pots non conformes dans la production est égale à 0,06.

Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes dans cette commande.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable Y ?
2. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins.
3. Quel est le nombre moyen de pots non conformes dans une commande de 50 pots ?

44 Une entreprise fabrique en grande quantité des poupées pour enfants. Une étude qualité montre que la probabilité qu'une poupée soit défectueuse est égale à 0,08. Un magasin spécialisé dans la vente de jouets commande 60 poupées à cette entreprise.
X désigne la variable aléatoire égale au nombre de poupées défectueuses dans ce lot.
1. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce nombre.
2. TABLEUR Le magasin achète chaque poupée 10 € à l'entreprise et réalise une marge de 2 € sur chaque poupée vendue. On note Y la variable aléatoire égale au gain du magasin sur cette livraison (une poupée défectueuse est invendable et on suppose que toutes les poupées non défectueuses sont vendues).
• À l'aide d'un tableur, donner le gain moyen que le gérant du magasin peut espérer.

45 PRISE D'INITIATIVE
On lance plusieurs fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
• A-t-on plus de chances d'obtenir 10 « Pile » en 20 lancers ou d'obtenir 15 « Pile » en 30 lancers ?

46 Une variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$. Son espérance vaut 0,4 et son écart-type 0,6.
• Déterminer les paramètres n et p.

47 On lance un dé cubique non pipé cinq fois de suite et on s'intéresse au nombre X de lancers nécessaires pour obtenir le premier « 6 ». Si l'on n'obtient pas de « 6 » au bout des cinq lancers, alors X prend la valeur 0.
• Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart type.

48 La responsable d'une agence « Pôle emploi » décide de faire le point avec cinq demandeurs d'emploi qui sont suivis dans son agence. Elle sait que 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience professionnelle. Elle prélève cinq fiches au hasard. On admet que le nombre de demandeurs d'emplois dans son agence est suffisamment grand pour assimiler cette situation à un tirage avec remise.
• Calculer la probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience professionnelle.

49 ALGO
Dans un jeu de grattage, un joueur a 7 % de chances de gagner. On décide de jouer n fois (avec n entier naturel non nul) de façon indépendante.
1. Déterminer la probabilité p_n de gagner au moins une fois.
2. Écrire un algorithme qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n > 0{,}8$.
3. Déterminer cette valeur.

50 **Trajet à vélo**

Un élève se rend à vélo à son lycée et a besoin de 11 minutes lorsque tous les feux sur sa route sont verts. Sur le parcours, il rencontre cinq feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit vert est 0,7 et celle qu'il soit orange ou rouge est de 0,3. Un feu vert ne ralentit pas le cycliste. Un feu orange ou rouge lui fait perdre une minute.
• S'il part 13 minutes avant la sonnerie de début des cours, quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

51 Un fabricant produit et vend 500 consoles de jeu par mois. Le coût de fabrication est de 180 € par console. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués. Le test est positif dans 94 % des cas et une console reconnue conforme peut alors être vendue 310 €. Si le test est négatif, la console est bradée au prix de 190 €.
1. On note C la variable aléatoire qui indique le nombre de consoles conformes parmi les 500 produites pendant un mois. Calculer l'espérance de C.
2. TABLEUR On note B la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. À l'aide d'un tableur, calculer l'espérance de B et interpréter le résultat.

52 Thibault est passionné par les reconstitutions historiques de la Première guerre mondiale. Il s'est inscrit dans une association comptant 500 membres. À chaque séance, les adhérents sont présents avec une probabilité de 0,7, et ce de façon indépendante les uns des autres. T désigne le nombre d'adhérents présents à une séance.
1. Quelle loi suit la variable aléatoire T ? Donner ses paramètres.
2. Combien peut-on espérer de participants pour la prochaine séance ?
3. 230 adhérents ont déjà répondu présent à la prochaine séance. Quelle est la probabilité qu'au moins 400 personnes participent à la prochaine reconstitution ?

53 Une entreprise fabrique en grande quantité des bijoux fantaisie dont 5 % sont défectueux et donc invendables.
On prélève au hasard 60 bijoux dans la production journalière de l'entreprise.
La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 bijoux.
On considère la variable aléatoire X qui indique le nombre de bijoux invendables.
1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. CALCULATRICE Déterminer, à l'aide la calculatrice, la probabilité d'obtenir :
a. trois bijoux invendables.
b. au plus cinq bijoux invendables.
c. un nombre de bijoux invendables inférieur ou égal à 2.
d. un nombre de bijoux invendables strictement supérieur à 6.
3. Calculer l'espérance de X puis interpréter le résultat.

54 Une classe de terminale compte 35 élèves, dont 12 « experts » ont choisi l'enseignement « mathématiques expertes ».
À chaque cours de philosophie, le professeur interroge un élève au hasard, sans se souvenir des élèves précédemment interrogés.
1. Soient n un entier strictement positif et E la variable aléatoire égale au nombre d'élèves « experts » interrogés lors des n premiers cours.
Quelle est la loi suivie par E ?
2. Quelle est la probabilité que, durant les dix premiers cours, exactement cinq élèves « experts » soient interrogés ?
3. À partir de combien de cours la probabilité qu'aucun élève « expert » ne soit interrogé devient-elle inférieure à 0,05 ?
4. Durant le premier trimestre, il y a 40 cours de philosophie.
Combien d'élèves « experts » le professeur peut-il espérer interroger durant cette période ?

55 ALGO PYTHON
On considère la fonction Python suivante.

```
from random import randint
def expe():
    C=0
    for i in range(8):
        A=randint(1,7)
        if A>5:
            C=C+1
    return C
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par cette fonction, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C.
• Quelle loi suit la variable X ? Préciser les paramètres de cette loi.

56 **Tir à l'arc**

Célia pratique le tir à l'arc. Pour chacun de ses tirs, elle a 8 chances sur 10 d'atteindre la cible. On considère que les résultats des tirs sont indépendants les uns des autres.
Célia gagne une partie lorsqu'elle a touché au moins 13 fois la cible.
1. Dans un premier temps, Célia effectue une partie de 15 tirs successifs et on s'intéresse au nombre de fois où elle atteint la cible.
a. Vérifier que cette situation peut se modéliser par une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
b. Quelle est la probabilité que Célia atteigne exactement 6 fois la cible ?
c. Quelle est la probabilité que Célia atteigne 12 fois ou moins la cible ?
d. Quelle est la probabilité que Célia gagne la partie ?
2. Célia choisit un nombre n de tirs successifs par partie et on note X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de fois où elle a touché la cible.
a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.
b. On a réalisé, à l'aide du tableur, la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Nombre de tirs	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	Probabilité de gagner une partie	0,3980	0,5981	0,7582	0,8671	0,9324	0,9679	0,9856	0,9939	0,9975	0,9990

Quelle formule a été entrée dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite ?
c. Combien de tirs Célia doit-elle effectuer au minimum pour que la probabilité qu'elle gagne une partie soit supérieure à 0,95 ?

57 On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15, dont cinq sont défectueuses.
• Cette situation peut-elle faire l'objet d'une modélisation par une loi binomiale ? Justifier.

58 On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
1. Pour quelles valeurs de p l'écart type de X est-il maximal lorsque n est constant ?
2. Est-il possible de se poser la même question pour n lorsque p est constant ?

59 Les dirigeants d'une nouvelle station de radio estiment que 25 % des 15-24 ans de la région connaissent l'existence de cette radio. Une enquête auprès de 500 jeunes de cette tranche d'âge et de cette région est réalisée : 112 personnes connaissent cette station de radio.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de jeunes de 15-24 ans qui connaissent cette radio. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}25$.

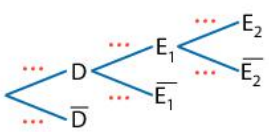
1. Sous l'hypothèse de ces dirigeants, déterminer un intervalle $[a\,;\,b]$ où a et b sont deux entiers vérifiant simultanément les trois conditions suivantes :
- $P(a \leqslant X \leqslant b) > 0{,}90$;
- $P(X \leqslant a) \leqslant 0{,}05$;
- $P(b \leqslant X) \leqslant 0{,}05$.

2. Que peut-on penser de l'hypothèse des dirigeants à la suite du résultat de l'enquête ?

60 Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante.
Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements :
- D : « le candidat est retenu sur dossier » ;
- E_1 : « le candidat est retenu à l'issue du premier entretien » ;
- E_2 : « le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant.

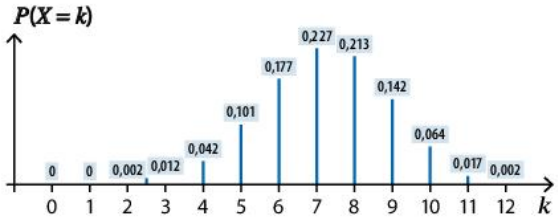


b. Calculer la probabilité de l'événement E_1.
c. On note F l'événement « le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leurs dossiers sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les cinq candidats.
a. Justifier que X suit la loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimal de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

61 On donne ci-dessous la représentation graphique de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0{,}6$.



1. Déterminer quelle valeur minimale il faut donner à n pour avoir $P(X \leqslant n) > 0{,}60$.
2. Déterminer deux entiers a et b vérifiant simultanément les trois conditions suivantes :
- $P(a \leqslant X \leqslant b) > 0{,}90$;
- $P(X \leqslant a) \leqslant 0{,}05$;
- $P(b \leqslant X) \leqslant 0{,}05$.

62 **Lancers francs**

Tony joue au basket et réussit quatre lancers francs sur cinq. Il fait des séries de 40 lancers francs (on considère qu'il ne se fatigue jamais et que ces lancers sont donc indépendants).
• En moyenne, combien réussit-il de lancers francs par série ?

63 **Surréservation**
Raisonner
Une entreprise d'événementiel organise un concert et vend 250 billets.
Elle doit ensuite trouver une salle pouvant accueillir toutes les personnes. Elle considère que 90 % des personnes ayant acheté un billet se rendent au concert et souhaite que moins de 2 % des personnes ayant acheté un billet n'aient pas de place assise.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes présentes au concert.

1. Justifier que la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}9$.
2. On note k le nombre de places assises.
Montrer que le problème revient à chercher le plus petit entier k tel que $P(X > k) \leqslant 0{,}02$.
3. Combien de places assises doit contenir la salle pour que les souhaits de l'entreprise soient respectés ?

64 Combien de fois faut-il lancer un dé cubique non pipé pour obtenir au moins un « 6 » avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?

65 On lance deux dés cubiques non pipés et on totalise les points marqués.
• Au bout de 20 lancers, quelle est la probabilité d'avoir obtenu dix fois un total supérieur ou égal à 8 ?

66 PRISE D'INITIATIVE
Dans un jeu vidéo sur smartphone, la probabilité d'atteindre son objectif avec un canon est égale à 5 %.
• Quel est le nombre minimal de coups à tirer pour avoir une probabilité de 99 % d'atteindre au moins une fois l'objectif ?

67 ALGO PYTHON
Dans une population où il naît 52 filles pour 48 garçons, n enfants naissent successivement. On définit la variable aléatoire X égale au rang du premier garçon ou à 0 s'il ne naît aucun garçon.
1. Écrire une fonction Python qui simule l'arrivée d'un enfant.
2. Déterminer la loi et l'espérance de X.
Cette loi porte le nom de loi géométrique tronquée.

68 Dans une partie de fléchettes, un joueur touche la zone centrale de la cible avec une probabilité de 0,1. Le joueur dispose de 10 fléchettes et gagne la partie dès qu'il atteint la zone centrale de la cible.
• Quelle est la probabilité qu'il gagne la partie ?

69 On lance 50 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de telle sorte que la probabilité p de faire apparaître la face numérotée 6 soit supérieure à $\frac{1}{2}$. On compte le nombre de « 6 » obtenus.
• Quelle doit être la valeur de p pour que la variance de la variable aléatoire qui compte le nombre de « 6 » obtenus soit égale à 10 ?

70 PRISE D'INITIATIVE
Une roue est partagée en deux secteurs : un vert et un rouge. Avec cette roue, on a une chance sur trois de tomber sur le secteur vert.
On gagne si l'on tombe au moins une fois sur le secteur vert lors des cinq premiers lancers.
• Quelle est la probabilité de gagner ?

71 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser
Si, dans une population, une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 10 000 personnes choisies au hasard ?

72 **Calculer**
Un site Internet propose un jeu en ligne pour lequel le joueur doit effectuer dix parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.
1. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
c. Déterminer l'espérance de X.
2. TABLEUR Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
a. À l'aide d'un tableur, expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

73 **Contrôle d'une éolienne**

Les trois pales d'une éolienne doivent être contrôlées périodiquement. On a établi quatre classes de gravité des dommages.
• Classe 4 : dégâts légers qui ne nécessitent ni intervention ni arrêt.
Dans les trois autres cas, il y a intervention et arrêt.
• Classe 3 : la pale est réparée sur place.
• Classe 2 : la pale doit être démontée.
• Classe 1 : les trois pales doivent être changées.
Dans 98,2 % des cas, le technicien ne diagnostique aucun souci sur la pale ou bien seulement un dommage de classe 4. Dans tous les autres cas, on dira que la pale est défaillante.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque inspection de 70 éoliennes, associe le nombre de pales nécessitant une intervention.
1. Justifier que X suit la binomiale $\mathcal{B}(210\ ;\ 0{,}018)$.
2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune pale nécessitant une intervention.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux pales défaillantes.
4. Calculer le nombre moyen de pales nécessitant une intervention.

74 **Chercher**

Dans un lycée, la probabilité qu'un élève rencontré au hasard fasse du sport dans une association est de 32 %.
On rencontre au hasard et successivement n élèves.
On admet que la variable aléatoire X, qui compte le nombre d'élèves faisant du sport dans une association, suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}32$.
Dans les réponses aux questions suivantes, les probabilités seront arrondies au centième

1. Dans cette question, $n = 10$. Quelle est la probabilité qu'au moins un élève fasse du sport dans une association ?
2. Dans cette question, n n'est pas fixé. Combien doit-on rencontrer d'élèves pour que la probabilité qu'au moins un élève fasse du sport dans une association soit supérieure à 99,9 % ?

75

Un garagiste choisit au hasard n pneus dans son stock.
Le stock est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
Le fabricant des pneus annonce qu'un pneu pris au hasard a un défaut avec une probabilité de 0,065.
La variable aléatoire X modélise le nombre de pneus défectueux dans le lot de n pneus.

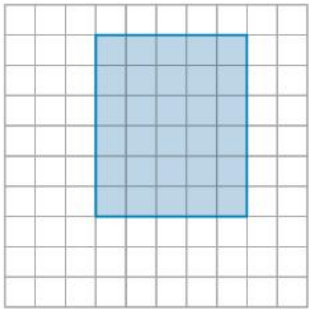
1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Dans cette question uniquement, $n = 12$.
   a. Calculer la probabilité qu'aucun pneu défectueux ne soit choisi.
   b. Calculer la probabilité qu'au plus deux pneus choisis soient défectueux.
3. Est-il vrai que si le garagiste change les quatre pneus d'une voiture, alors il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un pneu soit défectueux ?

76 **Loterie nationale**

Depuis le 6 octobre 2008, la formule du Loto français est la suivante : il faut obtenir cinq numéros parmi 49, plus un « numéro chance » parmi 10 pour être un gagnant au premier rang.

1. Montrer que le nombre de tirages possibles est 19 068 840.
2. On joue une grille. Quelle est la probabilité d'être gagnant au premier rang ?
3. Il y a trois tirages par semaine (lundi, mercredi et vendredi). Un joueur décide de jouer la même grille à chaque tirage.
   Combien de temps doit-il jouer pour que ses chances d'être un gagnant au premier rang soient supérieures à 50 % ? Commenter la réponse.

77



Un jeu consiste à lancer une fléchette n fois dans la cible ci-contre. On gagne lorsqu'on touche la zone bleue.
Chaque petit carré a la même probabilité d'être atteint et la fléchette atteint à chaque lancer un carré de la cible.
On suppose que chaque tir est indépendant des autres.
Il faut payer 5 € pour jouer et chaque tir réussi rapporte 1 € alors qu'un tir raté ne rapporte rien.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis et G compte le gain algébrique d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Dans cette question, $n = 5$.
   a. Quelle loi suit X ?
   b. Quelle est la probabilité d'avoir réussi trois lancers ?
   c. TABLEUR À l'aide d'un tableur, donner la loi de G.
   d. Déterminer l'espérance de G et interpréter ce nombre.
3. Dans cette question, la valeur de n n'est pas fixée.
   Combien faut-il de lancers pour être sûr à 99 % de réussir au moins un lancer ?

78 **Contrôle qualité**

Une usine produit des pots de confiture dont la masse doit être de 500 g.
Le service qualité de l'entreprise vérifie régulièrement quelques pots et sait que le matériel utilisé permet d'affirmer qu'un pot sur cinq a une masse inférieure à 490 g.
On prélève dans la production 20 pots et on juge que la production est assez importante pour se permettre d'assimiler cette expérience à un tirage avec remise. La variable aléatoire X compte le nombre de pots jugés « défectueux » dans cet échantillon.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'on obtienne entre un et trois pots défectueux.
3. Combien de pots faudrait-il prélever pour que la probabilité qu'il y ait au moins un pot défectueux soit d'au moins 99 % ?

79 **Sondage téléphonique**

Raisonner

Pour effectuer un sondage, un institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de dix communications par demi-heure.
La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
L'institut de sondage souhaite obtenir une moyenne de 1 200 réponses.

• Quel temps moyen, exprimé en heure, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

ZOOM SUR... la loi binomiale

Pour appliquer le modèle de la loi binomiale, il est nécessaire d'expliciter trois points :
- l'expérience ne doit mener qu'à deux issues : celle désignée comme le succès présente une probabilité p ;
- cette expérience doit se répéter de façon identique et indépendante n fois ;
- on doit compter le nombre de succès obtenus avec une variable aléatoire X.

80 35 min

Pour aller chercher ses enfants en voiture à l'école, Amine doit passer trois feux tricolores. Les trois feux ont respectivement une probabilité de 0,45, de 0,55 et de 0,80 d'être verts. Les feux ne sont pas coordonnés : ils sont indépendants les uns des autres.
On note A_i l'événement « Amine s'arrête au feu numéro i » (i pouvant valoir 1, 2 ou 3) et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Amine doit s'arrêter.
1. Modéliser la situation par le produit cartésien de trois univers. Combien compte-t-on d'issues ?
2. Combien compte-t-on de sous-parties de ce produit cartésien à deux éléments ?
3. Construire un arbre pondéré représentant la situation étudiée.
4. Déduire de la question 2 le nombre de chemins de l'arbre qui présente exactement deux arrêts.
5. Quelle est la probabilité qu'Amine doive s'arrêter deux fois sur son parcours ?
On rappelle que l'on s'arrête si le feu est orange ou rouge.
6. Déterminer la probabilité qu'Amine ne s'arrête à aucun feu.
7. a. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

81 15 min QCM

Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3.
On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle. Répondre à chaque question sans justifier.
1. La probabilité qu'exactement trois de ces clients aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur, arrondie au millième :
(a) 0,900 (b) 0,266 (c) 0,650 (d) 0,267
2. La probabilité que moins de la moitié des clients achète un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :
(a) 0,850 (b) 0,200 (c) 0,150 (d) 0,953

82 15 min

Une urne contient trois boules blanches et sept boules noires indiscernables au toucher. Un jeu consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules de cette urne.
La partie est gagnée si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.
1. Calculer la probabilité de gagner la partie.
2. Soit n un entier strictement supérieur à 2. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
a. Quelle est la loi de X ?
b. Calculer p_{10} en arrondissant au millième.
c. Exprimer p_n en fonction de n.
d. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

83 25 min ALGO PYTHON

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique. On admet que 1,5 % des clés produites sont défectueuses.
On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités :
a. $P(X = 0)$; b. $P(X = 1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.
4. On considère la fonction Python ci-dessous.
La fonction binomiale(k,n,p) renvoie la valeur de la probabilité de $P(X = k)$ lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

```
def seuil(n,p,S):
    k=0
    T=(1-p)**n
    while T<S:
        k=k+1
        T=T+binomiale(k,n,p)
    return k
```

On a exécuté la fonction dans la console et obtenu le résultat suivant.

```
>>> seuil(100,0.015,0.9999)
8
```

Expliquer ce que représente le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

84 30 min

Lorsqu'on joue à la roulette au casino, on peut miser sur un des 37 numéros. Si la bille s'arrête sur le numéro choisi, on gagne 35 fois sa mise.
Thomas se dit qu'en misant 2 € sur 30 numéros, il a une probabilité de $\frac{30}{37}$ de gagner 10 €.

1. Vérifier les calculs de Thomas en donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire modélisant son gain algébrique.
2. Thomas joue dix fois de suite en respectant sa stratégie. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il gagne et G la variable aléatoire qui modélise son gain algébrique.
a. Montrer que $G = 70X - 600$.
b. Quelle loi suit X ? En déduire l'espérance de X.
c. En admettant que $E(G) = 70E(X) - 600$, quel gain moyen peut espérer Thomas ?
3. Thomas joue n fois, toujours avec la même stratégie. Existe-t-il une valeur de n qui lui soit favorable ?

85 35 min

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.
Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-2} près.
1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise, huit stylos.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
On admet que X suit une loi binomiale.
a. Donner les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité des événements suivants :
• A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
• B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
• C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
2. En vue d'améliorer les rendements de l'entreprise, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production.
On note D l'événement « le stylo présente un défaut » et E l'événement « le stylo est accepté ».
a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.
3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1.b.
Quel commentaire peut-on faire ?

86 45 min

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :
– lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
– lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

Partie A

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(\text{M})$, $P_{\text{M}}(\text{S})$ et $P_{\overline{\text{M}}}(\overline{\text{S}})$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(\text{S}) = 0{,}02192$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie B

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.
1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Sans justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
a. la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
b. la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. a. Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.
b. Interpréter le résultat obtenu.

Consolider ses fondamentaux

87 La roue tourne

Une roue est divisée en quatre secteurs identiques, trois blancs et un noir. Lorsqu'on fait tourner cette roue, on gagne la partie si elle s'arrête sur un secteur blanc.
On répète n fois l'expérience et on note X le nombre de parties gagnées.

Questions Va piano

1. Dans cette question, on considère que l'on joue cinq parties.
a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
b. Déterminer la probabilité de gagner au moins une partie.
2. On considère maintenant un nombre n de parties.
Montrer que la probabilité de gagner au moins une partie est :
$$g_n = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Questions Moderato

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer, en fonction de n, la probabilité de gagner au moins une partie.
3. On considère la suite (g_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :
$$g_n = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$
a. Démontrer que la suite (g_n) est croissante et majorée.
b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Questions Allegro

1. Démontrer que la probabilité p_n de gagner exactement une partie est égale à $p_n = \frac{3n}{4^n}$.
2. Démontrer que, pour tout pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n+1}{4n}.$$
3. a. En déduire le sens de variation de la suite (p_n).
b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Se préparer aux études supérieures

88 Loi géométrique Approfondissement

1. Jeanne joue à un jeu. Elle lance un dé équilibré à six faces. Elle considère qu'elle gagne lorsqu'elle obtient 6. On note X le nombre de lancers qu'elle doit effectuer pour parvenir à gagner. On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre $\frac{1}{6}$.

a. Que représente la valeur $\frac{1}{6}$?

b. À l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer une expression de $P(X = k)$ pour $k \geqslant 1$.

c. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$P(X \leqslant n) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

2. Est-il possible de proposer une valeur pour l'espérance de X ? Justifier.

3. En admettant la formule $E(X) = \frac{1}{p}$, où p est le paramètre de la loi, calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. ALGO PYTHON Pour jouer avec son amie Loïs, Jeanne change les règles du jeu. Jeanne lance trois fois le dé et si elle obtient 6, elle gagne. Sinon, Loïs lance quatre fois le dé et si elle obtient 6, elle gagne. S'il n'y a pas de gagnant au bout des sept premiers lancers, Jeanne est déclarée vainqueur.

a. Recopier et compléter la fonction Python ci-après afin qu'elle simule une partie du jeu et renvoie le prénom du vainqueur.

```
from random import randint


def jeu():
    for nb in range(...):
        de=randint(1,6)
        if ........:
            return 'Jeanne'
    for nb in range(...):
        de=randint(1,6)
        if ........:
            return 'Loïs'
    return 'Jeanne'
```

b. Écrire une fonction Python qui, pour un nombre n de parties donné, renvoie la fréquence du nombre de victoires de Loïs.

c. Tester les fonctions précédentes afin d'estimer la probabilité que Loïs gagne le jeu.

d. Calculer la probabilité que Loïs gagne le jeu et comparer avec la valeur trouvée à la question précédente.

e. Loïs estime que le jeu n'est pas équitable. Elle souhaite avoir droit à huit lancers au lieu de quatre. Quelle est alors la probabilité que Loïs gagne le jeu ? Le jeu est-il équitable ?

f. Déterminer le nombre de lancers que Loïs doit faire pour rendre le jeu le plus équitable possible.

No problem!

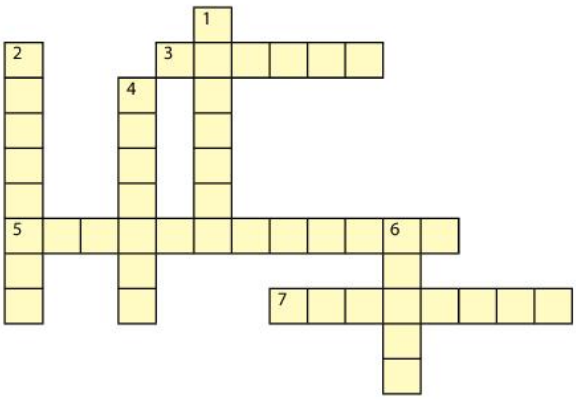
1 Probabilities

1. Suppose we toss a fair coin five times.
What is the probability of getting "Tails" exactly twice?
2. The probability that a new car will develop a fault in the first year is 0.35. Ten cars are picked at random.
What are the chances of ending up with exactly 5 new cars free of defects?
3. When Miranda plays tennis with Timothy, on average, 1 out of 8 of her serves are aces.
How likely is it that Miranda serves more than 4 aces during the next 30 serves against Timothy?

2 An unfair coin

I have an unfair coin. When I toss the coins the probability of getting tails is 0.6.
If I toss this coin 12 times, find the probability that:
a. it lands on tails more than 7 times;
b. it lands on tails exactly 5 times;
c. it lands on tails more than twice but fewer than 7 times.

3 Crosswords INDIVIDUAL WORK



Across:
3. Selection process in which each item of a set has an equal probability of being chosen.
5. For which the probability of any event occurring is unaffected by the occurrence or non-occurrence of any other event.
7. A quantity that can change or that may take on different values.

Down:
1. Opposite of success.
2. Such a coefficient equals the number of combinations of r items that can be selected from a set of n items.
4. The accomplishment of one's goal.
6. Synonym for experiment.

Final exam Past papers

1 The random variable X has the binomial distribution $\mathcal{B}(16, 0.3)$.
Showing your calculation, find $P(X = 7)$.

2 Anne and Brian play a board game against each other regularly.
The probability that Anne wins a game is 0.7 and the probability that Brian wins a game is 0.3, independently of all other games. One day, they play 10 games.
Let X denote the number of games won by Anne on that day.
1. State the distribution of X, including any parameters.
2. Determine the mean and the standard deviation of X.
3. Find the probability that Anne wins more games than Brian.

CHAPITRE

14 Loi des grands nombres

Ressources en +

Sur le site collection :
lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe

Le hasard suit-il des lois ?

Andreï Kolmogorov

Andreï Kolmogorov (1903-1987) est un mathématicien soviétique. Curieux de tout, il étudie à l'université conjointement les mathématiques, la métallurgie et l'histoire russe. Ses apports ont été significatifs dans de nombreux domaines. En physique, il s'est par exemple penché sur l'analyse des turbulences, qui étudie le mouvement d'un tourbillon comme un phénomène dépendant du hasard.

Les phénomènes physiques qui paraissent aléatoires à l'échelle microscopique présentent une régularité parfois étonnante à notre échelle. Le mouvement brownien en est un exemple. Quand on étudie le déplacement d'une molécule de gaz dans un récipient fermé, celui-ci semble erratique. Il dépend des chocs entre molécules, des vitesses de chacune… La position d'une particule donnée est incalculable, mais à l'échelle macroscopique, où les phénomènes aléatoires se répètent un très grand nombre de fois, tout l'espace semble uniformément occupé.
Denis Poisson, au XIX^{e} siècle, énonçait déjà : « Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. »

On lance une fois une pièce. Le résultat peut être Pile ou Face, de manière équiprobable. On répète 100 000 fois cette expérience. À l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la probabilité que le nombre de Pile obtenus soit supérieur à 49 500 et inférieur à 50 500.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Variable aléatoire et espérance

On lance deux fois de suite un dé non pipé, à six faces numérotées de 1 à 6. On note D_1 (resp. D_2) la variable aléatoire égale au résultat obtenu au premier (resp. second) lancer.

On pose $S = D_1 + D_2$.

1. Quelles sont les valeurs prises par S ?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire S.
3. Déterminer l'espérance de S.

2 Loi de probabilité

Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité $P(X = k) = ak$, pour k entier compris entre 1 et 5, où a est un nombre réel strictement positif.

1. Déterminer a.
2. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

3 Intervalles

Écrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles suivants.

1. L'ensemble des réels dont la distance à un nombre réel x est inférieure à 2.
2. L'ensemble des réels x tels que $|x - 0{,}5| < 0{,}1$.
3. L'ensemble des réels dont la distance à π est inférieure à un millième.

4 Valeur absolue

Traduire mathématiquement, avec une valeur absolue, les phrases suivantes.

1. x est compris entre 1,9 et 2.
2. x est une valeur approchée de π à 10^{-4}.

5 Plusieurs valeurs

1. Si $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, quelles sont les valeurs possibles pour $2x - 5$?
2. Si $x \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et $x \in \{4 ; 7 ; 8\}$, quelles sont les valeurs possibles pour $x + y$?

6 Gain

On lance une pièce bien équilibrée quatre fois de suite.

1. Pile rapporte 2 € et Face fait perdre 1 €.

Quels sont les gains ou pertes possibles à ce jeu ?

2. Soient x et y deux réels positifs.

Si Pile rapporte x € et Face fait perdre y € ; quels sont les gains ou pertes possibles ?

7 Loi binomiale (1)

La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n ; \frac{1}{2}\right)$.

1. Quelle valeur minimale faut-il donner à n pour que $P(X = n) < 0{,}01$?
2. Quelle valeur maximale faut-il donner à n pour que $P(X < 2) > 0{,}5$?

8 Loi binomiale (2)

La variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0{,}2)$.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de :

1. $P(-2 \leqslant Y - 2 \leqslant 2)$;
2. $P(|Y - 2| > 1)$.

9 Espérance

Un jeu de loterie consiste à choisir au hasard un billet dans un sac. Il y a 80 billets perdants, 15 billets qui font gagner un lot de 5 € et 5 billets qui font gagner un lot de 20 €. Le billet coûte 2 €. On appelle G le gain algébrique de la partie en tenant compte de la mise.

1. Calculer $E(G)$.
2. Combien doit coûter le billet pour que l'organisateur de la loterie puisse espérer gagner d'au moins 150 € ?

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Tirage au hasard

Objectif
Introduire un schéma de Bernoulli comme somme de variables aléatoires.

Un sac contient 4 boules vertes et 6 boules rouges On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer une boule dans le sac, à noter sa couleur et à la remettre dans le sac.
On répète cinq fois cette expérience aléatoire et on note le nombre de fois où on a obtenu une boule verte au cours des cinq tirages.
On appelle succès l'événement « Obtenir une boule verte ».
On note X_i, pour i allant de 1 à 5, la variable aléatoire qui prend la valeur 1 au i-ème tirage lorsqu'on obtient un succès, et 0 sinon.

1. Calculer $P(X_i = 0)$ et $P(X_i = 1)$.
2. On considère la variable aléatoire S_2 définie par $S_2 = X_1 + X_2$.
Que représente S_2 ?
3. En déduire la loi de S_2, puis calculer $E(S_2)$.
4. Que représente $S_5 = X_1 + \ldots + X_5$?
5. En déduire la loi de S_5 puis calculer $E(S_5)$.

Situation 2 Linéarité de l'espérance

Objectif
Introduire la linéarité de l'espérance.

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous.

x_i	−1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

1. Calculer $E(X)$.
2. On considère la variable aléatoire Y qui prend pour valeurs le double des valeurs prises par X augmentées de 3.
Exprimer Y en fonction de X.
3. Recopier et compléter le tableau suivant.

y_i	$2\times(-1)+3$	$2\times 0+3$	$2\times 1+3$	$2\times 2+3$
$P(Y = y_i)$	…	…	…	…

4. Calculer $E(Y)$.
5. Vérifier que $E(Y) = 2E(X) + 3$.
6. On considère la variable aléatoire $Z = aX + b$, où a et b sont deux nombres réels.
Recopier et compléter le tableau suivant.

z_i				
$P(Z = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

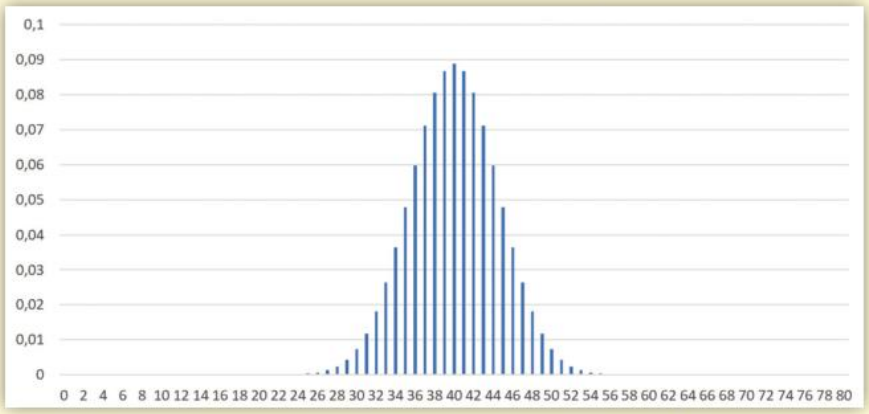
7. Calculer $E(Z)$.
8. Vérifier que $E(Z) = aE(X) + b$.

Situation 3 Lancer une pièce un grand nombre de fois TABLEUR

Objectif
Introduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On lance une pièce non truquée 80 fois et on note S_{80} le nombre de Face obtenus au cours des 80 lancers.

1. Justifier que S_{80} suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En déduire $E(S_{80})$ et $V(S_{80})$.
3. On a obtenu avec un tableur le graphique ci-dessous de la loi de S_{80}.



Justifier, en utilisant le tableur, que $P(30 < S_{80} < 50)$ semble supérieure à 0,8.

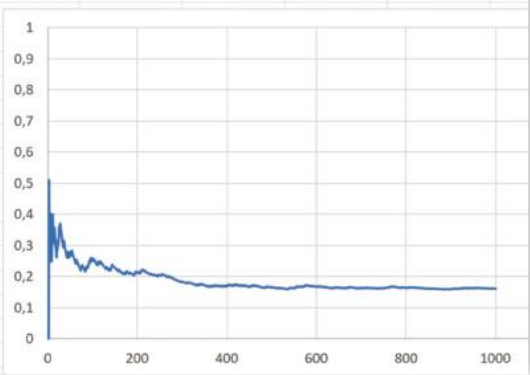
4. En déduire que $P(|S_{80} - 40| \geqslant 10)$ est inférieure à 0,2.
5. Que dire de $P(|S_{80} - 40| \geqslant t)$ lorsque t augmente ?

Situation 4 Loi des grands nombres

Objectif
Mettre en évidence expérimentalement la loi des grands nombres.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer 1 000 fois un dé cubique et non truqué.
On s'intéresse à la fréquence de sortie de la face 1.
On simule cette expérience à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	face du dé	Nbre de lancers	Freq de "1"
2	2	1	0
3	1	2	0,5
4	2	3	0,33333333
5	5	4	0,25
6	1	5	0,4
7	5	6	0,33333333
8	4	7	0,28571429
9	3	8	0,25
10	1	9	0,33333333
11	1	10	0,4
12	3	11	0,36363636
13	4	12	0,33333333
14	2	13	0,30769231
15	1	14	0,35714286
16	6	15	0,33333333



1. Expliquer la valeur 0 dans la cellule C2 puis la valeur 0,5 dans la cellule C3.
2. Que représente la colonne intitulée « Fréq de "1" » ?
3. Quelles sont les quantités représentées sur chaque axe du graphique ?
4. Que semble mettre en évidence cette représentation graphique ?

1. Transformations de variables aléatoires

1. Transformation affine

Définition

Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux nombres réels.
On note x_1 ; x_2 ; … ; x_n les valeurs prises par X.
La variable aléatoire Y définie par $\boldsymbol{Y = aX + b}$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels $y_i = ax_i + b$, pour tout i allant de 1 à n.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire et Y la variable aléatoire définie par $Y = aX + b$, où a et b sont deux réels.
- L'espérance de Y est $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$.
- La variance de Y est $V(Y) = V(ax + b) = V(aX) = a^2V(X)$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}2$ et soit $Y = 4X - 0{,}6$.
On a $E(X) = n \times p = 0{,}4$ et $V(X) = n \times p \times (1 - p) = 0{,}32$.
On a alors :

$$E(Y) = E(4X - 0{,}6) = 4E(X) - 0{,}6 = 4 \times 0{,}4 - 0{,}6 = 1$$
$$\text{et } V(Y) = V(4X) = 4^2V(X) = 16 \times 0{,}32 = 5{,}12.$$

2. Somme de deux variables aléatoires

Définition

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires, $\boldsymbol{X + Y}$ est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les sommes des valeurs possibles de X et de Y.

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On a $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Exemple

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}2$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}5$.
$X + Y$ est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 300\}$.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 200 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}5 = 90$$

Remarque

Les propriétés $E(AX) = aE(X)$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ s'appellent la linéarité de l'espérance.

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X et Y sont associées à deux expériences aléatoires dont les conditions de réalisation sont **indépendantes.**
On a $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
On dit alors que les variables aléatoires sont indépendantes.

Remarque

Dans le cas où les expériences ne sont pas indépendantes, il se peut que $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$.

Méthode 1 Appliquer la linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire telle que $E(X)=10$ et $V(X)=4$. Soit Y une autre variable aléatoire telle que $E(Y)=0$ et $V(Y)=1$.

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes.

1. $Z=2X-15$ 2. $T=X+Y$ 3. $U=-5Y$

Solution commentée

1. Par linéarité de l'espérance, on a $E(Z)=2E(X)-15=2\times10-15=5$.
$V(Z)=2^2V(X)=16$.

2. Par linéarité de l'espérance, on a $E(T)=E(X)+E(Y)=10+0=10$.
En l'absence d'information sur l'indépendance des expériences aléatoires associées aux variables X et Y, on ne peut appliquer la formule sur la variance de la somme. On ne peut donc pas déterminer $V(T)$.

3. Par linéarité de l'espérance, on a $E(U)=-5E(Y)=0$ et $V(U)=(-5)^2V(Y)=25\times1=25$.

EXERCICE 1 p. 452

Méthode 2 Calculer l'espérance et la variance

On considère le jeu consistant à lancer 20 fois un dé.

À chaque lancer, on gagne 6 € si on obtient « 5 » ou « 6 » et 3 € sinon.

La participation au jeu est de 70 €.

1. Quel gain peut-on espérer ?
2. Quelle est la variance du gain ?

Solution commentée

1. Pour tout i allant de 1 à 20, on note X_i la variable aléatoire qui prend pour valeurs la somme en euro gagnée au i-ème lancer, pour $1\leqslant i\leqslant 20$. X_i prend pour valeurs 3 ou 6.
La loi de X_i est $P(X_i=6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(X_i=3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
Il y a 20 répétitions indépendantes de la même expérience aléatoire qui consiste à lancer le dé.
Le gain algébrique est la variable aléatoire $G=X_1+\ldots+X_{20}-70$.

On cherche $E(G)$.
Pour tout i allant de 1 à 20, on a :

$$E(X_i)=6\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{3}=4.$$

Par linéarité de l'espérance, on a :
$E(G)=E(X_1+\ldots+X_{20}-70)=E(X_1)+\ldots+E(X_{20})-70=20\times E(X_1)-100=80-70=10$.
On peut donc espérer gagner 10 €.

2. On cherche $V(G)$.
Les expériences aléatoires étant indépendantes, on peut utiliser la propriété sur la variance de la somme.
$V(G)=V(X_1+\ldots+X_{20}-70)=V(X_1+\ldots+X_{20})=V(X_1)+\ldots+V(X_{20})$
Pour tout i allant de 1 à 20, on a :

$$V(X_i)=(6-4)^2\times\frac{1}{3}+(3-4)^2\times\frac{2}{3}=4\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

On a donc $V(G)=V(X_1)+\ldots+V(X_{20})=20\times V(X_1)=40$.

EXERCICE 7 p. 452

2. Inégalités de concentration

1. Inégalité de Markov

Propriété (inégalité de Markov)

DÉMO en ligne

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.

On a $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

Interprétation

Ce résultat signifie que la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand. Autrement dit, la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Remarque

Si $a \leqslant E(X)$, l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt (on dit qu'elle est triviale).

En effet la borne $\dfrac{E(X)}{a}$ est alors supérieure à 1 et donc, nécessairement, à la probabilité $P(X \geqslant a)$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire positive d'espérence 1.
D'après l'inégalité de Markov, on a $P(X \geqslant 100) \leqslant 0{,}01$.
Autrement dit, une variable aléatoire positive dont l'espérance vaut 1 a au plus une chance sur 100 de dépasser 100.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété

DÉMO p. 445

Soit X une variable aléatoire et soit t un nombre réel strictement positif.

On a $P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$.

Interprétation

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins t de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que t est grand.

Remarques

- $1 - P(|X - E(X)| \geqslant t) = P(E(X) - t < X < E(X) + t)$.
- On dit que $[E(X) - t\ ;\ E(X) + t]$ est un **intervalle de fluctuation** de X.
- Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev font partie de ce qu'on appelle des inégalités de « concentration ».

Exemple

Si $t = 2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart-type de la variable X, alors :

$$P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \leqslant \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2} = \frac{1}{4}.$$

Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le double de son écart type est inférieure à $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Méthode 1 Appliquer les inégalités de concentration

Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

• Donner deux majorations de la probabilité que la production dépasse sur une journée 75 pièces.

Solution commentée

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces fabriquées un jour donné.
On cherche à majorer $P(X \geqslant 75)$.
D'après l'inégalité de Markov, avec $a = 75$, on a $P(X \geqslant 75) \leqslant \dfrac{E(X)}{75}$.

Or $\dfrac{E(X)}{75} = \dfrac{50}{75} = \dfrac{2}{3}$, ce qui donne une première majoration : $P(X \geqslant 75) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Une seconde majoration peut être obtenue à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour cela, on fait apparaître la bonne « forme » : on dit que l'on centre la variable X en lui retranchant son espérance.

$P(X \geqslant 75) = P(X - 50 \geqslant 25) \leqslant P(|X - 50| \geqslant 25)$

Or $P(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant \dfrac{V(X)}{25^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Donc $P(X \geqslant 75) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant 25) \leqslant \dfrac{V(X)}{25^2} = \dfrac{25}{25^2} = \dfrac{1}{25}$.

On a donc $P(X \geqslant 75) \leqslant \dfrac{1}{25}$ ce qui est une seconde majoration.

Remarque : Il apparaît clairement ici que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit une majoration bien plus précise que l'inégalité de Markov. On privilégiera en général l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

EXERCICE 23 p. 454

Méthode 2 Manipuler les inégalités de concentration

On lance 800 fois une pièce de monnaie non truquée.

• Donner une minoration de la probabilité que le nombre de « Pile » obtenus soit compris entre 381 et 419.

Solution commentée

On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus lors des 800 lancers de la pièce.
On cherche à minorer la probabilité $P(381 \leqslant X \leqslant 419)$.
Pour utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il faut déterminer l'espérance et la variance de X.
La loi de X est la loi binomiale de paramètres $n = 800$ et $p = 0{,}5$.
Donc $E(X) = 800 \times 0{,}5 = 400$ et $V(X) = 800 \times 0{,}5 \times (1 - 0{,}5) = 200$.
Comme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est une majoration de la probabilité, on utilise l'événement contraire :

$$P(381 \leqslant X \leqslant 419) = 1 - P(X \leqslant 380 \text{ ou } X \geqslant 420).$$

Il reste à faire apparaître $|X - E(X)|$ en « centrant » la variable X :

$$\begin{aligned} P(381 \leqslant X \leqslant 419) &= 1 - P(X - E(X) \leqslant 380 - E(X) \text{ ou } X - E(X) \geqslant 420 - E(X)) \\ &= 1 - P(X - E(X) \leqslant -20 \quad \text{ou } X - E(X) \geqslant 20) = 1 - P(|X - E(X)| \geqslant 20) \end{aligned}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|X - E(X)| \geqslant 20) \leqslant \dfrac{V(X)}{20^2}$.

Or $\dfrac{V(X)}{20^2} = \dfrac{200}{400} = 0{,}5$, donc $P(|X - E(X)| \geqslant 20) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent, $P(381 \leqslant X \leqslant 419) \geqslant 0{,}5$.
On a donc au moins une chance sur deux d'obtenir entre 381 et 419 Pile lors des 800 lancers de la pièce.

EXERCICE 20 p. 453

3. Loi des grands nombres

1. Cas particulier de la loi binomiale

Propriété

On considère un schéma de Bernoulli comportant n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout i de 1 à n, on note X_i la variable aléatoire associée à la i-ème épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon. On a alors $P(X_i = 1) = p$.

- Chaque variable X_i (pour i allant de 1 à n) suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
- La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves et suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition et propriété

- On appelle **fréquence empirique** des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{S_n}{n}$.
- Soit t un nombre réel strictement positif.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n et M_n donne :

$$P\left(\left|S_n - np\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{t^2} \quad \text{et} \quad P\left(\left|M_n - p\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

Remarques

- La première inégalité signifie que la probabilité que la variable S_n prenne des valeurs éloignées d'une valeur t de son espérance np est d'autant plus petite que t est grand.
- $\left|M_n - p\right| < t$ équivaut à $p - t < M_n < p + t$
- En utilisant l'événement contraire, si t est un nombre réel strictement positif, on a alors :

$$P\left(\left|S_n - np\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{np(1-p)}{t^2} \text{ et } P\left(\left|M_n - p\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

2. Cas général

Définition

On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.

On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$. M_n s'appelle la **moyenne empirique** des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Théorème : Loi des grands nombres

On considère une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience, d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. On répète n fois cette expérience de manière indépendante. On obtient un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ont la même loi (elles ont donc la même espérance $E(X)$ et la même variance $V(X)$)
- Pour tout nombre réel $t > 0$, $P\left(\left|M_n - E(X)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{nt^2}$.

Autrement dit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|M_n - E(X)\right| \geqslant t\right) = 0$.

On dit que M_n **converge en probabilité** vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Méthode 1 Appliquer Bienaymé-Tchebychev avec une loi binomiale

On lance 100 fois un dé équilibré, à quatre faces de couleurs différentes et on note la couleur de la face cachée. On appelle S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face cachée est rouge au cours des 100 lancers.

• En utilisant la loi des grands nombres dans le cas particulier d'une loi binomiale, déterminer une majoration de $P(21 \leqslant S_{100} \leqslant 29)$.

Solution commentée

• On reconnaît un schéma de Bernoulli : répétition d'une expérience aléatoire (lancer d'un dé) de manière indépendante (l'issue d'un lancer n'a pas d'influence sur l'issue suivante).

La probabilité de succès est $p = \frac{1}{4}$.

La variable aléatoire S_{100} suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}25$.

On cherche à majorer $P(21 \leqslant S_{100} \leqslant 29)$. On applique la loi des grands nombres dans le cas particulier d'une loi binomiale : on cherche la valeur de t telle que $P(|S_{100} - 100p| \geqslant t) \leqslant \frac{100p(1-p)}{t^2}$.

On a $|S_{100} - 100p| < t \Leftrightarrow 100p - t < S_{100} < 100p + t \Leftrightarrow 25 - t < S_{100} < 25 + t$.

Comme on cherche la probabilité de l'événement $\{21 < S_n < 29\}$, on en déduit que $t = 5$.

On a $P(|S_{100} - 100 \times 0{,}25| \geqslant 5) \leqslant \frac{100 \times 0{,}25 \times (1-0{,}25)}{5^2}$, donc $P(|S_{100} - 100 \times 0{,}25| \geqslant 5) \leqslant 0{,}75$.

Donc $P(|S_{100} - 25| < 5) = P(21 \leqslant S_{100} \leqslant 29) \geqslant 1 - 0{,}75$.

La probabilité cherchée est donc d'au moins 25 %.

EXERCICE 25 p. 454

Méthode 2 Appliquer la loi des grands nombres dans le cas général

Justifier qu'en lançant une punaise un nombre de fois suffisamment grand, on peut estimer la probabilité qu'elle retombe en reposant sur sa pointe.

Solution commentée

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une punaise et à regarder si elle retombe sur la « pointe » (succès de probabilité p inconnue), ou sur la « tête ». C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète cette expérience n fois de manière indépendante, où n est un entier naturel. On a alors un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires associées à chaque répétition, qui prennent la valeur 1 en cas de « succès » et 0 sinon. Elles suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Les variables X_i ont toutes la même espérance : $E(X_1) = \ldots = E(X_n) = p$.

On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$

On peut appliquer la loi des grands nombres :

pour tout nombre réel t, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - p| \geqslant t) = 0$.

En lançant un grand nombre de fois la punaise, on peut donc estimer la valeur de p en observant la réalisation de la variable aléatoire M_n.

EXERCICE 31 p. 454

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On a :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Démonstration

La variable X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On considère un schéma de Bernoulli composé de n épreuves indépendantes de probabilité de succès p.
La variable X est alors égale au nombre de succès obtenus au cours de la répétition des n épreuves de Bernoulli.
Pour tout i allant de 1 à n, on note X_i la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient un succès à la i-ème épreuve et 0 sinon.

On a $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Les variables aléatoires X_i ont pour loi $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1-p$.
Pour tout i allant de 1 à n, on a :

$$E(X_i) = p \quad \text{et} \quad V(X_i) = (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p) = p(1-p).$$

- On calcule $E(X)$.

On a donc $E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = np$.

- On calcule $V(X)$.

$V(X) = V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = np(1-p)$

---

1. Justifier l'égalité :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

2. Justifier que $E(X_i) = p$.
3. Rappeler la formule du calcul de la variance d'une variable aléatoire.
Justifier $V(X_i)$.
4. Quelle propriété a-t-on utilisée pour calculer $E(X)$?
5. Quelle propriété a-t-on utilisée pour calculer $V(X)$?

Rédiger une démonstration

On rappelle l'inégalité de Markov : soit X une variable aléatoire à valeurs positives dont l'espérance existe et soit a un nombre réel strictement positif. On a alors $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

On souhaite démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en utilisant l'inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire et soit t un nombre réel strictement positif.

On a $P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On définit la variable aléatoire Y par $Y = a$ si $X \geqslant a$ et $Y = 0$ sinon.

- Quelles sont les valeurs prises par Y ?
- Montrer que $Y - X \leqslant 0$.
- En utilisant $E(Y - X)$, montrer que $E(Y) \leqslant E(X)$.
- Calculer $E(Y)$.
- Conclure pour la première inégalité.

On pose $Y = (X - E(X))^2$. On admet que $E(Y) = V(X)$.

- Justifier que, pour tout $t > 0$, $|X - E(X)| \geqslant t \Leftrightarrow (X - E(X))^2 \geqslant t^2$.
- Soit t un réel strictement positif. Appliquer l'inégalité de Markov à la variable Y en prenant $a = t^2$.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

On lance deux fois une pièce, on note X (resp. Y) la variable aléatoire de Bernoulli pour le premier (resp. le second) lancer prenant la valeur 1 si on obtient Pile et 0 sinon, puis on note $Z = X - Y$ et $T = |X - Y|$.

Par exemple, si on lance deux fois la pièce et que l'on obtient deux fois Pile, alors Z et T prennent la valeur 0. Si on obtient Face puis Pile, alors Z prend la valeur –1 et T la valeur 1.

1 À l'aide d'un arbre, compléter les tableaux suivants.

z	–1	0	1
$P(Z = z)$			

t	0	1
$P(T = t)$		

u	0	2
$P(Z + T = u)$		

2 Justifier que les valeurs de Z et de T ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

3 Calculer $V(Z)$, $V(T)$ et $V(Z + T)$.

Utiliser une propriété

- Pour utiliser une propriété, toutes les conditions d'application doivent être remplies.
- Si toutes les conditions ne sont pas remplies, on ne peut pas utiliser la propriété.
- Si les conditions ne sont pas remplies, on ne peut pas conclure que la conclusion de la propriété n'est pas vraie.

Répéter en solo

Carte mentale

Étudier les transformations de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires et a et b deux réels.

- La variable aléatoire $Y = aX + b$ prend pour valeurs les réels $y_i = ax_i + b$, pour tout i allant de 1 à n.

On a alors $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(Y) = V(ax + b) = V(aX) = a^2V(X)$.

- Linéarité de l'espérance :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(aX) = aE(X)$$

- Si X et Y sont associées à deux expériences aléatoires **indépendantes** alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.

On a $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

La probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit t un nombre réel strictement positif.

On a $P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$.

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins t de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que t est grand.

On a $1 - P(|X - E(X)| \geqslant t) = P(E(X) - t < X < E(X) + t)$.

Loi des grands nombres

Utiliser la loi des grands nombres : cas particulier de la loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires associées aux n épreuves de Bernoulli de paramètre p, qui prennent la valeur 1 en cas de « succès » et 0 sinon.

$S_n = \sum_{n=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n$ est le nombre de succès lors des n épreuves.

S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{S_n}{n}$ est la moyenne empirique.

Soit $t > 0$.

On a : $P(|S_n - np| \geqslant t) \leqslant \dfrac{np(1-p)}{t^2}$

et $P(|M_n - p| \geqslant t) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{nt^2}$.

Utiliser la loi des grands nombres : convergence en probabilité

On répète n fois de manière indépendante une expérience aléatoire à laquelle on associe une variable aléatoire X. Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ainsi obtenues ont la même loi que X (donc même espérance $E(X)$ et variance $V(X)$).

Pour tout $t > 0$, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{nt^2},$$

avec $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$,

et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant t) = 0$.

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour estimer l'espérance (la moyenne théorique), on peut répéter l'expérience de manière indépendante un grand nombre de fois et calculer la moyenne empirique.

QCM

Donner la seule réponse exacte sans justification.
Une recherche au brouillon est souvent nécessaire.

CORRIGÉS DES EXERCICES

1 Une variable aléatoire X admet une espérance égale à 2. L'espérance de la variable aléatoire $Y = X - 2$ est égale à :

(a) 0 (b) 2 (c) −2

2 La variance d'une variable aléatoire X est égale à 2. La variance de la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2}$ est égale à :

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2

3 Une variable aléatoire X admet une espérance égale à 2 et une variance égale à 4. La variable aléatoire $Y = \frac{X-2}{2}$ vérifie :

(a) $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 2$
(b) $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$
(c) $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 2$

4 On considère deux variables aléatoires X et Y, suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
L'espérance de $X + Y$ est égale à :

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0

5 On considère deux variables aléatoires X et Y, de même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
La variance de $X + Y$ est égale à :

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) on ne peut pas savoir

6 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n_1 = 10$ et $p_1 = 0,5$ et une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n_2 = 20$ et $p_2 = 0,25$.
L'espérance de la variable aléatoire $X + Y$ est égale à :

(a) 5 (b) 10 (c) 15

7 Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,2$, alors la probabilité $P(|X - 20| \geqslant 10)$ est inférieure à :

(a) 0,1 (b) 0,05 (c) 0,2

8 Si Z est une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance 1, alors, sans connaître la loi de Z, on est certain que $P(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$ est supérieur à :

(a) 0,75 (b) 0,8 (c) 0,9

VRAI FAUX

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1 **Affirmation 1.** $V(-2X) = -2V(X)$

2 **Affirmation 2.** $E(-2X) = -2E(X)$

3 **Affirmation 3.** $V(2X + 1) = 4\ V(X)$

4 **Affirmation 4.** L'espérance de la somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances de chaque variable aléatoire.

5 **Affirmation 5.** La variance de la somme de variables aléatoires est égale à la somme des variances de chaque variable aléatoire.

6 Soit X une variable aléatoire et t un réel positif tel que $P(X \in [E(X) - t\,;\, E(X) + t]) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$.

Affirmation 6. $P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) = \frac{1}{4}$

7 On considère n lancers d'une pièce équilibrée. On note S_n le nombre de Pile obtenus au cours des n lancers.

Affirmation 7. $E(S_n) = \frac{n}{2}$

Affirmation 8. $V(S_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

Affirmation 9. S_n suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,5.

Affirmation 10. $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,05$ équivaut à $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0,1\right) \geqslant 0,95$.

Affirmation 11. Le nombre de n lancers de la pièce qu'il faut effectuer au minimum pour que la probabilité $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,05$ est égal à 500.

TP 1 Calculer une aire ALGO PYTHON

Objectif
Utiliser les fonctions aléatoires de Python pour programmer des variables aléatoires.

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes probabilistes basées sur l'observation d'un grand nombre d'issues. Elles permettent, par le calcul de probabilités, de déterminer des aires.

Soit f une fonction définie sur $[0\,;1]$ telle que :

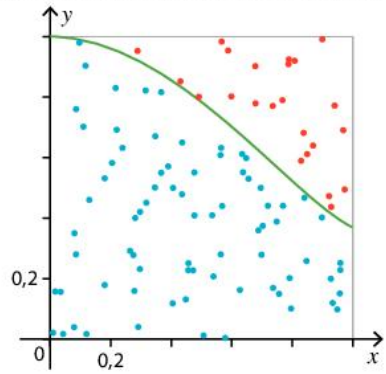
pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

On note $A = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir au hasard un point $(x\,;y)$ dans le carré de côté 1.
On appelle Succès l'événement « Le point choisi est sous la courbe représentative de f ».

On admet que la probabilité de cet événement est :

$$p = \frac{\text{aire sous la courbe}}{\text{aire du carré}} = \frac{A}{1} = A.$$



1. Quelle est la loi de chaque variable X_i ?
2. Justifier que M_n tend « en probabilité » vers A. Autrement dit que, pour tout réel $t > 0$, on a :
$$\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - A| \geqslant t\right) = 0$$
3. Compléter la fonction Bern ci-dessous, afin qu'elle renvoie la valeur 1 si un point de coordonnées $(x\,;y)$ est sous la courbe représentative de la fonction f et 0 sinon.

```
def f(x):
    return x**4

from random import random
def Bern(x,y):
    if ...:
        X=...
    else:
        X=...
    return X
```

4. a. Compléter la fonction Aire ci-dessous, afin qu'elle renvoie une valeur approchée de l'aire A.

```
def Aire(n):
    M=0
    for i in range(...):
        M=...+...
    return ...
```

b. Estimer, en utilisant la fonction Aire, la valeur de $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$.

c. Vérifier le résultat par le calcul exact de l'intégrale.

5. Modifier l'un des programmes afin de déterminer une valeur approchée de l'intégrale :
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- from random import * permet d'utiliser la librairie random de Python pour générer des nombres aléatoires.
- random() renvoie un nombre un nombre aléatoire choisi de manière uniforme dans $[0\,;1]$.

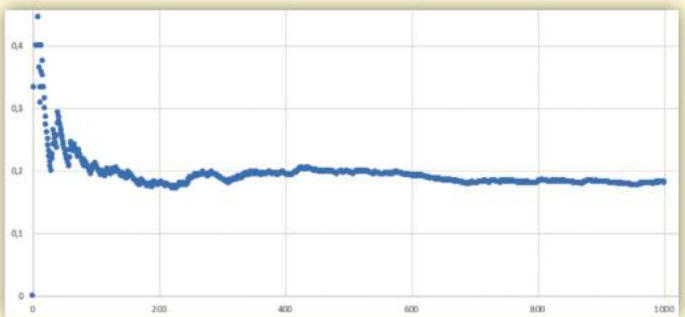
TP 2 Visualiser la stabilisation d'une fréquence TABLEUR

Objectif
Simuler une loi pour observer la loi des grands nombres.

Soit n un entier naturel. On lance n fois une roue divisée en cinq secteurs de même aire, dont quatre sont blancs et un est noir. On note p la probabilité que la roue s'arrête sur le secteur noir lors d'un lancer.
À l'aide d'un tableur, on souhaite observer, par simulation, la loi des grands nombres dans le cas particulier d'une loi binomiale.
À cette fin, on utilise un fichier tableur construit comme ci-dessous.

	A	B	C	D
1		p= 0,2		
2	n	X_n	S_n	M_n
3	1	1	1	1
4	2	1	2	1
5	3	0	2	0,66666667
6	4	0	2	0,5

1. Justifier que X =ENT(ALEA()+p) suit la loi de Bernoulli de paramètre p. En déduire $E(X)$.
Pour la suite, on nomme p la cellule C1 et on prend $p = 0{,}2$.
2. On a écrit les formules suivantes :
Cellule B3 : =ENT(ALEA()+p) ; Cellule C3 : =B3 ; Cellule D3 : =C3/A3.
Cellule B4 : =ENT(ALEA()+p) ; Cellule C4 : =B4+C3 ; Cellule D4 : =C4/A4.
Expliquer le rôle de ces formules.
3. Copier la ligne 4 jusqu'à la ligne 1002.
a. Que représente la colonne S_n ? Quelle est sa loi ?
b. Que représente la colonne M_n ?
c. On a représenté graphiquement M_n en fonction de n dans le graphique ci-dessous.



Interpréter le résultat affiché.
4. Modifier la valeur de p en prenant $p = 0{,}3$ et interpréter le résultat.

Boîte à outils

Tableur

- Dans le menu *Formules*, on peut donner un nom à une cellule.
On utilise le menu

(par exemple ici le nom p pour C1).

- La fonction (ALEA() simule la loi d'une variable aléatoire Y qui vérifie, pour tout réel $a \in [0\,;1]$:
$$P(Y \leqslant a) = a\,.$$
- La fonction ENT() renvoie la partie entière du nombre placé en argument (par exemple ENT(3,12) vaut 3). La partie entière d'un nombre est le plus grand entier inférieur à ce nombre.

Vers le grand oral

Calcul mental

1 Calculer le plus simplement possible.

1. $\frac{1}{20}+\frac{2}{20}\times 3+\frac{4}{20}\times 2+\frac{5}{20}$
2. $\frac{8}{100}+\frac{12}{100}\times 2+\frac{20}{100}\times 3+\frac{30}{100}$
3. $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\times 2+\frac{3}{n}\times 3$

2 Calculer.

1. $\sum_{i=0}^{2} i^2$
2. $\sum_{i=1}^{4} (i-2)^2$
3. $\sum_{i=0}^{10} (i-5)$

3 Calculer le plus simplement possible la moyenne de chaque série.

a. 3 ; 7 ; 8 ; 2 ; 6 ; 4.
b. 1 ; 3 ; 5 ; 5 ; 7 ; 9.
c. 0,1 ; 0,2 ; 0,8 ; 0,9.
d. 0,2 ; 0,3 ; 0,9 ; 1.
e. –25 ; –13 ; 8 ; 5 ; 17 ; 8.

4 Une variable aléatoire ne prend que deux valeurs : 1 et –1. On sait que $P(X=1)=0{,}2$.

1. Calculer son espérance.
2. Calculer $E(3X+1)$ et $E(-2X+4)$.

5 Une variable aléatoire X prend pour valeurs tous les entiers entre –5 et 5. On sait que, pour tout entier k tel que $-5 \leqslant k \leqslant 5$, $P(X=k)=P(X=-k)$.

• Déterminer $E(X)$.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Réflexes

6 X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers fini.
On sait que $E(X)=E(Y)=3$.
Calculer les expressions suivantes.

1. $E(X+Y)$
2. $E(X-Y)$
3. $E\left(\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}Y\right)$
4. $E(aX+(1-a)Y)$ où a est un nombre réel.

7 X et Y sont deux variables aléatoires associées à deux événements indépendants.
On sait que $V(X)=V(Y)=4$.
Calculer les expressions suivantes.

1. $V(2X)$
2. $V(Y-4)$
3. $V(X+Y)$
4. $V(X-Y)$

8 On lance dix fois de suite un dé équilibré à six faces.
X est la variable qui compte le nombre de 6 apparus.

• En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de $P(X \geqslant 5)$.

9 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100\,;\frac{1}{5}\right)$.
En utilisant l'inégalité de Markov, donner une majoration de :

a. $P(|X-20| \geqslant 10)$;
b. $P(X \leqslant 5 \text{ ou } X \geqslant 35)$.

10 Y est une variable aléatoire positive telle que $E(Y)=5$ et $V(Y)=1$.
Donner une majoration de :

a. $P(Y>8)$;
b. $P(|Y-5| \geqslant 2)$.

11 Dans un sac, il y a 7 jetons noirs et 3 blancs, indiscernables au toucher. On en tire un du sac, à l'aveugle. On le remet et on en tire un autre. On répète ainsi cette expérience aléatoire un certain nombre de fois.

1. Justifier que la loi de la variable qui compte le nombre de jetons noirs obtenus est une loi binomiale.
2. Combien de fois faut-il répéter de fois l'expérience pour être certain à 95 % que le nombre de jetons noirs apparus est 5 ?

Se préparer à la prise de parole

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Un couple a déjà trois enfants et ce sont trois garçons. Ils attendent un bébé et ne connaissent pas encore son sexe. Il y a 99 % de chances que ce soit une fille.
2. X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers et suivant la même loi binomiale. Leur somme suit une loi binomiale.

Communiquer en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Le professeur a préparé des urnes réalisées avec des bouteilles en plastique opaque (des bouteilles de lait par exemple). Dans chacune, il a placé un même nombre de jetons. Les jetons sont de même taille, même texture, mais de deux couleurs différentes. La composition de toutes les bouteilles doit être identique. Elles sont ensuite fermées hermétiquement. Seul un petit trou dans le bouchon permet de voir la couleur du jeton qui est tombé sur le bouchon lorsqu'on tient la bouteille à l'envers.
Déterminer le nombre de jetons de chaque couleur que contiennent les bouteilles sans les ouvrir.

Présenter un exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Lors de l'élection présidentielle de 2002, des sondages mettaient au coude à coude trois candidats, en donnant malgré tout un « classement ». Le résultat du premier tour de cette élection a, a priori, contredit ce classement. Jacques Chirac : 19,88 % ; Jean-Marie Le Pen : 16,86 % ; Lionel Jospin : 16,18 %.

On peut même supposer que ces sondages ont influencé le vote, certains électeurs pensant comme acquis la présence de leur candidat au deuxième tour. Or ces sondages étaient à l'époque publiés sans marge d'erreur.
Depuis 2016, la loi impose aux sondeurs de publier, en même temps que leurs sondages, les « intervalles de confiance » qui y sont associés.

- Les sondages sont-ils fiables ? Qu'est-ce qu'un intervalle de confiance ?

Transformations de variables aléatoires

1 **Calculer**

Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 2.
Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes.

1. $Y = 2X$
2. $Z = 3X + 1$
3. $T = -X$
4. $U = 2(X - 1)$

2 Soit X une variable aléatoire d'espérance -2 et de variance $\frac{1}{2}$.

Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

1. $Y = \frac{X}{2}$
2. $Z = \frac{X+5}{3}$
3. $T = -X$
4. $U = \frac{2(X-1)}{3}$

3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ et Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}1$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $X + Y$?
2. Calculer $E(X + Y)$.

4 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}1$ et Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}1$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $X + Y$?
2. Calculer $E(X + Y)$.

5 On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 associées à deux expériences aléatoires indépendantes.
On sait que $V(X_1) = 2$ et $V(X_2) = 4$.

- Justifier que l'on peut calculer $V(X_1 + X_2)$ et donner sa valeur.

6 Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 4. Soit Y une autre variable aléatoire d'espérance -2 et de variance 1.
Calculer, si possible, l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes.

1. $Z = -2X$
2. $T = X + Y$
3. $U = Z + 1$
4. $V = \frac{Z}{2}$

7 On lance deux fois un dé équilibré. On note X_1 la valeur de la face supérieure du premier dé, X_2 celle du second.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1.
En déduire, l'espérance et la variance de X_2.
2. On note $S_2 = X_1 + X_2$.
Quelles sont les valeurs possibles de S_2 ?
Calculer, si possible, l'espérance et la variance de S_2.
3. On note $M_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.
Quelles sont les valeurs possibles de M_2 ?
Calculer, si possible, l'espérance et la variance de M_2.

8 On choisit de façon équiprobable un mois d'une année non bissextile (soit avec un mois de février à 28 jours).
On note D la variable aléatoire égale au nombre de jours du mois choisi auquel on soustrait 30.
On appelle H la variable aléatoire égale au nombre d'heures du mois choisi.

1. Déterminer la loi de D et en déduire son espérance et sa variance.
2. Montrer que $H = 24(D + 30)$.
3. En déduire l'espérance et la variance de H.

9 **Raisonner**

Un fabricant de produits pharmaceutiques est censé produire un médicament ayant 2,4 mg de principe actif.
Le robot qui teste le dosage commet inévitablement des erreurs de mesure.
Une étude sur le long terme, avec un instrument de mesure ayant une précision au µg, a montré que la loi de la variable aléatoire X égale à la masse du principe actif est la suivante.

x_i (en mg)	2,398	2,399	2,4	2,401	2,402
p_i	0,3	0,1	0,1	0,3	0,2

1. On s'intéresse à la variable aléatoire D égale à la différence, exprimée en mg, entre la masse du principe actif et 2,400 mg.
Déterminer la loi de D puis calculer son espérance et sa variance.
2. En déduire l'espérance et la variance de la masse de principe actif.

10 On choisit de façon équiprobable une personne dans une assemblée. La variable aléatoire A donnant son année de naissance a pour espérance 2001 et pour variance 81.
On note X la variable aléatoire égale à l'âge de la personne choisie.
1. Exprimer X en fonction de A.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.

11 Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = aX + b$, où a et b sont des réels. On suppose que $E(X) = 1$, $V(Y) = V(X)$ et $E(Y) = 4$.
1. Vérifier que $a = -1$ et $b = 5$ est une solution possible.
2. Déterminer toutes les valeurs possibles de a et b.

Inégalités de concentration

12 On considère une variable aléatoire X.
Exprimer les événements suivants sous la forme $(|X - a| \geqslant t)$.
1. $(X - 2 \geqslant 2$ ou $X - 2 \leqslant -2)$
2. $(X - a \geqslant 3$ ou $X - a \leqslant -3)$
3. « La distance entre X et 5 est supérieure ou égale à 4) »
4. $(X \geqslant 6$ ou $X \leqslant 0)$
5. $(X \geqslant 5$ ou $X \leqslant 1)$
6. $\left((X-2)^2 \geqslant 9\right)$

13 Soit X une variable aléatoire à valeurs positives.
• Justifier que $P(|X - 2| \geqslant 10) = P(X \geqslant 12)$.

14 On considère une variable aléatoire X.
Exprimer l'événement complémentaire à l'aide d'une valeur absolue.
1. $(-2 < X - 1 < 2)$
2. $(1 < X < 5)$
3. $(1 + X > 2 > -1 + X)$

15 On lance quatre fois une pièce équilibrée. On s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de Pile obtenus. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}5$.
1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la valeur de X correspondant à l'événement élémentaire (Face, Face, Face, Face) ?
3. À quelles valeurs de X correspond l'événement $\{|X - 2| \geqslant 2\}$?
Quels sont les événements élémentaires constituant cet événement ?

16 Soit X une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 10.
1. Donner une majoration de la probabilité $P(|X - 50| \geqslant 10)$.
2. En déduire une minoration de $P(40 < X < 60)$.

17 Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 16.
1. Donner une majoration de la probabilité que X s'écarte de son espérance d'au moins 4.
2. Donner une majoration de la probabilité que X s'écarte de 10 d'au moins 10.

18 **Calculer**
Soit X une variable aléatoire.
Donner une majoration de chaque probabilité suivante.
1. $P(|X - E(X)| \geqslant \sigma(X))$
2. $P(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X))$
3. $P(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X))$

19 Soit X une variable aléatoire.
• Déterminer a pour que la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins a fois son écart type soit inférieure à 1 %.

20 Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 10 et de variance 5.
1. Donner une majoration de la probabilité $P(|X - 10| \geqslant 10)$.
2. En déduire une majoration de $P(X \geqslant 20)$.

21 **Intervalle de fluctuation**
On considère une variable aléatoire X d'espérance 12 et de variance 40.
1. Déterminer la valeur de $t > 0$, telle que $\dfrac{V(X)}{t^2} = 0{,}4$.
2. En déduire que $P(|X - 12| \geqslant 10) \leqslant 0{,}4$.
3. En déduire que la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $[2\,;22]$ est d'au moins 0,6.
On dit que $[2\,;22]$ est un intervalle de fluctuation de X au seuil de 0,6.

22 **Communiquer**
Chaque jour un train subit au départ un retard aléatoire, noté X, mesuré en minutes.
On suppose que $E(X) = 10$ et $V(X) = 100$.
Un passager porte réclamation en assurant qu'un jour sur deux, le train a plus de 30 minutes de retard.
• Justifier que cette affirmation est sans doute très exagérée.
On peut commencer par exprimer $P(X \geqslant 30)$ sous la forme $P(|X - 10| \geqslant \ldots)$.

23

Le nombre de croissants vendus dans une boulangerie en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

• Justifier que la probabilité que la vente de demain dépasse 75 croissants est inférieure à 0,04.

24 On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape, indépendamment de la précédente, on a une probabilité $\frac{1}{2}$ de faire un pas vers la droite et une probabilité $\frac{1}{2}$ de faire un pas vers la gauche.

On note, pour i un entier naturel non nul, X_i la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1).$$

Pour n entier strictement positif, on pose :

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

1. Que représente S_1 ? S_2 ?
2. Que représente S_n ?
3. Déterminer l'espérance et la variance des variables aléatoires X_i pour $i \geqslant 1$.
4. En déduire l'espérance et la variance de S_n.
5. Montrer que pour $t > 0$, $P(|S_n| \geqslant t) \leqslant \frac{n}{t^2}$.
6. En déduire, pour tout x réel positif, une majoration de $P(|M_n| \geqslant x)$.
7. Calculer, pour $x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|S_n| \geqslant x)$ et interpréter le résultat.

Loi des grands nombres

25 On lance cinq fois une pièce non truquée. Pour $1 \leqslant i \leqslant 5$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on obtient Pile au i-ème lancer, et 0 sinon.

On note $S_5 = X_1 + \ldots X_5$

1. Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
2. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
3. En déduire $E(S_5)$ et $V(S_5)$.
4. Que représente la variable aléatoire S_5 ?
5. Justifier que S_5 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
6. Montrer que $P(|S_5 - 2{,}5| \geqslant 2) \leqslant 0{,}3125$.

Interpréter ce résultat.

26 On reprend les conditions et notations de l'exercice 25 et on note $M_5 = \frac{S_5}{5}$.

1. Que représente M_5 ?
2. Déterminer, en justifiant, $E(M_5)$ et $V(M_5)$
3. Montrer que $P(|M_5 - 0{,}5| \geqslant 0{,}4) \leqslant 0{,}3125$.

Interpréter ce résultat.

27 On lance 1 000 fois de suite et de manière aléatoire une pièce bien équilibrée.

1. Montrer que l'événement « La fréquence de Pile est strictement comprise entre 0,45 et 0,55 » a une probabilité supérieure à 0,9.
2. Montrer que l'événement « La fréquence de Pile est strictement comprise entre 0,45 et 0,55 » a une probabilité supérieure à 0,9.

28 Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour être sûr à 99 % que la proportion de Pile est comprise 0,45 et 0,55.

29 On souhaite tester un dé à six faces afin de savoir s'il est truqué. On s'intéresse en particulier à l'apparition du chiffre « 6 ». On note p la probabilité d'obtenir « 6 ». Pour cela on lance n fois le même dé avec n entier naturel non nul. On note M la fréquence empirique d'apparition du chiffre « 6 » et S le nombre de fois que l'on a obtenu le chiffre « 6 » parmi les n lancers.

1. Exprimer M en fonction de S.
2. En déduire l'espérance et la variance de M.
3. On considère que le dé n'est pas truqué. Déterminer un nombre n_0 de lancers de dé permettant d'affirmer, avec un risque inférieur à 5 %, que la fréquence empirique d'apparition du chiffre « 6 » diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus 0,01.
4. On lance le dé n_0 fois et on obtient comme fréquence 18 %.

Que peut-on en conclure ?

30 On teste une pièce pour savoir si elle est bien équilibrée. On la lance n fois et on appelle X la variable qui compte le nombre de Pile apparus.

n	10	100	1000	10 000	100 000
X	4	46	457	4582	47 564

• En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans le cadre d'une loi binomiale, peut-on penser que cette pièce est équilibrée ?

31 On considère une boîte de conserve cylindrique. Lorsqu'on lance en l'air la boîte de conserve, elle peut retomber sur une base du cylindre ou sur le côté.

On note p la probabilité que la boîte tombe sur le côté du cylindre.

1. Peut-on connaître la valeur de p à l'avance pour une boîte de dimensions données ?
2. Montrer que si on lance un grand nombre de fois la boîte de conserve, on peut appliquer la loi des grands nombres.
3. Comment peut-on faire pour estimer p ?

32 **Modéliser, calculer**

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Après l'avoir lancé, on s'intéresse à la face du dé sur laquelle il est posé (face invisible).
On appelle X_1 et X_2 les variables aléatoires qui attribuent la valeur de la face invisible obtenue respectivement au premier lancer et au second.

1. Justifier que X_1 et X_2 suivent la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, éventuellement à l'aide d'un tableau à double entrée.
3. Calculer, à partir de la question précédente, $E(X_1 + X_2)$, puis $V(X_1 + X_2)$.
4. Vérifier que $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ et que $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.

33 **Modéliser, calculer**

Quatre jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 4, sont placés dans un sac opaque.
On choisit de manière aléatoire un jeton dans le sac. On ne le remet pas et on en choisit un deuxième. On appelle X_1 la variable aléatoire qui associe au premier tirage le numéro du jeton choisi et X_2 celle qui associe au second tirage le numéro du jeton choisi.

1. Les deux tirages sont-ils indépendants ? Justifier que X_1 suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, éventuellement à l'aide d'un tableau à double entrée.
3. Calculer, à partir de la question précédente, $E(X_1 + X_2)$ puis $V(X_1 + X_2)$.
4. Déterminer $E(X_1)$ et en déduire $E(X_2)$.
5. La loi de X_2 est-elle une loi uniforme ?
6. Calculer $V(X_1)$ et $V(X_2)$ et comparer $V(X_1) + V(X_2)$ avec $V(X_1 + X_2)$.

34 **Modéliser, calculer, communiquer**

En France métropolitaine en 2019, il y a eu 343 003 naissances de garçons et 329 909 naissances de filles ;

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de garçons qui naissent dans une année.
En supposant que les événements « Avoir une fille » et « Avoir un garçon » sont équiprobables, justifier que le nombre de garçons qui sont nés en 2019 suivait une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n ; \frac{1}{2}\right)$, où n est un entier naturel à déterminer.
2. Calculer le nombre de naissances de garçons qui étaient espérées en 2019.
3. Quel est le pourcentage de naissances supplémentaires de garçons par rapport au nombre espéré pour l'année 2019 ?
4. Donner une majoration de $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0{,}019\right)$, et une minoration de $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}019\right)$.
Comment interpréter ce résultat ?

35 CALCULATRICE

Calculer, raisonner

Quatre jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 4, sont placés dans un sac opaque.

1. On choisit de manière aléatoire un jeton dans le sac. On ne le remet pas et on en choisit un deuxième. On appelle X la variable aléatoire qui associe au premier tirage le numéro du jeton choisi et Y celle qui associe au second tirage le numéro du jeton choisi.
a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X \times Y$ et son espérance
b. A-t-on $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$?
2. On considère maintenant qu'avant de tirer le second jeton, on remet le premier dans le sac.
a. Peut-on considérer comme indépendants les deux tirages ?
b. Déterminer la loi de $X \times Y$ et son espérance.
c. Comparer $E(X \times Y)$ et $E(X) \times E(Y)$.

36 CALCULATRICE

Modéliser, raisonner, communiquer

Pour avancer sur une piste dans un jeu de société, il faut choisir deux cartes, sans remise, dans un jeu de cinq cartes. Deux portent le numéro 1, deux le numéro 2, et la dernière porte le numéro 0. Les cartes sont mélangées, retournées et les dos sont identiques.

1. La règle est d'avancer sur la piste de jeu du nombre de cases correspondant à la somme des valeurs des cartes.
Soit X la valeur de la première carte et Y la valeur de la deuxième.
a. Déterminer la loi de probabilité de X et celle de Y. Que remarque-t-on ?
b. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.
c. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
d. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
Peut-on dire que X et Y sont indépendantes ?
2. La règle est changée, et maintenant on avance de la valeur du produit de deux cartes.
Déterminer $E(XY)$ et $V(XY)$ et comparer avec $E(X)E(Y)$ et $V(X)V(Y)$.

37 **Chercher, calculer**

On lance un dé équilibré une seule fois et on note ω le numéro obtenu.
On s'intéresse aux deux variables aléatoires définies par :

$$\begin{cases} X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \neq 6 \\ X(\omega) = 1 \text{ si } \omega = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(\omega) = 0 \text{ si } \omega \neq 5 \\ Y(\omega) = 1 \text{ si } \omega = 5 \end{cases}$$

1. Justifier que X et Y suivent la même loi de Bernoulli.
2. $X + Y$ suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui quel est son paramètre ?
3. Vérifier que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
4. A-t-on $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$?
5. Que peut-on en déduire pour X et Y ?

38 CALCULATRICE

Raisonner, calculer

Une loterie comporte 10 000 billets. Il y a plusieurs types de lots : catégorie A valeur 100 euros – catégorie B valeur 25 euros – catégorie C valeur 5 euros.

Le nombre des billets de catégories A, B, C est inversement proportionnel à leur valeur, et il y a 75 % de billets perdants.

1. X est la variable aléatoire qui, à un billet choisi de manière équiprobable, associe la valeur du gain.

a. Déterminer le nombre de billets de chaque catégorie.

b. Déterminer la loi de X.

c. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

2. L'organisateur de la loterie fixe le prix d'un billet à 5 €.

Quelle est l'espérance du gain algébrique (le gain compte tenu de la mise) ?

3. Une personne a acheté le premier billet mis en vente et elle a gagné un lot. Elle achète tout de suite le deuxième billet.

a. Quelle est la probabilité que le deuxième billet soit aussi gagnant ?

b. Les deux événements « Le premier billet est gagnant » et « Le deuxième billet est gagnant » sont-ils indépendants ?

4. On note Y la variable aléatoire qui associe à l'achat des deux billets le gain algébrique obtenu, compte tenu de la mise.

Calculer $P(Y \geqslant 0)$ et $E(Y)$.

39 **Modéliser, calculer**

Dans la salle d'attente d'un médecin, il y a déjà deux personnes quand un patient arrive. L'observation et l'expérience qu'a le patient de ce médecin lui ont permis d'établir que la durée d'une consultation (en minute) est une variable aléatoire d'espérance 10 et d'écart type 2.

Juste quand le patient s'assoit, le médecin fait entrer une des deux personnes avant lui.

1. Combien de temps le patient peut-il espérer attendre ?

2. Si on suppose que la durée d'une consultation est indépendante de la durée d'une autre consultation, quel est l'écart type du temps d'attente du patient ?

3. Démontrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que la probabilité que le patient attende entre 15 et 25 minutes est inférieure à 0,16 %.

40 **Parité en entreprise**

Calculer, modéliser, communiquer

Une entreprise emploie $n = 1350$ salariés, dont 473 sont des femmes.

1. En prenant $t = 0{,}137$, écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la proportion de femmes M dans une entreprise de 1 350 salariés ne faisant pas de discrimination de genre à l'embauche.

2. Que peut-on en conclure sur le respect de la parité dans cette entreprise ?

41 **Pile ou face**

Modéliser, raisonner, communiquer

On lance de manière aléatoire une pièce de monnaie.

1. En supposant que les deux événements Pile et Face sont équiprobables, justifier que la variable aléatoire S_n qui compte le nombre de Pile obtenus au bout de n lancers suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

On note $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

2. On suppose que $n = 1\,000$.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} de $P(0{,}49 < M_n < 0{,}51)$.

En déduire une valeur approchée de $P(|M_n - 0{,}5| > 0{,}1)$

3. Mêmes questions pour $n = 10^4$ puis $n = 10^5$.

4. Que peut-on dire de la suite u_n définie par $u_n = P(0{,}49 < M_n < 0{,}51)$ pour $n \neq 0$?

Justifier la réponse par un théorème du cours.

42 TABLEUR

Représenter, modéliser, calculer

Les notes d'un examen national de mathématiques sont données dans le tableau suivant :

Note	1	2	3	4	5
Fréquence	0,001	0,003	0,004	0,006	0,015

Note	6	7	8	9	10
Fréquence	0,035	0,075	0,123	0,155	0,167

Note	11	12	13	14	15
Fréquence	0,156	0,115	0,080	0,042	0,012

Note	16	17	18	19	20
Fréquence	0,005	0,002	0,002	0,001	0,001

1. Dans un tableur, reproduire ces données (notes en colonne A, fréquences en colonne B) et utiliser l'outil graphique pour représenter la série sous forme d'un diagramme en bâtons.

2. Utiliser les fonctions du tableur pour calculer la moyenne et la variance de la série.

3. En colonne C, utiliser la formule de la loi binomiale `=LOI.BINOMIALE.N(A…;20;0,5;1)` et la recopier vers le bas pour toutes les valeurs entrées en colonne A.

a. Comparer avec les valeurs de la série statistique.

b. En utilisant un tableur, calculer la moyenne et la variance de la série des notes et les comparer à l'espérance et à la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}5)$.

c. Paraît-il pertinent au vu de ces données de modéliser l'attribution d'une note N comme une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}5)$?

4. On adopte cette modélisation.

a. Déterminer en utilisant le tableur ou la calculatrice :

- $P(5 < N < 15)$;
- $P(2 < N < 18)$;
- $P(8 < N < 12)$.

b. Comparer ces valeurs avec les fréquences observées.

43 **Modéliser, calculer, communiquer**

On répète 10 fois de suite, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier i compris entre 1 et 10, on note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient le succès et 0 sinon.

On pose $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i = X_1 + \ldots + X_{10}$.

1. Déterminer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour tout entier i compris entre 1 et 10.
2. Déterminer $E(S_{10})$ et $V(S_{10})$ en justifiant les calculs.
3. Justifier que S_{10} suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. Donner une minoration de $P(0 \leqslant S_{10} \leqslant 5)$. Interpréter ce résultat.

44 **Une même fournée**

Calculer, communiquer

Un boulanger sait d'expérience que 5 % des pains qu'il fabrique ne peuvent pas être mis en vente à cause des défauts de cuisson.

Soit i un entier naturel. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le i-ème pain est commercialisable, égale à 0 sinon.

On note S_{50} la variable aléatoire égale au nombre de pains vendables parmi une fournée de 50 pains.

1. Quelle est la loi de X_i ?
2. En déduire $E(S_{50})$.
3. Expliquez pourquoi S_{50} ne suit a priori pas une loi binomiale.

45 **Modéliser, calculer**

Une association organise un jeu d'argent pour récolter des fonds. Chaque participant doit verser 9 € de participation avant de lancer trois dés équilibrés. Si le résultat est un 421, il gagne 99 €.

1. Montrer que la probabilité de faire un 421 est $\frac{1}{36}$.

On note G_i le gain algébrique du i-ème participant.

2. Donner la loi de chaque G_i.
3. Calculer son espérance et sa variance.

On pose $M_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} G_i}{n}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \geqslant t\right)$

5. On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'association après la participation de n personnes.

a. Exprimer X_n à l'aide des variables aléatoires G_i.

b. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

7. On suppose que 100 personnes vont participer. Donner une minoration de la probabilité que le gain algébrique de l'association soit strictement compris entre 600 € et 650 €.

46 **Œufs** CALCULATRICE

Calculer, modéliser, communiquer

Les œufs de poules sont catégorisés de la façon suivante :

- 0 pour les œufs de poules élevées en plein air en agriculture biologique ;
- 1 pour les œufs de poules élevées en plein air ;
- 2 pour les œufs de poules élevées au sol ;
- 3 pour les œufs de poules élevées en cage.

Dans une petite ville, la répartition d'œufs vendus par catégorie est, d'après le groupement des commerçants, stable et la suivante.

Catégorie	0	1	2	3
Proportion	0,3	0,5	0,12	0,08

On prélève un œuf. On note X la variable aléatoire égale à 1 si l'œuf est issu de l'agriculture biologique et 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X ?

On répète cette opération et on prélève un échantillon de taille 100 parmi ces œufs. On note M_{100} la variable aléatoire égale à la proportion

2. Quelle est la loi de $S_{100} = 100 M_{100}$?
3. Donner une majoration de $P(S_{100} \in]20;40[)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

En déduire une majoration de $P(M_{100} \in]0,2\,;0,4[)$.

4. À l'aide de la calculatrice et de la loi de S_{100}, calculer $P(S_{100} < 40)$ et $P(S_{100} \geqslant 20)$.

En déduire la valeur de $P(S_{100} \in]20;40[)$ et de $P(M_{100} \in 0,2\,;0,4[)$.

5. Une association de consommateurs affirme que la proportion d'œufs de catégorie 0 est surestimée car elle a observé, sur 100 œufs achetés, une fréquence d'œufs de catégorie 0 égale à 0,18. Donner une majoration de la probabilité que l'association se trompe dans son affirmation.

47 Soit n un entier naturel positif. On considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli associées à n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.

On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Soit $\alpha \in]0\,;1[$. On pose $t = \sqrt{\dfrac{V(M_n)}{\alpha}}$.

1. Montrer que $t = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n\alpha}}$.

2. Montrer que $P\left(|M_n - p| \geqslant \sqrt{\dfrac{V(M_n)}{\alpha}}\right) \leqslant \alpha$.

3. En déduire que l'on a :

$$P\left(M_n \in \left]p - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n\alpha}}\,;\, p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n\alpha}}\right[\right) \geqslant 1 - \alpha.$$

Cet intervalle est appelé intervalle de fluctuation de M_n au seuil $1 - \alpha$.

4. Montrer que, pour tout $0 < x < 1$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

5. En déduire que l'intervalle $\left]p - \sqrt{\dfrac{1}{n}}\,;\, p + \sqrt{\dfrac{1}{n}}\right[$ est un intervalle de fluctuation de M_n au seuil de 0,75.

48 Soit X une variable aléatoire réelle. On note $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$.

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$P(X - m \geqslant \alpha) = P(X - m + t \geqslant \alpha + t).$$

2. Vérifier que $E\left[(X - m + t)^2\right] = \sigma^2 + t^2$.

3. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout $t > 0$, on a :

$$P(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2 + t^2}{(\alpha + t)^2}.$$

4. a. Soit la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(t) = \frac{\sigma^2 + t^2}{\alpha^2 + t^2 + 2\alpha t}.$$

Montrer que la fonction h admet un minimum en $t = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$ et que ce minimum vaut $\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}$.

b. En déduire que :

$$P(X - m > \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

c. Par un raisonnement analogue, on admet que l'on pourrait établir que :

$$P(X - m < -\alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

En utilisant que :

$$|X - m| > \alpha \Leftrightarrow X - m > \alpha \text{ ou } X - m < -\alpha,$$

montrer enfin que l'on a :

$$P(|X - m| > \alpha) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

d. Montrer que la majoration obtenue est meilleure que celle que l'on obtient avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si et seulement si $\alpha \leqslant \sigma$.

49 **Estimation du paramètre p inconnu d'une loi binomiale** Approfondissement

On considère une urne ne comportant que des boules rouges en proportion p inconnue et des boules vertes en proportion q ($p + q = 1$). On effectue n tirages d'une boule avec remise dans cette urne. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.

1. Déterminer la loi de S_n.

2. a. On considère $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Justifier, à l'aide de la loi des grands nombres, qu'il est naturel, pour n assez grand, d'approcher la valeur de p par M_n.

b. On effectue $n = 50$ tirages et on obtient 22 fois une boule rouge.

Donner une estimation de la valeur de la proportion inconnue p.

3. a. Justifier que, pour $t > 0$, on a :

$$P(|M_n - p| \geqslant t) \leqslant \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

b. Montrer que la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(p) = p(1-p)$ est majorée par $\dfrac{1}{4}$.

c. En déduire que :

$$P(M_n - t < p < M_n + t) \geqslant 1 - \frac{1}{4nt^2}.$$

4. Pour $n = 50$ tirages, déterminer la plus petite valeur de t pour laquelle $P(M_n - t < p < M_n + t) \geqslant 0{,}95$.

On dit que $I =]M_n - t\,;\, M_n + t[$ est un intervalle de confiance pour p au niveau 0,95. Cela signifie que l'on a un risque d'au plus 5 % de se tromper en affirmant que $p \in I$.

50 **Sondage** Approfondissement

Avant une élection qui oppose deux candidats A et B, un institut de sondage interroge au hasard $n = 1000$ personnes. On considère que cette situation peut être assimilée à un tirage avec remise. On note p la proportion d'électeurs décidés à voter pour le candidat A dans la population des électeurs. On considère M_n la proportion de personnes interrogées pour le sondage qui se déclarent en faveur du candidat A.

1. Parmi les 1 000 personnes interrogées pour le sondage, 540 se sont déclarées en faveur du candidat A. Donner une valeur estimée de p d'après ce sondage.

2. Établir que, pour $t > 0$, on a :

$$P(p \in]M_n - t\,;\, M_n + t[) \geqslant 1 - \frac{1}{4nt^2}.$$

3. Montrer que $1 - \dfrac{1}{4000t^2} \geqslant 0{,}95$ équivaut à $t \geqslant \dfrac{1}{10\sqrt{2}}$.

En déduire que l'intervalle $I =]M_n - 0{,}071\,;\, M_n + 0{,}071[$ vérifie $P(p \in I) \geqslant 0{,}95$.

4. Peut-on pronostiquer la victoire du candidat A avec une probabilité d'erreur inférieure à 5 % ?

5. L'institut de sondage souhaite donner une fourchette d'estimation de p avec une précision de $\pm 0,01$ avec une probabilité d'erreur inférieure à 5 %.
Combien de personnes doit-il interroger ?

Aide : On repart de l'inégalité établie à la question 2, et on impose $t = 0,01$. On cherche la plus petite valeur de n telle que $\frac{1}{4nt^2} \leqslant 0,05$.

51 Spécificité et sensibilité d'un test

Un test de dépistage rapide sur des patients atteints d'une maladie doit permettre d'estimer si la maladie est d'origine virale ou non, sans avoir recours à des analyses plus longues et compliquées. On veut s'assurer que le test de dépistage est de bonne qualité, c'est-à-dire qu'il est positif lorsque la maladie est d'origine virale et négatif sinon, avec un faible risque d'erreur.
Une étude clinique est réalisée sur 500 patients malades dont on sait que 250 ont la maladie virale et 250 la maladie non virale.
Les résultats du test de dépistage rapide sont consignés dans le tableau ci-dessous.

	Maladie virale	Maladie non virale
Test positif	210	50
Test négatif	40	200

On appelle « sensibilité » la probabilité que le test de dépistage soit positif quand la maladie est virale : c'est la probabilité de « vrais positifs », notée p_1. De même, on appelle « spécificité » la probabilité que le test soit négatif quand la maladie n'est pas virale, notée p_2.

1. Soit M_n la proportion de patients dont le test est positif parmi les 250 patients atteints de la maladie virale. Vérifier que :
$$P\left(M_n - \frac{1}{5\sqrt{2}} < p_1 < M_n + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \geqslant 0,95.$$

2. On note $\overline{M_n}$ la proportion de patients dont le test est négatif parmi les 250 patients atteints de la maladie non virale. Montrer que l'on a :
$$P\left(\overline{M_n} - \frac{1}{5\sqrt{2}} < p_2 < \overline{M_n} + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \geqslant 0,95.$$

3. À l'aide des valeurs du tableau, donner les fourchettes d'estimation pour la sensibilité p_1 et la spécificité p_2 avec un risque d'erreur d'au plus 5 %.

52 Inégalité de concentration de Hoeffding

Soit n un entier naturel non nul.
On considère $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli associées à n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre 0,5.

On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$.

Partie A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x}{4(x+1)^2},$$
et la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$$g(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right).$$

1. Montrer que, pour tout x réel positif, $f(x) \leqslant \frac{1}{16}$.

2. Vérifier que $g''(x) = 4f\left(e^x\right)$.

3. En déduire que $g''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout réel x positif.

4. On rappelle que pour $x \geqslant 0$, on a :
$$g'(x) = \int_0^x g''(t)\,dt.$$
Montrer que $g'(x) \leqslant \frac{x}{4}$.

5. De même, pour tout réel x positif :
$$g(x) = \int_0^x g'(t)\,dt$$
Montrer que, pour $x \geqslant 0$, on a :
$$g(x) \leqslant \frac{x^2}{8}.$$

6. En déduire que, pour $x \geqslant 0$, on a :
$$\frac{e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}}{2} = e^{g(x)} \text{ puis que } \frac{e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}}{2} \leqslant e^{\frac{x^2}{8}}.$$

Partie B. Application

Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose $Y = \exp\left(t\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)\right)$.

Remarque : on utilise la notation exp, qui désigne la fonction exponentielle, lorsque l'écriture qui devrait être normalement en exposant est très longue.

1. Montrer que $P\left(Y = e^{-\frac{t}{2}}\right) = P\left(Y = e^{\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

2. En déduire que $E(Y) = \frac{e^{-\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}}}{2}$ et que $E(Y) \leqslant e^{\frac{t^2}{8}}$.

3. Soit a un nombre réel strictement positif.

a. Montrer que $x - \frac{1}{2} \geqslant a$ équivaut à :
$$\exp\left(t\left(x - \frac{1}{2}\right) - t \times a\right) \geqslant 1.$$

b. En déduire que l'on a :
$$P\left(M_n - \frac{1}{2} \geqslant a\right) = P\left(\exp\left(t\left(M_n - \frac{1}{2}\right) - at\right) \geqslant 1\right).$$

4. En déduire, en utilisant l'inégalité de Markov, que l'on a :
$$P\left(M_n - \frac{1}{2} \geqslant a\right) \leqslant E\left[\exp\left(t\left(M_n - \frac{1}{2}\right) - at\right)\right].$$

5. On admet que, pour tout $t \geqslant 0$, on a :
$$E\left[\exp\left(t\left(M_n - \frac{1}{2}\right) - at\right)\right] = \exp(-at)\exp\left(\frac{t^2}{8n}\right).$$
Montrer que la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \exp\left(-at + \frac{t^2}{8n}\right)$ atteint son minimum en $t_0 = 4na$.

6. En déduire que $P\left(M_n - \frac{1}{2} \geqslant a\right) \leqslant e^{-2na^2}$.

ZOOM SUR... les variables aléatoires

Tout ce qui est relatif aux sommes de variables aléatoires (linéarité de l'espérance, propriété de la variance, transformation de variables aléatoires) est au programme de l'épreuve du baccalauréat. En revanche, ce qui est relatif aux inégalités de concentration (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) et à la loi des grands nombres n'est pas dans les attendus de l'examen. Cette première page est donc consacrée à trois problèmes de type baccalauréat. La page suivante est consacrée à des problèmes de synthèse sur la partie hors épreuve.

53 25 min

Un jeu de plateau se joue avec deux dés : un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé dodécaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 12.

Pour avancer sur la piste de jeu, il faut lancer les deux dés. On avance alors d'autant de cases que la somme des numéros indiqués par les deux dés.

Partie A

On appelle X la variable aléatoire qui attribue au lancer du dé cubique le numéro de la face obtenue, Y celle qui attribue le numéro de la face obtenue au lancer du dé dodécaédrique, et Z la somme de X et de Y.

1. Déterminer la loi de X, puis celle de Y.
2. Déterminer $E(Z)$.
3. Justifier qu'on peut considérer les deux variables X et Y comme indépendantes.
4. En déduire $V(Z)$.

Partie B

Une règle est ajoutée en cours de jeu : si on obtient un total supérieur à 15, on a droit à un déplacement bonus de deux cases.

1. Quelle est la probabilité d'avoir ce bonus ?
2. On appelle B la variable aléatoire qui associe 1 si un joueur a eu le bonus, 0 s'il ne l'a pas eu, et S_n le nombre de bonus obtenus sur n lancers de deux dés.
Exprimer $E(S_n)$, puis $V(S_n)$.
3. On appelle Z_n le total des points obtenus au bout de n lancers des deux dés.
Calculer $E(Z_n + S_n)$.
4. Le parcours comporte 300 cases.
Quel nombre moyen de lancers de dés faut-il faire pour terminer le parcours ?

54 25 min

Un ancien jeu d'argent, le « 7 et demi », se joue avec un jeu de 32 cartes. Chaque carte a une valeur, indépendante de sa couleur : un as vaut 7 points, un roi 4 points, une dame 3 points, un valet 2 points et toutes les autres cartes, du 7 au 10, valent un demi-point. Le jeu consiste à avoir exactement « 7 et demi » points en plusieurs cartes.

Un joueur a le jeu de cartes devant lui, faces cachées, les dos étant tous identiques. Il joue seul et tire une carte et la pose devant lui, face visible. Il en tire une seconde et la pose à côté de la première, face visible.

On appelle X_1 la variable aléatoire qui associe à la première carte tirée sa valeur et X_2 celle qui associe à la deuxième carte sa valeur.

1. Calculer $E(X_1)$.
2. Calculer $P(X_1 + X_2 = 7{,}5)$, $P(X_1 + X_2 = 14)$, $P(X_1 + X_2 = 11)$ et $P(X_1 + X_2 = 1)$.
3. L'extrait de tableur ci-dessous donne en colonne B les valeurs de probabilités des issues de $X_1 + X_2$.
Quelle formule a été entrée en cellule C2 et recopiée dans les cellules de C3 à C15 ? À quoi correspond la valeur calculée en cellule C16 ?

	A	B	C
1	valeurs de s	p(X1+X2=s)	s*p(X1+X2)=s
2	14	0,01209677	0,169354839
3	11	0,03225806	0,35483871
4	10	0,03225806	0,322580645
5	9	0,03225806	0,290322581
6	8	0,01209677	0,096774194
7	7	0,03225806	0,225806452
8	7,5	0,12903226	0,967741935
9	6	0,04435484	0,266129032
10	5	0,03225806	0,161290323
11	4,5	0,12903226	0,580645161
12	4	0,01209677	0,048387097
13	3,5	0,12903226	0,451612903
14	2,5	0,12903226	0,322580645
15	1	0,24193548	0,241935484
16	total	1	4,5

4. Déduire des questions précédentes l'espérance de X_2.

55 15 min

On dispose de trois cartes numérotées de 1 à 3 dont les dos sont identiques. Le jeu de « la course à zéro » se joue à deux et consiste à tirer une carte puis à la remettre dans le paquet et à le mélanger avant de le donner à son adversaire. Chaque joueur possède un capital de 6 points et enlève de ce capital autant de points que l'indique la carte. S'il n'a pas assez de points pour enlever ce que la carte indique, il passe son tour. Le premier qui arrive à 0 exactement gagne la partie.

On note A_n la variable aléatoire qui donne la valeur du capital du joueur après n coups, et X_n la valeur de la n-ième carte tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1 et de X_2
2. Déterminer la loi de probabilité de A_2 et montrer que $E(A_2) = 6 - E(X_1 + X_2)$.
3. Sans déterminer la loi de probabilité de A_3, justifier que $E(A_3) \neq 6 - E(X_1 + X_2 + X_3)$.
4. Déterminer la valeur de $E(A_3)$ puis de $E(A_4)$.
5. Est-ce que $E(A_6) = 0$?
6. Existe-t-il une valeur de n telle que $E(A_n) = 0$?

56 20 min

Une chaîne de magasins spécialisés en parfumerie souhaite mener une étude sur la conformité des flacons de parfum qu'elle commande. Elle choisit un fournisseur et mesure la contenance de tous les flacons d'un parfum particulier.

La chaîne a reçu 1 500 exemplaires d'un flacon de ce parfum. L'étiquette affirme qu'il contient 100 mL de parfum. Lors de la mise en flacon, il est tenu compte de l'évaporation (échanges avec l'air restant dans le flacon). La machine qui remplit les flacons est réglée sur un volume de 102 mL.

On considère qu'un flacon est correctement rempli si, lors de la réception et la mise en vente, il contient plus de 98 mL de parfum.

Les expérimentations et mesures faites auparavant ont permis de modéliser le volume du flacon par une variable aléatoire d'espérance $\mu = 100$ et de variance $V = 1$. La variable aléatoire qui mesure le volume du parfum est notée X.

1. Majorer $P(|X - 100| \geqslant 2)$.
2. En déduire une minoration de $P(98 < X < 102)$.
3. On suppose que la loi de X est symétrique par rapport à l'espérance, c'est à dire que :

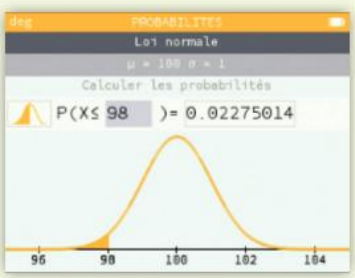
$$P(X < 100 - 2) = P(X > 100 + 2).$$

En déduire une majoration de $P(X < 98)$.

4. Sur les 1 500 flacons reçus, le grossiste a constaté que 200 avaient une contenance de parfum liquide inférieur à 98 mL.

Le grossiste peut-il estimer que la commande reçue est conforme aux attentes ?

5. Pour affiner la réponse à la question précédente, une étude plus avancée a établi que la loi de probabilité utilisée est une loi dite « loi normale » d'espérance 100 et de variance 1. Cette loi est présente dans les menus des calculatrices scientifiques. Sur une calculatrice on a obtenu une valeur de $P(X \leqslant 98)$.



Peut-on reconsidérer la réponse à la question 4 ?

57 30 min

Les résultats seront approchés à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 et de 1, appelés bits. Une suite de 8 bits est appelée octet.

Par exemple 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie successivement 8 bits qui forment un octet. On suppose que la transmission d'un bit est indépendante de transmission des bits précédents, et on admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est 0,01.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bits mal transmis dans un octet.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à 3 est négligeable » ? Argumenter la réponse.

Partie B

Les erreurs de transmission de bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous.

Transmission idéale de 0 puis 1

Transmission réelle, bruitée, de 0 puis 1

On admet que l'information d'un bit reçu incluant le bruit peut être modélisée par une variable aléatoire dont l'espérance est la valeur du bit envoyé. Cette information brouillée est ensuite débruitée pour retrouver le signal envoyé.

Si on envoie un bit de valeur 1, cette variable aléatoire, notée R, a pour espérance 1 et pour variance 0,09.

On considère que le bit reçu n'est pas bien interprété si $R \leqslant 0,4$.

1. Donner une majoration de $P(|R - 1| > 0,6)$.
2. On suppose que la loi de R est symétrique par rapport à 1, c'est-à-dire que :

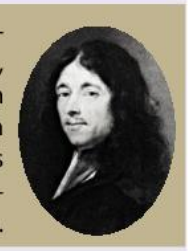
$$P(R \leqslant 0,4) = P(R \geqslant 1,6).$$

En déduire une majoration de $P(R \leqslant 0,4)$.

Consolider ses fondamentaux

58 Le problème du chevalier de Méré

Le chevalier de Méré s'est posé le problème suivant : « lorsqu'on joue au dé, est-il avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant quatre fois le dé ? ».
Il a montré par un calcul que la réponse est oui, et a entrepris de le montrer expérimentalement, mais n'a pas pu aboutir.
On se demande combien il faut faire de lancers de quatre dés pour avoir 95 % de chances que la fréquence obtenue soit supérieure à 0,5.



Antoine Gombaud (1607-1684), dit chevalier de Méré, penseur et mathématicien amateur, était contemporain de Pascal et Fermat. Leurs échanges épistolaires ont initié la théorie des probabilités.

Questions Va piano TABLEUR

1. La phrase « Il est plus avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant quatre fois un dé » signifie qu'il vaut mieux parier sur l'événement « On va obtenir au moins un 6 lors de quatre lancers » plutôt que sur l'événement contraire. Traduire cette affirmation en termes de probabilités.
2. On veut simuler 1 000 fois quatre lancers d'un dé, dans une feuille de tableur.
Pour simuler le lancer d'un dé, utiliser l'instruction `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)`
Pour compter le nombre de 6 obtenus sur les quatre lancers, utiliser l'instruction `=NB.SI(B2:E2;6)`
Créer une feuille de tableur contenant :
• en colonne A : le numéro de série de quatre lancers de 1 à 1000 ;
• en colonnes B à E : le résultat d'un lancer de dé ;
• en colonne F : le nombre de 6 obtenus dans les quatre lancers ;
• en colonne G : un 1 si on a au moins un 6 au cours des quatre lancers.
3. Peut-on conjecturer le résultat ?

Questions Moderato

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé bien équilibré.
On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient un 6 en lançant le dé (succès) et 0 sinon (échec).
1. Justifier que X est une épreuve de Bernoulli dont on donnera le paramètre p.
2. On lance quatre fois le dé. On répète donc quatre fois, de manière indépendante, l'expérience aléatoire précédente. On appelle N la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus au cours des quatre lancers.
Quelle est la loi de N ?
3. Montrer que l'on a :

$$P(N \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4,$$

et conclure sur la question du chevalier de Méré.

Questions Allegro

Le chevalier de Méré a malencontreusement affirmé : « De même qu'il est avantageux de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant quatre fois un dé, il est avantageux de parier sur un double 6 en lançant 24 fois un couple de dés. »
Pascal lui prouva qu'il avait tort.
• Définir l'univers de l'expérience « Lancer un couple de dés », déterminer la probabilité d'obtenir un double 6 puis retrouver le résultat que Pascal envoya au chevalier de Méré : la probabilité d'obtenir au moins une fois un double 6 en lançant 24 fois un couple de dés est égale à :

$$p' = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491.$$

Se préparer aux études supérieures

59 Produit de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli

Approfondissement

Sur un univers Ω muni d'une probabilité P on considère deux épreuves de Bernoulli de succès S et S'. On note X la variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(S)$ et Y la variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p' = P(S')$.

1. Justifier que $(XY = 1) = (X = 1) \cap (Y = 1)$.
2. On suppose X et Y indépendantes.
Justifier que $E(XY) = E(X)E(Y)$.
3. On suppose $Y = 1 - X$.
a. Calculer $E(XY)$ et $E(X)E(Y)$.
b. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On suppose $Y = X$.
a. Calculer $E(XY)$ et $E(X)E(Y)$.
b. X et Y sont-elles indépendantes ?

No problem!

1 Sum of random variables

A mini-market decides to organise a game of chance to attract customers.
At each checkout the customer can buy a £5.00 ticket, with two scratch boxes.
By scratching the first box, you discover your first win and then the second box indicates the ticket number. (there are 10,000 tickets).
For the first scratch:

- 100 tickets make you win £100
- 10 tickets win £10
- 50 tickets win £5
- the others are losing tickets

For the second scratch, only numbers in the hundreds earn £100.
Let X and Y be the random variables corresponding respectively to the gains of the first and second scraping.

1. What is the X expectancy?
2. What is Y expectancy?
3. What is the expectancy of gain in the end?
4. Is it a fair game? Give two solutions to make it fair.

2 Law of large numbers

The law of large numbers was first used with a view towards analysing games of chance.
Let's consider an endless sequence of repetitions of a game of pure chance with only two outcomes, a win or a loss. Labelling the probability of a win p, we look for the fraction of times that such a game would be won a large number of times. It is commonly believed that this fraction should eventually be close to p.

- Give an example that illustrates this law.

3 Good match PAIR WORK

1. Associate each mathematician with his quotation.
2. Choose one of them and prepare an oral presentation to the class.

Jacob Bernoulli	What nature does blindly, slowly and ruthlessly, man may do providently, quickly and kindly. As it lies within its power, so it becomes his duty to work in that direction.
Pafnuty Chebyshev	It is utterly implausible that a mathematical formula should make the future known to us, and those who think it can would once have believed in witchcraft.
Karl Friedrich Gauss	All the truths of mathematics are linked to each other, and all means of discovering them are equally admissible.
Francis Galton	The greatest advantage in gambling lies in not playing at all.
Adrien-Marie Legendre	Mathematics is the queen of science.
Gerolamo Cardano	To isolate mathematics from the practical demands of the sciences is to invite the sterility of a cow shut away from the bulls.

Final exam Past papers

1 The discrete random variable X has the following probability distribution.

$P(X = x) = \frac{x^2}{54}$ for $x = 2, 3, 4, 5$ and $P(X = x) = 0$ otherwise.

1. Calculate the variance of X.
2. Three independent observations X_1, X_2, X_3 are taken from the distribution of X.
Determine the value of $E(X_1 + X_2 + X_3)$.

2 The discrete random variable X has the following probability distribution.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.1	a	b

Where a, b are positive constants.
1. a. Show that $a + b = 0.4$
b. Given that $E(X) = 2.85$, obtain a second equation involving a and b.
Hence determine the value of a and the value of b.
2. Given that X_1 and X_2 are independent observations of the random variable X, determine $P(X_1 + X_2 \leqslant 4)$.

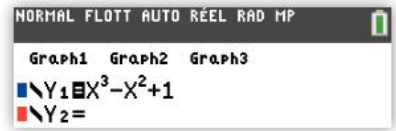
1. Fonctions

Appuyer sur la touche [mode] et vérifier que le mode **FONCTION** est selectionné.

a. Entrer une fonction

Taper sur [f(x)] et entrer l'expression de la fonction en utilisant la touche [X,T,θ,n] pour écrire la variable x puis appuyer sur [entrer].

Remarque : Pour écrire le cube, taper sur [^] [3].



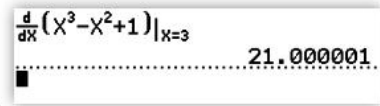
b. Calculer un nombre dérivé

Quitter le menu précédent et taper sur [math] puis choisir **8:nbreDérivé(**.

On obtient l'affichage $\frac{d}{d\square}(\square)|_{\square=\square}$.

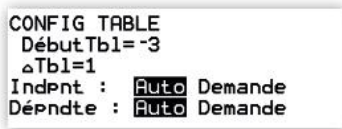
En complétant les champs manquants comme ci-contre, on calcule le nombre dérivé de la fonction précédente en 3.

Remarque : Parfois, la calculatrice donne des valeurs approchées.

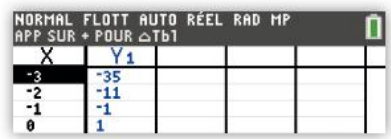


c. Afficher un tableau de valeurs

En tapant d'abord sur [2nde] [fenêtre] (déf table f2), choisir le début et le pas de la table.

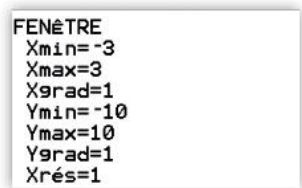


En tapant ensuite sur [2nde] [graphe] (table f5), afficher le tableau de valeurs.



d. Afficher une représentation graphique

En tapant d'abord sur [fenêtre], choisir la fenêtre d'affichage puis taper [graphe], pour afficher la courbe représentative.

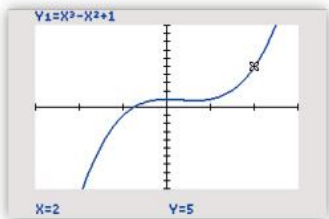


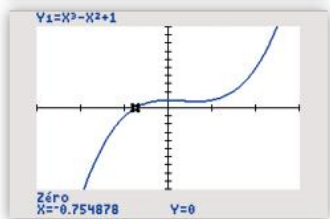
e. Effectuer des lectures graphiques

Lorsque la courbe est affichée, taper sur [trace] pour activer le mode **Trace**.
Un curseur apparaît sur la courbe, que l'on peut déplacer. Pour placer ce curseur au point d'abscisse 2, il suffit de taper [2] [entrer].

En tapant sur [2nde] [trace] (calculs f4), on accède au menu **CALCULER** qui permet de faire des lectures graphiques (extremums, racines, intersection…).

Exemple : En sélectionnant **2:racine** et après avoir précisé la **borne gauche**, la **borne droite**, une **valeur initiale** et en appuyant sur [entrer], on obtient une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle [**borne gauche** ; **borne droite**].

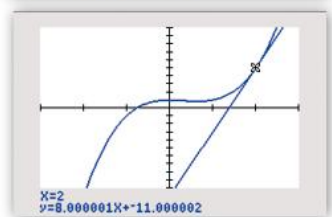




f. Tracer une tangente et obtenir une équation

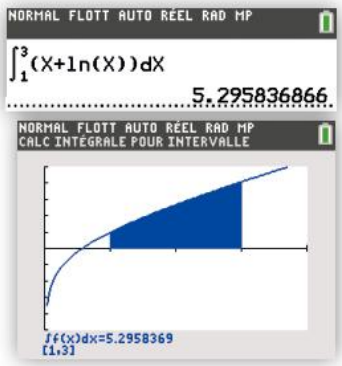
Lorsque la courbe est affichée, taper sur [2nde] [prgm] (dessin C) puis choisir **5:Tangente(**.

Pour obtenir la tangente en 2, il suffit de taper sur [2] [entrer].



g. Calculer une intégrale

Taper sur [math] puis choisir 9:intégrFonct(. On obtient alors l'affichage $\int_{\square}^{\square}(\square)d\square$.
En complétant les champs manquants comme ci-contre, on obtient une valeur approchée de $\int_1^3 x+\ln(x)\,dx$.



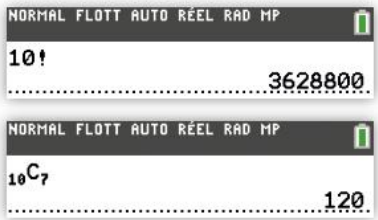
Remarque : On peut aussi calculer cette intégrale en représentant la fonction sur la calculatrice, puis taper sur [2nde] [trace] (calculs f4) et choisir 7:∫f(x)dx. Entrer enfin la borne inférieure (ici 1) et la borne supérieure (ici 3) et taper [entrer].

2. Combinatoire et probabilités

a. Factorielle et combinaison

Pour calculer 10!, écrire 10 puis taper sur [math] puis choisir PROB et sélectionner 4:! Puis appuyer sur [entrer].

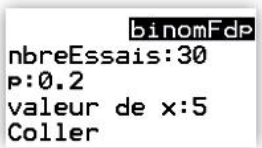
Pour calculer $\binom{10}{7}$, taper sur [math] puis choisir PROB et sélectionner 3:Combinaison. Enfin compléter les champs manquants comme ci-contre et appuyer sur [entrer].

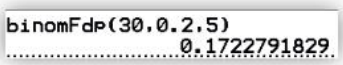


b. Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$

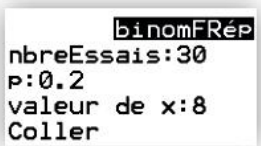
On suppose que $n=30$ et $p=0{,}2$. Taper sur [2nde] [var] (distrib).

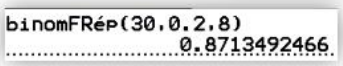
Calculer $P(X=k)$:
Pour calculer $P(X=5)$ sélectionner A:binomFdp(puis dans **nbreEssais**, écrire n (ici 30), dans **p**, écrire p (ici 0,2) et dans **valeur de x** écrire k (ici 5). Taper sur [entrer] pour obtenir :





Calculer $P(X \leqslant k)$:
Pour calculer $P(X \leqslant 8)$, sélectionner B:binomFRép(puis dans **nbreEssais**, écrire n (ici 30), dans **p**, écrire p (ici 0,2) et dans **valeur de x** écrire k (ici 8). Taper sur [entrer] pour obtenir :



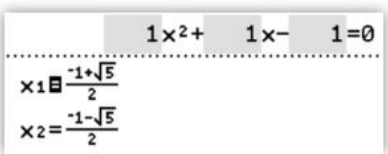


3. Résoudre une équation ou un système

Appuyer sur [résol] (apps f) et selectionner 2:PlySmlt2.

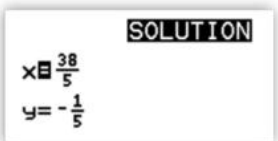
a. Résoudre une équation de degré 2

Choisir 1:RACINES D'UN POLYNôME. Sélectionner le degré du polynôme et taper sur [alpha] [graphe] (table f5) pour accéder à la page suivante et entrer les valeurs des coefficients du polynôme en utilisant les flèches. Enfin taper sur [alpha] [graphe] (table f5) pour obtenir les éventuelles solutions.



b. Résoudre un système d'équations

Choisir 2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS. Sélectionner le nombre d'équations et d'inconnues puis entrer les valeurs des coefficients du système. Taper sur [alpha] [graphe] (table f5) pour résoudre le système.



4. Suites

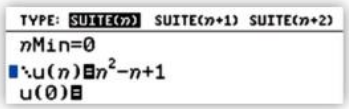
Appuyer sur la touche mode et sélectionner sur la cinquième ligne le mode SUITE.

a. Entrer une suite

Taper sur f(x).

Suite définie par une formule explicite :
Sélectionner avec les flèches le type de suite SUITE(n). Entrer la valeur minimale de n dans **n**Min puis l'expression de la suite en utilisant la touche X,T,θ,n pour écrire la variable n.

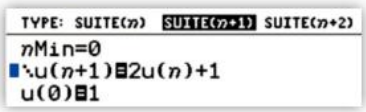
Exemple 1 :



Suite définie par récurrence :
Sélectionner avec les flèches le type de suite SUITE(n+1). Entrer la valeur minimale de n dans **n**Min puis l'expression de la suite en utilisant

2nde 7 pour écrire **u** et entrer la valeur **u(0)**.

Exemple 2 :



b. Calculer des termes

En tapant d'abord sur 2nde fenêtre, choisir le début et le pas de la table.

Taper ensuite sur 2nde graphe pour afficher le tableau de valeurs.

Exemple 1 :

n	u(n)
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
5	21
6	31

Exemple 2 :

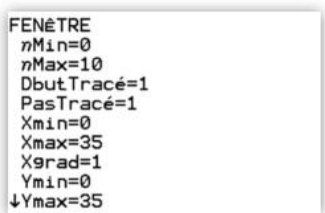
n	u
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63
6	127

c. Représenter une suite

En tapant d'abord sur fenêtre, choisir la fenêtre d'affichage.

Exemple 1 :

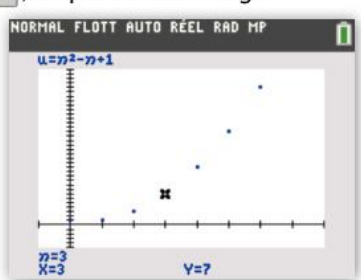
Exemple 2 :



Taper sur 2nde zoom pour sélectionner le type de graphique.

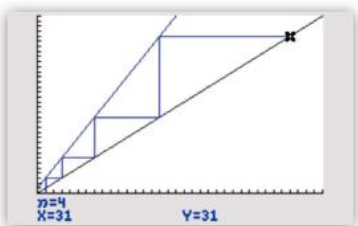
Pour représenter une suite par un **nuage de points**, sélectionner avec les flèches Heure. Taper sur graphe puis, en tapant sur trace, on parcourt le nuage.

Exemple 1 :

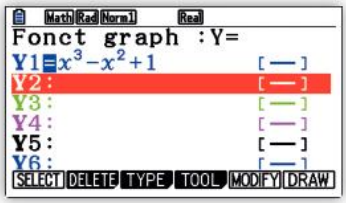


Pour représenter une **suite définie par récurrence**, sélectionner avec les flèches Toile. Taper sur graphe puis trace et ▸ pour construire la représentation graphique.

Exemple 2 :



1. Fonctions



a. Entrer une fonction

Taper sur MENU puis choisir le menu Graphe. Entrer l'expression de la fonction en utilisant la touche X,θ,T pour écrire la variable x puis appuyer sur EXE.

Remarque : Pour écrire le cube, taper sur ^ 3.

b. Calculer un nombre dérivé

Taper sur MENU puis choisir le menu Exe-Mat. Taper sur OPTN puis CALC (F4), d/dx (F2).

On obtient l'affichage $\frac{d}{dx}(\square)|_{x=\square}$.

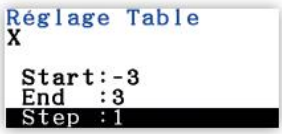
En complétant les champs manquants comme ci-contre, on calcule le nombre dérivé de la fonction précédente en 3.

$\frac{d}{dx}(x^3-x^2+1)|_{x=3}$ 21

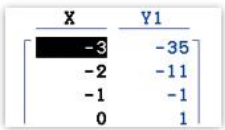
Remarque : Parfois, la calculatrice donne des valeurs approchées.

c. Afficher un tableau de valeurs

Choisir le menu Table. Utiliser SET (F5), et choisir le début, la fin et le pas de la table.



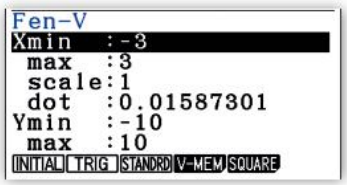
Taper ensuite sur EXIT et utiliser TABLE (F6) pour afficher le tableau de valeurs.



X	Y1
-3	-35
-2	-11
-1	-1
0	1

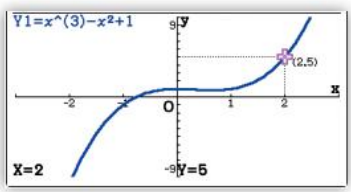
d. Afficher une représentation graphique

Choisir le menu Graphe. En tapant d'abord sur SHIFT V-Window (F3), choisir la fenêtre d'affichage puis taper sur EXIT et utiliser DRAW (F6) pour afficher la courbe représentative.



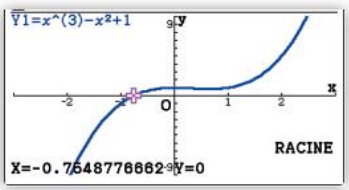
e. Effectuer des lectures graphiques

Lorsque la courbe est affichée, taper sur SHIFT Trace (F1) pour activer le mode **Trace**. Un curseur apparaît sur la courbe que l'on peut déplacer. Pour placer ce curseur au point d'abscisse 2, il suffit de taper 2 EXE.



En tapant sur SHIFT G-Solv (F5), on fait apparaître les icônes du menu **G-Solve** qui permet de faire des lectures graphiques (extremums, racines, intersections…).

Exemple : En tapant sur (F1), on obtient une valeur approchée de la ou les solutions de l'équation $f(x)=0$.

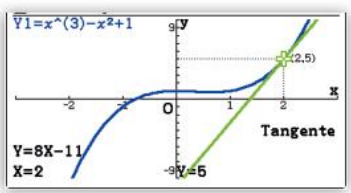


f. Tracer une tangente et obtenir une équation

Taper sur SHIFT SET UP MENU et sélectionner Derivative :On (F1).

Lorsque la courbe est affichée, taper sur SHIFT Sketch (F4) puis utiliser Tangent (F2).

Pour obtenir la tangente en 2, il suffit de taper sur 2 EXE et à nouveau EXE pour afficher son équation.

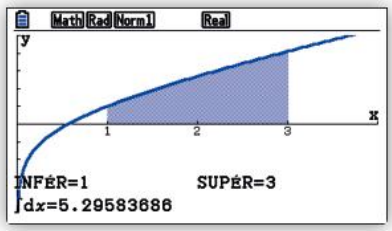


g. Calculer une intégrale

Taper sur MENU puis choisir le menu Exe-Mat. Taper sur OPTN puis choisir CALC (F4), ∫dx (F4). On obtient l'affichage $\int_{\square}^{\square} \square dx$. En complétant les champs manquants comme ci-contre, on obtient une valeur approchée de $\int_1^3 x+\ln(x)\,dx$.

$$\int_1^3 x+\ln(x)\,dx$$
$$5.295836866$$

Remarque : On peut aussi calculer cette intégrale en représentant la fonction sur la calculatrice, puis taper sur SHIFT F5, et choisir ∫dx (F6 F3) puis ∫dx (F1). Taper enfin 1 (limite inférieure), 3 (limite supérieure) et EXE pour obtenir le résultat.



2. Combinatoire et probabilités

a. Factorielle et combinaison

Taper sur MENU puis choisir le menu Exe-Mat.

Pour calculer 10!, écrire 10, taper sur OPTN puis choisir PROB (F6 F3) et x! (F1). Appuyer sur EXE.

Pour calculer $\binom{10}{7}$, taper 10, puis dans le menu PROB, sélectionner nCr (F3) et taper 7 puis EXE.

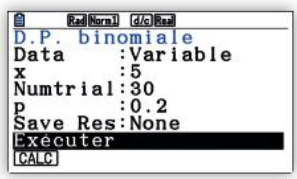
b. Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$

On suppose que $n = 30$ et $p = 0{,}2$.

Taper sur MENU et choisir le menu Statistique et DIST (F5) puis BINOMIAL (F5).

Calculer $P(X = k)$:

Pour calculer $P(X = 5)$ sélectionner Bpd (F1) puis dans **Data**, écrire Variable (F2), dans **x** écrire k (ici 5), dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).



Taper sur EXE pour obtenir :

D.P. binomiale
p=0.17227918

Calculer $P(X \leqslant k)$:

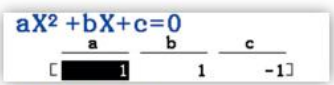
Pour calculer $P(X \leqslant 8)$, sélectionner Bcd (F2) puis dans **Lower**, écrire 0, dans **Upper**, écrire k (ici 8) dans **Numtrial**, écrire n (ici 30) et dans **p** écrire p (ici 0,2).

Taper sur EXE pour obtenir :

D.C. binomiale
p=0.87134924

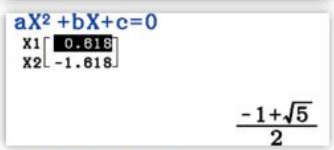
3. Résoudre une équation ou un système

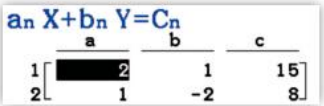
Choisir le menu Équation.



a. Résoudre une équation de degré 2

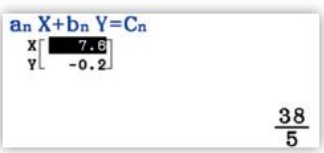
Utiliser POLY (F2).
Selectionner le degré du polynôme 2 (F1) et entrer les valeurs des coefficients du polynôme en utilisant les flèches et EXE.
Enfin utiliser SOLVE (F1) pour obtenir les éventuelles solutions.
Remarque : La calculatrice affiche des valeurs exactes et des valeurs approchées des solutions.





b. Résoudre un système d'équations

Utiliser SIMUL (F1). Choisir le nombre d'inconnues 2 (F1) et entrer les valeurs des coefficients du système. Enfin utiliser SOLVE (F1) pour obtenir les éventuelles solutions.



4. Suites

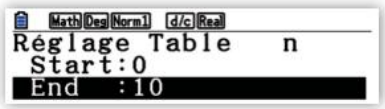
Taper sur [MENU] puis choisir le menu Récurrence.

a. Entrer une suite

Suite définie par une formule explicite :
Utiliser TYPE (F3) puis an (F1).
Entrer l'expression de la suite en utilisant n (F4) puis (F1) pour écrire la variable n.

Exemple 1 :

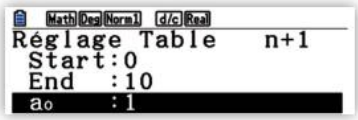
Utiliser SET (F5), et choisir le début, la fin et le pas de la table.



Suite définie par récurrence :
Utiliser TYPE (F3) puis an+1 (F2).
Entrer l'expression de la suite en utilisant n.an··· (F4) puis an (F2) pour écrire a_n.

Exemple 2 :

Utiliser SET (F5) pour entrer la valeur de a_0 et choisir le début, la fin et le pas de la table.



b. Calculer des termes

Taper ensuite sur [EXIT] et utiliser TABLE (F6) pour afficher le tableau de valeurs.

Exemple 1 :

n	an
0	1
1	1
2	3
3	7

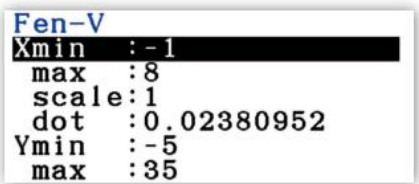
Exemple 2 :

n+1	an+1
0	1
1	3
2	7
3	15

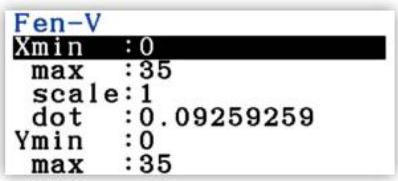
c. Représenter une suite

En tapant d'abord sur [SHIFT] (F3), choisir la fenêtre d'affichage.

Exemple 1 :



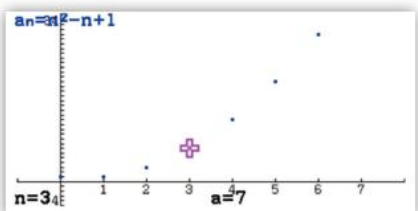
Exemple 2 :



Pour représenter une suite par un **nuage de points**, taper sur [EXIT], utiliser TABLE (F6) puis GPH-PLT (F6).

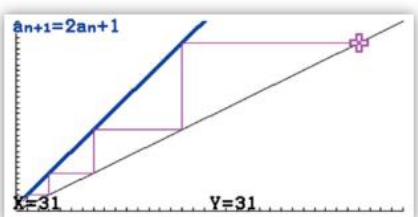
En tapant sur [SHIFT] (F1), on parcourt le nuage.

Exemple 1 :



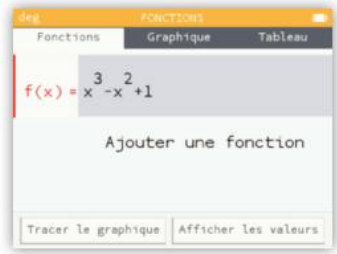
Pour représenter une **suite définie par récurrence**, taper sur [EXIT], utiliser TABLE (F6) puis WEB-GPH (F4) et appuyer sur [EXE] pour construire au fur et à mesure la représentation graphique.

Exemple 2 :



1. Fonctions

a. Entrer une fonction



Taper sur (home) et choisir le menu (Fonctions) puis sélectionner `Ajouter une fonction` et (EXE).

Entrer l'expression de la fonction en utilisant la touche (cut x,n,t) pour écrire la variable x puis appuyer sur (EXE).

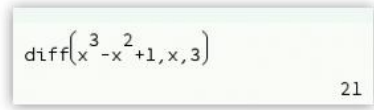
Remarque : Pour écrire le cube, tapez sur (sto→ F x^y) (3 Y).

b. Calculer un nombre dérivé

Taper sur (home) et choisir le menu (Calculs) et taper sur (Palette).

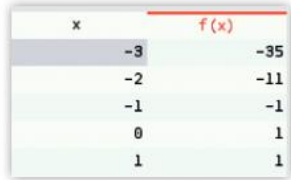
Dans le menu déroulant, sélectionner `Calculs` puis (EXE) et choisir `diff(f(x),x,a)`.

En écrivant dans la parenthèse l'expression de la fonction et 3, on calcule le nombre dérivé de la fonction précédente en 3.



Remarque : La calculatrice donne des valeurs approchées.

c. Afficher un tableau de valeurs



x	f(x)
-3	-35
-2	-11
-1	-1
0	1
1	1

Taper sur (home) et choisir le menu (Fonctions).

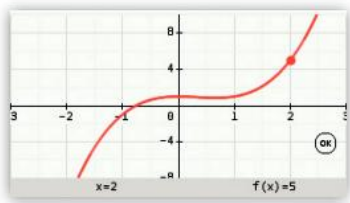
Avec les flèches, sélectionner le menu `Tableau` puis le menu `Regler l'intervalle` et choisir le début, la fin et le pas de la table.

Enfin, sélectionner `Valider` pour afficher le tableau de valeurs.

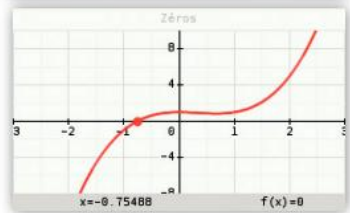
d. Afficher une représentation graphique

Sélectionner le menu `Graphique` puis le menu `Axes` pour choisir la fenêtre d'affichage.
Sélectionner ensuite `Valider` pour afficher la courbe représentative.

e. Effectuer des lectures graphiques

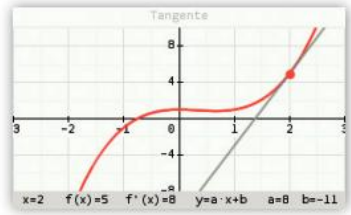


Lorsque la courbe est affichée, il y a un curseur que l'on peut déplacer pour lire des images. Si l'on souhaite déplacer le curseur au point d'abscisse 2, taper sur la touche (OK) puis sélectionner `Aller a` et écrire la valeur 2 et `Valider`.
En tapant sur la touche (OK), puis sélectionner `Calculer` et (EXE), on accède à un menu qui permet de faire des lectures graphiques (extremums, racines, intersections…).



Exemple : En choisissant `Zéros`, on obtient une valeur approchée de la ou des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

f. Tracer une tangente et obtenir une équation

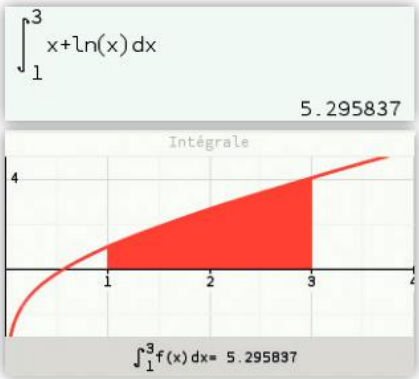


Mettre le curseur au point d'abscisse 2 puis, taper sur la touche (OK), sélectionner `Calculer` et `Tangente`, pour obtenir la tangente à la courbe en 2.

g. Calculer une intégrale

Taper sur [⌂] et choisir le menu [+−×÷] et taper sur [Poste]. Dans le menu déroulant, sélectionner `Calculs` puis [EXE] et choisir `int(f(x),x,a,b)`.

On obtient l'affichage $\int_{\square}^{\square} \square\, dx$ En complétant les champs manquants comme ci-contre, on obtient une valeur approchée de $\int_1^3 x+\ln(x)\,dx$.



Remarque : On peut aussi calculer cette intégrale en représentant la fonction sur la calculatrice : taper sur la touche [OK], puis sélectionner `Calculer` et `Intégrale` et taper sur 1 (borne inférieure) puis 3 (borne supérieure) et [EXE] pour obtenir le résultat.

2. Combinatoire et probabilités

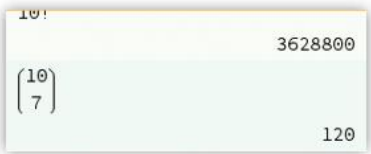
Taper sur [⌂] et choisir le menu [+−×÷].

a. Factorielle et combinaison

Pour calculer 10!, écrire 10 et taper sur [alpha] [.] et [EXE].

Pour calculer $\binom{10}{7}$, appuyer sur [Poste]. Dans le menu déroulant, sélectionner `Dénombrement` et `binomial(n,k)`.

En complétant les champs manquants, on obtient le résultat.



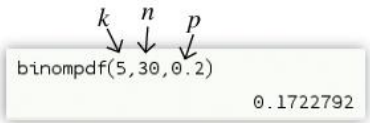
b. Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$

On suppose que $n=30$ et $p=0{,}2$.

Appuyer sur [Poste]. Dans le menu déroulant, sélectionner `Probabilités` et `Loi binomiale`.

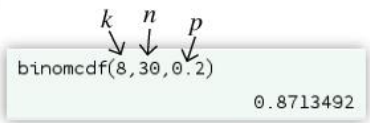
Calculer $P(X=k)$:

Pour calculer $P(X=5)$, sélectionner `binompdf(m,n,p)` et compléter la parenthèse comme ci-dessous et taper sur [EXE] pour obtenir le résultat.



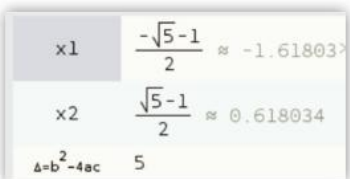
Calculer $P(X\leqslant k)$:

Pour calculer $P(X\leqslant 8)$, sélectionner `binomcdf(m,n,p)` et compléter la parenthèse comme ci-dessous et taper sur [EXE] pour obtenir le résultat.



3. Résoudre une équation ou un système

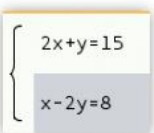
Taper sur [⌂] puis sélectionner le menu [x=] Equations. Appuyer sur [EXE] puis `Ajouter une équation`



a. Résoudre une équation de degré 2

Dans le menu déroulant, sélectionner $x^2+x+1=0$. Écrire l'équation $x^2+x-1=0$.

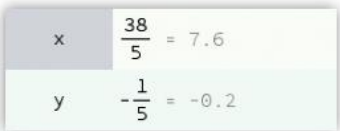
Sélectionner `Résoudre l'équation` pour obtenir les résultats ci-contre.



b. Résoudre un système d'équations

Dans le menu déroulant, sélectionner `x+y=0`. Écrire la première équation puis sélectionner `Ajouter une equation` et écrire la seconde.

Sélectionner `Resoudre le systeme` pour obtenir les éventuelles solutions.



4. Suites

Choisir le menu puis sélectionner `Ajouter une suite` et EXE.

a. Entrer une suite

Suite définie par une formule explicite :
Choisir le type de suite u_n.

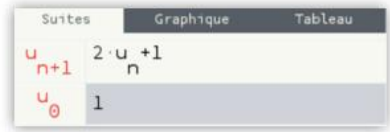
Entrer l'expression de la suite en utilisant la touche pour écrire la variable n puis appuyer sur EXE.

Exemple 1 :

Suite définie par récurrence :
Choisir le type de suite u_{n+1}.

Entrer l'expression de la suite en utilisant u_n pour écrire u_n puis écrire la valeur de u_0 et appuyer sur EXE.

Exemple 2 :



b. Calculer des termes

Avec les flèches, sélectionner le menu `Tableau` puis le menu `Regler l'intervalle` et choisir le début, la fin et le pas de la table.
Sélectionner `Valider` pour afficher le tableau de valeurs.

Exemple 1 :

n	u_n
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
5	21

Exemple 2 :

n	u_n
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63

c. Représenter une suite

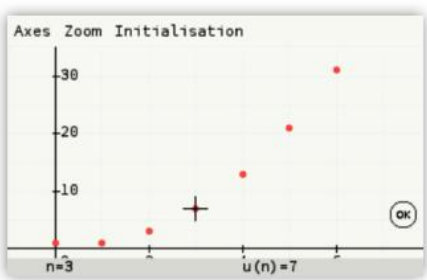
Sélectionner le menu `Graphique` puis le menu `Axes` pour choisir la fenêtre d'affichage.

Exemple 1 :

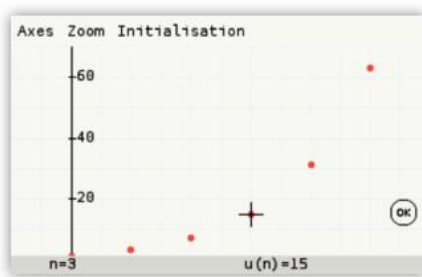
Exemple 2 :

Sélectionner ensuite `Valider` pour afficher le nuage de points représentant la suite.

Exemple 1 :



Exemple 2 :



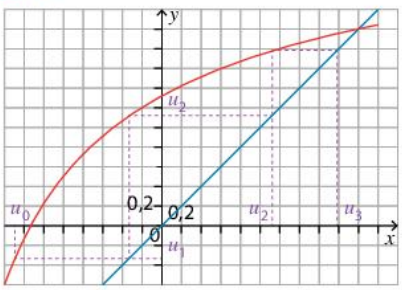
Chapitre 1

5 **1. a.**

x	f(x)
-2.5	-7
-2	-2
-1.5	-0.3333333
-1	0.5
-0.5	1
0	1.333333
0.5	1.571429

1	1.75
1.5	1.888889
2	2
2.5	2.090909
3	2.166667
3.5	2.230769
4	2.285714
4.5	2.333333
5	2.375

b. à **f.**



2. a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-2}=\frac{\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}+2}{\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}-2}$$

$$=\frac{\dfrac{3u_n+4+2u_n+6}{u_n+3}}{\dfrac{3u_n+4-2u_n-6}{u_n+3}}=\frac{5u_n+10}{u_n-2}$$

$$=5\times\frac{u_n+2}{u_n-2}=5\times v_n.$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme

$$v_0=\frac{-\frac{3}{2}+2}{-\frac{3}{2}-2}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{7}{2}}=-\frac{1}{7}.$$

b. Pour tout entier naturel n, $v_n=-\frac{1}{7}\times 5^n$.

Pour tout entier naturel n :

$$v_n=\frac{u_n+2}{u_n-2}\Leftrightarrow u_nv_n-2v_n=u_n+2$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=2+2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n=2\frac{v_n+1}{v_n-1}=2\frac{-\frac{1}{7}\times 5^n+1}{-\frac{1}{7}\times 5^n-1}.$$

c. On a alors :

$$u_3=2\frac{-\frac{1}{7}\times 5^3+1}{-\frac{1}{7}\times 5^3-1}=\frac{59}{33}\approx 1{,}79,$$ ce qui correspond à la valeur lue sur le graphique.

6 **1.** On remplace n par n_0 et on obtient $10^1-2=8$, qui est bien un multiple de 4.

Donc $P(n)$ est vraie pour $n_0=1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

2. On remplace n par n_0 et on obtient d'une part $3^7=2\,187$, d'autre part $7!=5\,040$. On a bien $3^7\leqslant 7!$. Donc $P(7)$ est vraie.

3. On remplace n par n_0 et on obtient $1^2=1$.

Par ailleurs, $\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$. Donc $P(1)$ est vraie.

8 On teste $P(n)$ pour les premières valeurs entières de n.

$2^0=1$ et $(0+2)^2=2^2=4$, donc $P(0)$ n'est pas vraie.

$2^1=2$ et $(1+2)^2=3^2=9$, donc $P(1)$ n'est pas vraie.

$2^2=4$ et $(2+2)^2=4^2=16$, donc $P(2)$ n'est pas vraie.

$2^3=8$ et $(3+2)^2=5^2=25$, donc $P(3)$ n'est pas vraie.

$2^4=16$ et $(4+2)^2=6^2=36$, donc $P(4)$ n'est pas vraie.

$2^5=32$ et $(5+2)^2=7^2=49$, donc $P(5)$ n'est pas vraie.

$2^6=64$ et $(6+2)^2=8^2=64$, donc $P(6)$ est vraie.

Le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie est $n_0=6$.

12 On considère la propriété $P(n)$: $u_n\leqslant 1$.

• **Initialisation :** Pour $n_0=0$, $u_0=-1$ et $-1\leqslant 1$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k\geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k\leqslant 1$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1}\leqslant 1$. On a, par hypothèse de récurrence : $u_k\leqslant 1$, donc $0{,}2u_k\leqslant 0{,}2$ en multipliant chaque membre par le réel positif 0,2.

En ajoutant 0,6 à chaque membre, on trouve alors : $0{,}2u_k+0{,}6\leqslant 0{,}2+0{,}6$, soit $u_{k+1}\leqslant 0{,}8$.

Or $0{,}8\leqslant 1$ donc $u_{k+1}\leqslant 1$. Donc $P(k+1)$ est vraie.

La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0=0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n\leqslant 1$ pour tout entier naturel n.

16 On considère la propriété $P(n)$: $\frac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$.

• **Initialisation :** Pour $n_0=0$, $u_0=2$. Or $\frac{3}{2}\leqslant 2\leqslant 2$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k\geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\leqslant u_k\leqslant 2$.

En prenant les images par la fonction inverse, décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a alors $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{u_k}\leqslant\frac{2}{3}$ et $1+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{u_k}+1\leqslant 1+\frac{2}{3}$, donc $\frac{3}{2}\leqslant u_{k+1}\leqslant\frac{5}{3}$.

Or $\frac{5}{3}\leqslant 2$, donc $\frac{3}{2}\leqslant u_{k+1}\leqslant 2$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0=0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 0$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\leqslant u_n\leqslant 2$.

18 **1.** $u_1=\frac{1}{2}$; $u_2=\frac{2}{3}$; $u_3=\frac{3}{4}$; $u_4=\frac{4}{5}$.

2. a. On conjecture que, pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{n}{n+1}$.

b. On considère la propriété $P(n)$: $u_n=\frac{n}{n+1}$.

• **Initialisation :** Pour $n_0=1$, $u_1=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, donc $P(1)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k\geqslant 1$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k=\frac{k}{k+1}$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$.

$$u_{k+1}=u_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0=1$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$, c'est-à-dire $u_n=\frac{n}{n+1}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

27 **1.** $u_0=10$; $u_1=\frac{1}{2}u_0+1=6$; $u_2=4$; $u_3=3$.

On peut conjecturer que (u_n) est décroissante.

On considère la propriété $P(n)$: $u_{n+1}\leqslant u_n$.

• **Initialisation :** Pour $n_0=0$, $u_1=\frac{1}{2}u_0+1=6$ et $u_0=10$, donc $u_1\leqslant u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k\geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1}\leqslant u_k$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2}\leqslant u_{k+1}$.

On a, par hypothèse de récurrence : $u_{k+1}\leqslant u_k$, donc $\frac{1}{2}u_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}u_k$ en multipliant chaque membre par le réel positif $\frac{1}{2}$. En ajoutant à chaque membre le nombre 1, on a alors $\frac{1}{2}u_{k+1}+1\leqslant\frac{1}{2}u_k+1$, soit $u_{k+2}\leqslant u_{k+1}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0=0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout entier naturel $n\geqslant 0$, donc la suite (u_n) est décroissante.

2. $u_0=-5$; $u_1=\frac{1}{2}u_0+1=-1{,}5$; $u_2=0{,}25$; $u_3=1{,}125$. On peut conjecturer que (u_n) est croissante.

On considère la propriété $P(n)$: $u_{n+1}\geqslant u_n$.

• **Initialisation :** Pour $n_0=0$, $u_1=-1{,}5$ et $u_0=-5$, donc $u_1\geqslant u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k\geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1}\geqslant u_k$.

On veut alors démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2}\geqslant u_{k+1}$.

On a, par hypothèse de récurrence : $u_{k+1}\geqslant u_k$, donc $\frac{1}{2}u_{k+1}\geqslant\frac{1}{2}u_k$. Donc $\frac{1}{2}u_{k+1}+1\geqslant\frac{1}{2}u_k+1$, soit $u_{k+2}\geqslant u_{k+1}$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

3. $u_0 = 1$; $u_1 = 2u_0 + 4 = 6$; $u_2 = 16$; $u_3 = 36$. On peut conjecturer que (u_n) est croissante.

On considère la propriété $P(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$.

• **Initialisation :** Pour $n_0 = 0$, $u_1 = 6$ et $u_0 = 1$, donc $u_1 \geqslant u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant u_k$.

On veut alors démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$.

On a par hypothèse de récurrence : $u_{k+1} \geqslant u_k$, donc $2u_{k+1} \geqslant 2u_k$. Donc $2u_{k+1} + 4 \geqslant 2u_k + 4$, soit $u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

42 1. Pour tout entier naturel n, on étudie le signe de $u_n - 9$, soit de $-n^2 - 2n - 1 = -(n+1)^2$.

Donc $u_n - 9 < 0$ pour tout entier naturel n.

La suite est donc majorée par 9.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant -\frac{1}{n} < 0$, donc $0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$.

On en déduit que la suite est bornée.

3. On considère la propriété $P(n) : u_n \leqslant \frac{5}{2}$.

• **Initialisation :** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 2$ et $2 \leqslant \frac{5}{2}$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k \leqslant \frac{5}{2}$.

On veut alors démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leqslant \frac{5}{2}$. On a, par hypothèse de récurrence :

$u_k \leqslant \frac{5}{2}$, donc $3u_k \leqslant \frac{15}{2}$. Donc $3u_k - 5 \leqslant \frac{15}{2} - 5$ soit $u_{k+1} \leqslant \frac{5}{2}$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant \frac{5}{2}$ pour tout entier naturel n. On en déduit que la suite est majorée par $\frac{5}{2}$.

53 1. $u_0 = 50$, car le nombre d'arbres est exprimé en milliers. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$.

2. On considère la propriété $P(n)$: $u_{n+1} \geqslant u_n$.

• **Initialisation :** Pour $n_0 = 0$, $u_1 = 50{,}5$ et $u_0 = 50$, donc $u_1 \geqslant u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant u_k$. On a, par hypothèse de récurrence : $u_{k+1} \geqslant u_k$, donc $0{,}95\,u_{k+1} \geqslant 0{,}95u_k$.

Donc $0{,}95u_{k+1} + 3 \geqslant 0{,}95u_k + 3$, soit $u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Le nombre d'arbres de la forêt croît au cours des ans.

3. On considère la propriété :

$P(n) : u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$.

• **Initialisation :** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 50$ et $60 - 10 \times 0{,}95^0 = 50$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k = 60 - 10 \times 0{,}95^k$.

$u_{k+1} = 0{,}95u_k + 3 = 0{,}95 \times (60 - 10 \times 0{,}95^k) + 3$

$= 57 - 10 \times 0{,}95^{k+1} + 3 = 60 - 10 \times 0{,}95^{k+1}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$ pour tout entier naturel n.

4. $u_6 = 60 - 10 \times 0{,}95^6 \approx 52{,}649$ soit 52 649 arbres en 2026.

5. Pour $n = 14$, soit en 2034, le nombre d'arbres dépassera 55 milliers.

6.

```
u ← 50
n ← 0
Tant que u < 55
        u ← 0,95 × u + 3
        n ← n + 1
```

70 1. On considère la propriété :

$P(n) : u_n = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2}$.

• **Initialisation :** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 1$ et $\frac{3^0}{2} - 7 \times 0 + \frac{1}{2} = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire : $u_k = \frac{3^k}{2} - 7k + \frac{1}{2}$. On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{2} - 7(k+1) + \frac{1}{2}$

$u_{k+1} = u_k + 3^k - 7 = \frac{3^k}{2} - 7k + \frac{1}{2} + 3^k - 7$

$= \frac{3^k}{2} - 7(k+1) + \frac{1}{2} + \frac{2 \times 3^k}{2}$

$= \frac{3 \times 3^k}{2} - 7(k+1) + \frac{1}{2}$

$= \frac{3^{k+1}}{2} - 7(k+1) + \frac{1}{2}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n.

2. a. D'une part, $S_n = u_n - u_0 = u_n - 1$.

D'autre part :

$S_n = (3^0 - 7) + (3^1 - 7) + \ldots + (3^{n-1} - 7)$

$= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} - 7 \times n$

$= \frac{1 - 3^n}{1 - 3} - 7n = \frac{1 - 3^n}{-2} - 7n = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2} - 7n$.

b. En comparant, on a donc : $u_n - 1 = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2} - 7n$, donc $u_n = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n.

Chapitre 2

1 1. $|u_n| < 0{,}01$ équivaut à $\frac{4}{n} < 0{,}01$ (car $\frac{4}{n} > 0$ pour tout entier naturel n non nul), soit $\frac{n}{4} > \frac{1}{0{,}01}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$, ou encore $n > 400$. Le rang cherché est donc $n = 401$.

2. Il semblerait que la suite (u_n) converge vers 0. Soit $r > 0$. En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, $|u_n| < r$ équivaut à $n > \frac{4}{r}$. Ainsi, si on prend un entier $N > \frac{4}{r}$, alors pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n| < r$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

8 1. a. $t_n \geqslant A \Leftrightarrow \frac{5n - 10}{3} \geqslant A \Leftrightarrow 5n - 10 \geqslant 3A$

$\Leftrightarrow 5n - 10 \geqslant 3A$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{3A + 10}{5}$.

Soit E la partie entière du réel $\frac{3A + 10}{5}$. Alors, si on pose $N = E + 1$, on a $N \geqslant \frac{3A + 10}{5}$ et donc $t_N \geqslant A$.

b. D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant N \geqslant \frac{3A + 10}{5}$, on a $t_n \geqslant A$.

2. D'après la question précédente, on peut conclure que la suite (t_n) diverge vers $+\infty$.

13 1. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc, par produit,

$\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$ (*).

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par produit et somme,

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-3n + 5) = -\infty$ (**).

Avec (*) et (**), on peut conclure par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ (*)

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc, par inverse et produit,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$, et donc par somme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{n^2}\right) = 2$ (**).

Avec (*) et (**), on peut conclure par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par produit et somme,

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - 5n) = -\infty$ (*).

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ donc, par somme,

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n^3 - 4) = +\infty$ (**).

Avec (*) et (**), on peut conclure par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (*)

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$ donc, par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 2n) = +\infty$ (**).

Avec (*) et (**), on peut conclure par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

16 **1. a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ (*). $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-8n+2) = -\infty$ (**)

Avec (*) et (**), on ne peut pas conclure par somme : c'est une forme indéterminée.

b. Pour $n \geqslant 1$,

$u_n = 3n^2\left(1-\dfrac{8n}{3n^2}+\dfrac{2}{3n^2}\right) = 3n^2\left(1-\dfrac{8}{3n}+\dfrac{2}{3n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ (*)

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-8}{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{8}{3n}+\dfrac{2}{3n^2}\right) = 1$ (**). Avec (*) et (**), on peut conclure par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a. Pour $n \geqslant 1$:

$v_n = -2n^2\left(1-\dfrac{4n}{2n^2}+\dfrac{5}{2n^2}\right) = -2n^2\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{5}{2n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n^2) = -\infty$ (*).

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2n^2} = 0$ donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{2n^2}\right) = 1$ (**)

Avec (*) et (**), on peut conclure par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

b. Pour $n \geqslant 1$, $w_n = 5n^3\left(1-\dfrac{3n^2}{5n^3}-\dfrac{7n}{5n^3}+\dfrac{9}{5n^3}\right)$

$= 5n^3\left(1-\dfrac{3}{5n}-\dfrac{7}{5n^2}+\dfrac{9}{5n^3}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^3 = +\infty$ (*).

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{5n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-7}{5n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9}{5n^3} = 0$ donc, par somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{5n}-\dfrac{7}{5n^2}+\dfrac{9}{5n^3}\right) = 1$ (**)

Avec (*) et (**), on peut conclure par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

c. Avec la même méthode, on trouve :

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

20 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^3 = -\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < -5n^3$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

22 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+5} \geqslant 0$, donc $-\sqrt{n^2+5} \leqslant 0$, soit $-n^3-\sqrt{n^2+5} \leqslant -n^3$, soit $v_n \leqslant -n^3$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant -n^3$. Donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

24 **1.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. Or $n^2 > 0$, donc $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n^2}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel n non nul.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

27 **1.** $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. $w_n = \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1^n}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Or $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. $z_n = \dfrac{9^n}{4^n} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^n$.

Or $\dfrac{9}{4} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$.

28 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

$-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. (t_n) est la suite géométrique de premier terme -3 et de raison 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = -3 \times 2^n$.

$2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

Par produit et en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.

38 **1.** À la calculatrice, il semble que la suite (u_n) est décroissante.

2. Soit $P(n)$: $u_n \geqslant 8$, pour $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :** $u_0 = 10$ donc $u_0 > 8$, donc $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_k \geqslant 8$. On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_k \geqslant 8$.

Donc $\dfrac{1}{4}u_k \geqslant \dfrac{1}{4} \times 8$, soit $\dfrac{1}{4}u_k \geqslant 2$, donc $\dfrac{1}{4}u_k + 6 \geqslant 2 + 6$, soit $u_{k+1} \geqslant 8$.

Donc $P(k+1)$ est vraie, la propriété est héréditaire

• **Conclusion :** la propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc bien $u_n \geqslant 8$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4}u_n + 6 - u_n = -\dfrac{3}{4}u_n + 6$.

4. D'après la question **2**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 8$, donc $-\dfrac{3}{4}u_n \leqslant -\dfrac{3}{4} \times 8$, donc $-\dfrac{3}{4}u_n \leqslant -6$, donc $\dfrac{-3}{4}u_n + 6 \leqslant 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite est donc décroissante.

5. La suite est décroissante (question 4) et minorée par 8 (question 2), donc elle converge.

44 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n) = -\infty$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{1}{e}\right)^n = 0$ (car $-1 < \dfrac{1}{e} < 1$), avec $2e^{-n} > 0$.

On peut conclure par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n}{2e^{-n}} = -\infty$.

2. $\dfrac{2}{\sqrt{n}}(3n-4) = \dfrac{6\sqrt{n}\times\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \dfrac{8}{\sqrt{n}} = 6\sqrt{n} - \dfrac{8}{\sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{8}{\sqrt{n}} = 0$.

On peut conclure par somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(6\sqrt{n} - \dfrac{8}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

3. Pour tout entier naturel n non nul :

$\dfrac{-2n^3}{n^2+5n+1} = \dfrac{-2n^3}{n^2\left(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{-2n}{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

On peut conclure par quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n}{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = -\infty$.

4. Pour tout entier naturel n non nul :

$\dfrac{5n-n^2}{2n^4-6n^2} = \dfrac{n^2\left(\dfrac{5}{n}-1\right)}{2n^4\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right)} = \dfrac{\dfrac{5}{n}-1}{2n^2\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{n}-1\right) = -1$ (*).

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right) = 1$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right) = +\infty$ (**).

Avec (*) et (**), on peut conclure par quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n}-1}{2n^2\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right)} = 0$.

58 **1. Faux.** Contre-exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n$ pour tout entier naturel n.

$\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} (-2)^{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} 4^p = +\infty$, donc la suite (u_n) n'est pas majorée.

De plus $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1} = \lim\limits_{p\to+\infty} -2 \times 4^p = -\infty$, donc la suite (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.

2. Faux. Contre-exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_n = -\dfrac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Or pour tout entier naturel n, $2^n > 0$ et donc $u_n < 0$.

3. Vrai. Soit (u_n) une suite monotone et bornée. Cette suite est donc minorée et majorée. Soit elle est croissante et, comme elle est majorée, elle converge. Soit elle est décroissante et, comme elle est minorée, elle converge.

70 La proposition est fausse. Voici un contre-exemple.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout entier naturel n.

$\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ (par croissance sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction racine carrée). Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On a $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Or, pour tout entier k entre 0 et n, on a $\sqrt{k+1} \leqslant \sqrt{n+1}$ (par croissance sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction racine carrée) et donc $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ (par décroissance sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction inverse).

Ainsi, $S_n \geqslant (n+1) \times \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et ainsi $S_n \geqslant \sqrt{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ alors, par comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Chapitre 3

1 1. On peut conjecturer que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. D'après la question précédente, la courbe de la fonction f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -3$ en $-\infty$.
3. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	-3	↗	$+\infty$

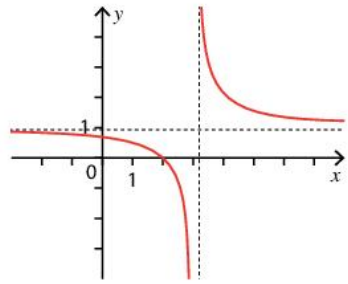
2 1. On peut conjecturer :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. D'après la question précédente, la courbe de la fonction f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et pour asymptote verticale la droite d'équation $x = -1$.
3. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

3 1. On peut conjecturer :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. D'après la question 1, la courbe de la fonction f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 1$.
3. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

5 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$;
$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
2. D'après la question 1, la courbe de la fonction f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$.
3. Une courbe susceptible de représenter la fonction f est donnée ci-après.



10 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2-1) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (5-2x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (5-2x) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3+x+1) = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3+x+1) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + \frac{1}{x}) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + \frac{1}{x}) = +\infty$

15 1. On factorise par x :
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$
D'où, par quotient :
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$
2. Avec la même méthode, on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{-2x+1} = \frac{4}{-2} = -2$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{-2x+1} = \frac{4}{-2} = -2$
3. Avec la même méthode, on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3x-1}{6-x} = \frac{-3}{-1} = 3$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x-1}{6-x} = \frac{-3}{-1} = 3$
4. Avec la même méthode, on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-3-8x}{5-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-8}{-1} = 8$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3-8x}{5-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-8}{-1} = 8$

18 1. $\lim\limits_{x\to3} (x-3) = 0$ et $x-3 > 0$ lorsque $x > 3$.
Donc, par inverse, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{1}{x-3} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to3} (x-3) = 0$ et $x-3 < 0$ lorsque $x < 3$.
Donc, par inverse, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{1}{x-3} = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to1} (1-x) = 0$ et $1-x < 0$ lorsque $x > 1$.
Donc, par inverse, comme $2 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2}{1-x} = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to1} (1-x) = 0$ et $1-x > 0$ lorsque $x < 1$.
Donc, par inverse, comme $2 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{2}{1-x} = +\infty$

33 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 2$
$\lim\limits_{X\to2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$. On en déduit que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = \sqrt{2}$.

44 Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Donc $-1+x^2 \leqslant x^2 - \cos(x) \leqslant 1+x^2$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (-1+x^2) = +\infty$. Donc, d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (-1+x^2) = +\infty$. Donc, d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

45 Pour tout x différent de 0, on a :
$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $\frac{-1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.
De, même on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

59 1. **Faux.** On peut tracer la courbe d'une fonction à valeurs négatives, par exemple f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -1$.
2. **Vrai.** C'est une application du théorème de comparaison.
3. **Faux.** On peut tracer la courbe de f, définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$. f est strictement croissante mais tend vers 2 en $+\infty$.
4. **Faux.** On peut tracer la courbe de f définie sur $]-\infty ; 0[$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. f est strictement décroissante mais tend vers 2 en $-\infty$.

67 $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1} = xe^{-x} \times \frac{1}{x^2+1}$.
D'après les croissances comparées, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.
Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.
Donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

81 1. **Vrai.** Avec $x = y = 0$, on a $f(0+0) = f(0) + f(0)$, c'est-à-dire $f(0) = 2 \times f(0)$, ce qui permet d'affirmer que $f(0) = 0$.
2. **Vrai.**
$f(n) = f(1+1+\ldots+1) = f(1) + f(1) + \ldots + f(1)$ (n termes).
Ainsi $f(n) = n \times f(1)$. Ce sont bien deux grandeurs proportionnelles.
Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Soit k un réel tel que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n) = kn$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} kn = 0$. Si k était différent de 0, cette limite serait non nulle. Donc $k = 0$. Donc, pour tout entier naturel n, $f(n) = 0$. En particulier $f(1) = 0$.
3. **Vrai.** Le taux d'accroissement de f en x_0 s'écrit $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$.
Ainsi si $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(h)}{h}$ est un nombre fini, on retrouve bien la définition du nombre dérivé de f en x_0, ce qui assure que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 4

1 **1.** La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est définie sur $[0 ; +\infty[$, donc $u \circ v$ est définie sur $[0 ; +\infty[$ et
$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(\sqrt{x}) = 5\sqrt{x} + 3$.
$v \circ u$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $5x + 3 \in [0 ; +\infty[$, c'est-à-dire sur $\left[-\frac{3}{5} ; +\infty\right[$, et
$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(5x + 3) = \sqrt{5x + 3}$.
2. La fonction $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et
$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 + e^x + 1$
$= e^{2x} + e^x + 1$.
$v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et
$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2 + x + 1) = e^{x^2+x+1}$.
3. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, donc $u \circ v$ est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ et
$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 1 = \frac{1}{x^3} - 1$.
$v \circ u$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x^3 - 1 \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, c'est-à-dire sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, et :
$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^3 - 1) = \frac{1}{x^3 - 1}$.
4. La fonction u est définie sur $[0 ; +\infty[$ et la fonction v est définie sur $\mathbb{R}$, donc $u \circ v$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $e^x \in [0 ; +\infty[$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.
$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(e^x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$.
$v \circ u$ est définie sur $[0 ; +\infty[$ et :
$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$.

5 **1.** $f'(x) = 6x(x^2 + 5)^3$
2. $g'(x) = -6x(x^2 + 5)^{-4}$
3. $h'(x) = 8(x + 1)(x^2 + 2x + 2)^3$
4. $k'(x) = -30(1 - 3x)^9$

15 **1.** $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$.
2. $f'(x) = 6x - 7$ et $f''(x) = 6$.
3. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

17 Par lecture graphique, la fonction f semble concave sur $[-2 ; 1,5] \cup [4,5 ; 7]$ et convexe sur $[1,5 ; 4,5]$. Elle a deux points d'inflexion, l'un au point d'abscisse 1,5, l'autre au point d'abscisse 4,5.

27 **1.**

x	-4		-3		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

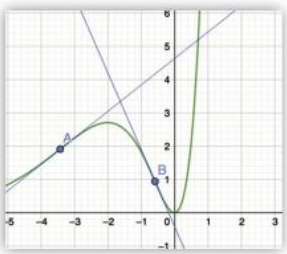
La fonction f est croissante sur $[-4 ; -3]$ et sur $[2 ; 3]$, et décroissante sur $[-3 ; 2]$.
2. La fonction f' est décroissante sur $[-4 ; 0,5]$ et croissante sur $[0,5 ; 3]$. On en déduit que la fonction f est concave sur $[-4 ; 0,5]$ et convexe sur $[0,5 ; 3]$.

29 **1.** $f'(x) = 10xe^x + 5x^2e^x = 5xe^x(x + 2)$.
$f''(x) = 5e^x(x^2 + 4x + 2)$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$ (d'après le théorème des croissances comparées), d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

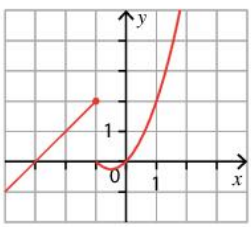
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$ et $5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$5x$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$20e^{-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

3. $f''(x) = 5e^x(x^2 + 4x + 2)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. Le trinôme $x^2 + 4x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 8$. Le trinôme admet donc deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$. Le trinôme $x^2 + 4x + 2$ est donc positif sur $]-\infty ; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2} ; +\infty[$ et négatif sur $[-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}]$. f'' est donc positive sur $]-\infty ; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2} ; +\infty[$ et négative sur $[-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}]$. On en déduit que la fonction f est convexe sur $]-\infty ; -2 - \sqrt{2}]$ et sur $[-2 + \sqrt{2} ; +\infty[$ et concave sur $[-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}]$.
4. La courbe représentative de la fonction f admet deux points d'inflexion, l'un A au point d'abscisse $-2 - \sqrt{2}$ et l'autre B au point d'abscisse $-2 + \sqrt{2}$.
5.

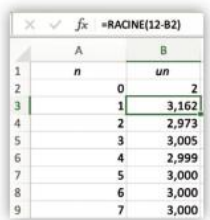


32 **1.**



2. La fonction n'est pas continue en -1. En effet, $3 + (-1) = 2 \neq (-1)^2 - 1 = 0$.
Elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

34 **1.**



Il semble que $\ell = 3$.
2. L'équation $f(x) = x$ est définie sur $[0 ; +\infty[$.
$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{12 - x} = x \Leftrightarrow 12 - x = x^2$.
Or, $12 - x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$. Le trinôme $x^2 + x - 12$ a pour discriminant $\Delta = 49$.
Le trinôme admet donc deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$, $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2} = 3$.
Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ admet une solution notée α et $\alpha = 3$.
3. La fonction f est continue sur $]-\infty ; 12]$, $\ell \in]-\infty ; 12]$ et (u_n) est une suite à valeurs dans $]-\infty ; 12]$. On sait que (u_n) converge vers ℓ, donc $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$, par unicité de la limite on a $f(\ell) = \ell$.
D'après la question précédente, $\ell = 3$.

37 **1.** À l'aide de la calculatrice, on trouve que $f(x) = 0$ pour $x \approx -2,6$, $x \approx 0,34$ ou $x \approx 2,26$. On conjecture que l'équation a trois solutions sur $\mathbb{R}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 2$. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $[-1 ; 2]$.
$f(-1) = 7$ et $f(2) = -2$, donc $0 \in [f(2) ; f(-1)]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[-1 ; 2]$.

38 **1.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. $f'(x) = x^2(5x^2 + 3)$, qui est strictement positive pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $0 \in \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$; donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4. À l'aide de la calculatrice, on trouve $0,837 < \alpha < 0,838$.

55 **1.** Pour tout réel x, $f'(x) = e^x(x + 1)$ et $f''(x) = e^x(x + 2)$.
f'' est positive sur $[-2 ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; -2]$, donc la fonction f est concave sur $]-\infty ; -2]$ et convexe sur $[-2 ; +\infty[$.
2. $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$.
3. La fonction f est convexe sur $[-2 ; +\infty[$. Sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. Elle est en particulier au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. Donc, $f(x) \geqslant x + 1$ sur $[-2 ; +\infty[$.
4. $f(x) \geqslant x + 1 \Leftrightarrow xe^x + 1 \geqslant x + 1$
$\Leftrightarrow x(e^x - 1) \geqslant 0$.
Or, $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
On en déduit que $x(e^x - 1) \geqslant 0$ sur $[-2 ; +\infty[$ et finalement $f(x) \geqslant x + 1$ sur $[-2 ; +\infty[$.

65 **1.** $f'(x) = -4x^3 + 6x^2 + 3$ et $f''(x) = -12x^2 + 12x = 12x(-x + 1)$.
2. a. f'' est positive sur $[0 ; 1]$ et strictement négative partout ailleurs. Ainsi, f' est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[1 ; +\infty[$ et est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.
b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$; $f'(0) = 3$ et $f'(1) = 5$.
f' admet un minimum strictement positif sur $]-\infty ; 1]$, donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty ; 1]$. La fonction f' est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$ et $0 \in]-\infty ; f'(1)]$, donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs

intermédiaires, l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$. On en déduit que cette équation admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.
$f'(1)=5$ et $f'(2)=-5$. Comme f' est décroissante et continue sur $[1;2]$, on a $1<\alpha<2$.

c. D'après ce qui précède :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. On déduit du tableau de signes que f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

78 1. La fonction h semble convexe sur $[10;25]$ et concave sur $[25;50]$.
La fonction envie semble croissante sur $[10;25]$ et décroissante sur $[25;50]$.
La vitesse à laquelle la satisfaction augmente croît lorsque le salaire annuel varie entre 10 000 et 25 000 €, puis diminue au-delà de 25 000 €.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=90$. D'après ce modèle il ne sera pas possible d'atteindre la saturation.

3. $h'(x)=\dfrac{-22{,}5e^{-0{,}25x+6}}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^2}$.

$$h''(x)=\frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^2}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^4}-\frac{11{,}25e^{-0{,}25x+6}\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^4}$$

$$=\frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)-11{,}25e^{-0{,}25x+6}}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^3}$$

$$=\frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(e^{-0{,}25x+6}-1\right)}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^3}.$$

4. $h''(x)$ est du signe de $e^{-0{,}25x+6}-1$.

$e^{-0{,}25x+6}-1>0 \Leftrightarrow e^{-0{,}25x+6}>1$

$\Leftrightarrow -0{,}25x+6>0$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{6}{0{,}25} \Leftrightarrow x<24$.

$h''(x)>0$ sur $[10;24]$, donc la fonction h est convexe sur $[10;24]$.
$h''(x)<0$ sur $[24;50]$, donc la fonction h est concave sur $[24;50]$.

5. La fonction « envie » décroît quand h' décroît, donc quand h'' devient négative, soit à partir de $x=24$, ce qui correspond à un salaire annuel de 24 000 €.

81 On pose $x=DH$. On a $1\leqslant x\leqslant 3$. Il suffit de déterminer pour quelle valeur de x l'aire du quadrilatère $ABCD$ est maximale. Cette aire est donnée par la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{(DC+AB)\times h}{2}$.
On a $DC=x+1$ et $AH^2+HD^2=1$, donc :
$HD^2=1-\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2=\dfrac{-x^2+2x+3}{4}$.
Donc $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}}{4}$.
En dérivant, on obtient, pour tout $x\geqslant 1$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-x^2+x+2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, qui est positive sur $[0;2]$ et négative sur $[2;3]$. Ainsi, l'aire est maximale pour $x=2$, soit $CD=2$.

Chapitre 5

1 $a'(x)=h(x)$;
$b'(x)=i(x)$;
$c'(x)=j(x)$;
$d'(x)=g(x)$

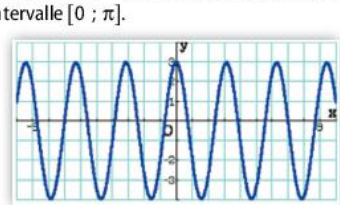
4 1. $f'(x)=2x+\sin(x)$
2. $f'(x)=1-2\cos(2x)$
3. $f'(x)=3\cos(x)+3\sin(3x)$
4. $f'(x)=2\cos(x)\sin(x)$
5. $f'(x)=-2\sin(x)\cos(x)$
6. $f'(x)=2x\sin(x)+x^2\cos(x)$

5 1. $f'(x)=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $f'(x)=\dfrac{5\sin(x)}{\cos^2(x)}$
3. $f'(x)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;
4. $f'(x)=-4\sin(4x)\sin(-4x)-4\cos(4x)\cos(-4x)$.
Remarque : on peut aussi écrire :
$f'(x)=4(\sin^2(4x)-\cos^2(4x))$

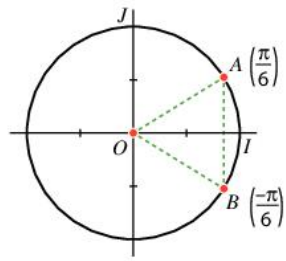
15 1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.
2. a. À l'aide de l'égalité fournie et en posant $X=3x$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=3$
b. $\dfrac{2x}{\sin(2x)}=\dfrac{1}{\dfrac{\sin(2x)}{2x}}$
donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin(2x)}=\dfrac{1}{1}=1$.
c. $\dfrac{x}{\sin(4x)}=\dfrac{1}{\dfrac{\sin(4x)}{x}}=\dfrac{1}{4\times\dfrac{\sin(4x)}{4x}}$
donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin(4x)}=\dfrac{1}{4}$.

23 ① Courbe ⓒ
② Courbe ⓓ
③ Courbe ⓐ
④ Courbe ⓑ

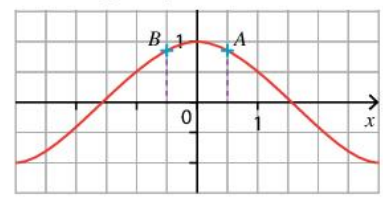
24 1. Pour tout réel x :
$f(-x)=3\cos(-2x)-\sin^2(-x)$,
donc $f(-x)=3\cos(2x)-(-\sin(x))^2$,
donc $f(x)=f(-x)$ sur $\mathbb{R}$.
f est donc paire.
Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. $f(x+\pi)=3\cos(2(x+\pi))-\sin^2(x+\pi)$
Ainsi, $f(x+\pi)=3\cos(2x+2\pi)-(-\sin(x))^2$.
Donc $f(x+\pi)=f(x)$.
La fonction f est périodique de période π.
Sa courbe représentative, dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, peut être obtenue par translations successives de vecteurs $\pi\vec{i}$ ou $-\pi\vec{i}$ de la partie représentée sur l'intervalle $[0;\pi]$.
3.



26 1. a. $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right\}$



b. $\cos(x)+1=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x)=-\dfrac{1}{2}$
$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right\}$
c. $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right\}$
d. $\dfrac{3}{2}\geqslant 1$, donc $\mathcal{S}=\varnothing$.
2. À l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus, tracée sur $[-\pi;\pi]$, on recherche les antécédents éventuels de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ et on lit, dans chaque cas, sur l'axe des abscisses les deux réels opposés qui sont solutions.



27 1. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ équivaut à :
$x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x+\dfrac{\pi}{2}=\pi-\dfrac{\pi}{6}$. $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right\}$
2. $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$
3. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ équivaut à : $x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$.
$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{\pi}{6}\right\}$
4. $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :
$x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\pi-\dfrac{\pi}{4}$. $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

30 1. a. $\mathcal{S}=\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right]$
b. $\cos(x)+1\leqslant\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x)\leqslant-\dfrac{1}{2}$
$\mathcal{S}=\left[-\pi;-\dfrac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$
c. $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$
$\Leftrightarrow -\pi\leqslant 3x\leqslant\pi \Leftrightarrow X\in[-\pi;\pi]$.
$\cos(3x)\geqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(X)\geqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\Leftrightarrow X\in\left[-\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow -\dfrac{5\pi}{6}\leqslant X\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$
$\Leftrightarrow -\dfrac{5\pi}{6}\leqslant 3x\leqslant\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\dfrac{5\pi}{18}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{18}$.
$\mathcal{S}=\left[-\dfrac{5\pi}{18};\dfrac{5\pi}{18}\right]$
2. À l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus, tracée sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, on lit les antécédents des points d'ordonnée supérieure ou égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour le a, inférieure ou égale à $-\dfrac{1}{2}$ pour le b et supérieure ou égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour le c.

31 1. $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 2x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$.
$\sin(2x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(X) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\Leftrightarrow X \in \left[-\pi ; \frac{-3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4} ; \pi\right]$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant X < \frac{-3\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4} < X \leqslant \pi$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 2x < \frac{-3\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4} < 2x \leqslant \pi$
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{-3\pi}{8}$ ou $-\frac{\pi}{8} < x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{-3\pi}{8}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{8} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

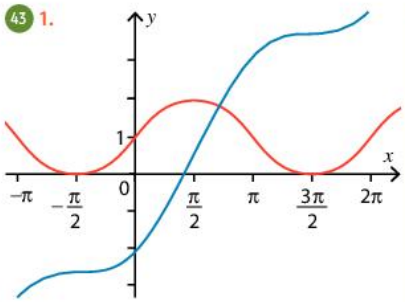
2. $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 2x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$.
$\sin(2x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(X) < \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow X \in \left[-\pi ; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant X < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < X \leqslant \pi$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 2x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < 2x \leqslant \pi$
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{12}$ ou $\frac{5\pi}{12} < x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{12} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $x \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$
$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 4x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi ; \pi]$.
$\sin(4x) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(X) \geqslant \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow X \in \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{5\pi}{6}$
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leqslant 4x \leqslant \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{24} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{24}$.
Donc $\mathcal{S} = \left[\frac{\pi}{24} ; \frac{5\pi}{24}\right]$.

33 1. $q\left(t + \frac{\pi}{100}\right) = \frac{1}{200}\sin\left(200\left(t + \frac{\pi}{100}\right) + \frac{\pi}{4}\right)$.
$= \frac{1}{200}\sin\left(200t + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = q(t)$.
Ainsi $T = \frac{\pi}{100}$ est une période de q.
2. Par exemple, $q(-\pi) \neq q(\pi)$ et $q(-\pi) \neq -q(\pi)$, donc q n'est ni paire ni impaire.
3. q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $q'(t) = \cos\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$.
Lorsque $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{100}\right]$,
$X = 200t + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4}\right]$.
Or sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4}\right]$, $\cos(X)$ est positif sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$, négatif sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$, puis positif sur $\left[\frac{3\pi}{2} ; \frac{9\pi}{4}\right]$.
Lorsque $X = \frac{\pi}{2}, t = \frac{\pi}{800}$ et lorsque $X = \frac{3\pi}{2}, t = \frac{5\pi}{800}$.

t	0		$\frac{\pi}{800}$		$\frac{5\pi}{800}$		$\frac{\pi}{100}$
$q'(t)$		+	0	−	0	+	
$q(t)$	$\frac{\sqrt{2}}{400}$	↗	$\frac{1}{200}$	↘	$-\frac{1}{200}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{400}$

43 1.



2. $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + k = 0$
$\Leftrightarrow -1 + k = 0$.
$\Leftrightarrow k = 1$.
3. $f'(x) = 1 + \sin(x)$. Par identification, on trouve bien $k = 1$.
4. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) + 1 = 1$
$\Leftrightarrow \sin(x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ dans $]-\pi ; \pi]$.

56
Partie A
1. $f(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0$. 0 est une solution « évidente ».
2. $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$.
f' est donc de signe opposé à la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

x	0		π		2π
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\pi$	↗	2π

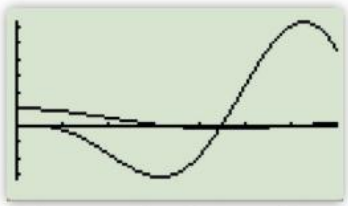
3. a. f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ; \pi]$, donc f est strictement négative et ne peut donc s'annuler sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[\pi ; 2\pi]$, la fonction f est continue et strictement croissante avec $f(\pi) \leqslant 0 \leqslant f(2\pi)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[\pi ; 2\pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
D'après la question 1, 0 est une solution évidente de l'équation $f(x) = 0$. Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
b. $\alpha \approx 4{,}49$.
4.

x	0		α		2π
$f(x)$		−	0	+	

Partie B
1. $g'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x)}{x^2}$
$= \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$.
2. g' est du signe de f sur $]0 ; 2\pi]$.
On déduit donc de la partie A le tableau de variation de g.

x	0		α		2π
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$	‖	↘	$g(\alpha)$	↗	0

3.



4. Graphiquement, il semble que sur l'intervalle $]0 ; 2\pi]$ les courbes représentatives des fonctions f et g aient un seul point d'intersection.
5. À la calculatrice, on obtient une valeur arrondie au dixième des coordonnées du point d'intersection ($x \approx 4{,}4$ et $y \approx 0$).

Chapitre 6

3 1. Pour $x > 0$, $\ln(x) = 3 \Leftrightarrow x = e^3$.
$\mathcal{S} = \{e^3\}$
2. Pour $x > 0$, $\ln(x) = -7 \Leftrightarrow x = e^{-7}$.
$\mathcal{S} = \{e^{-7}\}$
3. Pour $x > 0$:
$2\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0{,}5 \Leftrightarrow x = e^{0{,}5}$.
$\mathcal{S} = \{e^{0{,}5}\}$
4. Pour $x > 0$:
$(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$
$\Leftrightarrow x = e^{-5}$ ou $x = e^{\frac{5}{4}}$.
$\mathcal{S} = \left\{e^{-5} ; e^{\frac{5}{4}}\right\}$
5. Pour $x > 0$:
$(\ln(x))^2 = 9$
$\Leftrightarrow (\ln(x) - 3)(\ln(x) + 3) = 0$.
$\mathcal{S} = \{e^{-3} ; e^3\}$

10 1. $a = \ln(e^4) + 3\ln(e^{-1})$
$= 4 - 3\ln(e) = 4 - 3 = 1$
2. $b = e^{2\ln(5)} - \ln\left((e^5)^2\right)$
$= e^{\ln(5^2)} - \ln(e^{10})$
$= 25 - 10 = 15$
3. $c = \ln(e^{-3}) \times \ln(e^3)$
$= -3 \times 3 = -9$
4. $d = 20\ln(\sqrt{e}) - e^{3\ln(3)}$
$= 20 \times \frac{1}{2}\ln(e) - e^{\ln(3^3)}$
$= 10 - 27 = -17$

26 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \ln(x)) = -\infty$
donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(x) - 1) = -\infty$ et
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$.

28 1. $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty$.
Pour tout x appartenant à E :
$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x)+1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
Ainsi f est strictement croissante sur $[e^{-1} ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0 ; e^{-1}]$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$	‖	0	↘	$-e^{-1}$	↗ $+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) = +\infty$.
Pour tout x appartenant à E :
$f'(x) = 2x\times\ln(x) + x^2\times\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$.
Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2\ln(x)+1$.
Pour tout x appartenant à E :
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln(x)+1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-0,5}$
et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-0,5}$.
Ainsi f est strictement croissante sur $[e^{-0,5} ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0 ; e^{-0,5}]$.

x	0		$e^{-0,5}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	0	↘	$-0,5e^{-1}$	↗ $+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
Pour tout x appartenant à E :
$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln(x)\times 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
Comme $x > 0$, $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2\ln(x)$.
Pour tout x appartenant à E :
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-2\ln(x) > 0$
$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{0,5}$
et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{0,5}$.
Ainsi, est strictement croissante sur $]0 ; e^{0,5}]$ et strictement décroissante sur $[e^{0,5} ; +\infty[$.

x	0		$e^{0,5}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘ 0

29 Soit $a \in]0 ; +\infty[$. La tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :
$y = \frac{1}{a}(x-a)+\ln(a) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln(a)$.
$B(0 ; 2) \in \mathscr{T}_a \Leftrightarrow -1+\ln(a) = 2$
$\Leftrightarrow \ln(a) = 3 \Leftrightarrow a = e^3$
Donc il existe une tangente à $\mathscr{C}$ passant par $B(0;2)$: c'est la tangente au point d'abscisse e^3.

36 a. $\ln(3x-7)$ existe si et seulement si :
$3x-7 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}$. $\mathscr{D}_f =]\frac{7}{3} ; +\infty[$.
b. $\ln(-x^2+4x-3)$ existe si et seulement si :
$-x^2+4x-3 > 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x-3) > 0$.
$\mathscr{D}_g =]1 ; 3[$.
c. $\ln(x) - 3\ln(2-x)$ existe si et seulement si :
$x > 0$ et $2-x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.
$\mathscr{D}_h =]0 ; 2[$

40 1. $\ln(3x-4)$ existe si et seulement si :
$3x-4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$.
On doit donc résoudre l'équation sur $]\frac{4}{3} ; +\infty[$.
Pour tout $x > \frac{4}{3}$:
$\ln(3x-4) < 0 \Leftrightarrow 3x-4 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$.
$\mathscr{S} =]\frac{4}{3} ; \frac{5}{3}[$.
2. $\ln(-x+3)$ existe si et seulement si :
$-x+3 > 0 \Leftrightarrow x < 3$.
On doit donc résoudre l'équation sur $]-\infty ; 3[$.
Pour tout $x < 3$:
$\ln(-x+3) \geqslant 1 \Leftrightarrow -x+3 \geqslant e$.
$\Leftrightarrow x \leqslant 3-e$
$\mathscr{S} =]-\infty ; 3-e]$
3. $\ln(-x+1)$ et $\ln(x)$ existent si et seulement si :
$-x+1 > 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
On doit donc résoudre l'équation sur $]0 ; 1[$.
Pour tout $x \in]0 ; 1[$:
$\ln(-x+1) \leqslant \ln(x) \Leftrightarrow -x+1 \leqslant x$
$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$.
$\mathscr{S} = [\frac{1}{2} ; 1[$
4. $\ln(3+2x)$ et $\ln(x-3)$ existent si et seulement si $3+2x > 0$ et $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.
On doit donc résoudre l'équation sur $]3 ; +\infty[$.
Pour tout $x > 3$:
$\ln(3+2x) < \ln(x-3) \Leftrightarrow 3+2x < x-3$.
$\Leftrightarrow x < -6$.
Cette inéquation n'a pas de solution.

41 1. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3}(2x-6) = 0\\ \lim\limits_{X\to 0}\ln(X) = -\infty\end{cases}$. Donc $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$.
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-6) = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty\end{cases}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+3) = 3\\ \lim\limits_{X\to 3}\ln(X) = \ln(3)\end{cases}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \ln(3)$.
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+3) = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty\end{cases}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

68 La fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$:
$f'(x) = 3 - 3\ln(x) - 3x\times\frac{1}{x} = -3\ln(x)$
et $f''(x) = -\frac{3}{x}$.
Pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) < 0$. f' est donc strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. On en déduit que f est concave sur $]0 ; +\infty[$. La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de toutes ses tangentes sur $]0 ; +\infty[$. En particulier, elle est en dessous de la tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1.

75 1. Pour tout réel $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{R}$:
$f_k(x) = x(\ln(x)+k) = x\ln(x) + kx$
$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} kx = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)+k) = +\infty$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{R}$:
$f_k'(x) = \ln(x) + x\times\frac{1}{x} + k = \ln(x) + 1 + k$.
$f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x)+k+1 > 0$
$\Leftrightarrow \ln(x) > -k-1$
$\Leftrightarrow x > e^{-k-1}$.
$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e^{k+1}}$
$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^{k+1}}$
D'où les variations de f_k sur $]0 ; +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{e^{k+1}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	‖	0	↘	$f_k\left(\frac{1}{e^{k+1}}\right)$	↗ $+\infty$

3. On résout l'équation $f_k\left(\frac{1}{e^{k+1}}\right) = -10$.
$e^{-k-1}\left(\ln\left(e^{-k-1}\right)+k\right) = -10$
$\Leftrightarrow e^{-k-1}(-k-1+k) = -10$
$\Leftrightarrow -e^{-k-1} = -10 \Leftrightarrow e^{-k-1} = 10$
$\Leftrightarrow -k-1 = \ln(10) \Leftrightarrow k = -1-\ln(10)$
Le minimum de f_k est égal à -10 pour $k = -1-\ln(10)$.
4. a. Pour tout réel $x > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$:
$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)+k = 0$
$\Leftrightarrow \ln(x) = -k \Leftrightarrow x = e^{-k}$.
La courbe $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des abscisses en un unique point $A_k\left(e^{-k} ; 0\right)$.
b. Pour tout réel $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{R}$:
$f_k'(x) = \ln(x) + k + 1$
et $f_k'\left(e^{-k}\right) = -k+k+1 = 1$.
Donc la tangente à la courbe de f_k au point A_k a pour coefficient directeur 1 : elle est donc parallèle à la droite d'équation $y = x$.

82 1. a. La variable S contient la valeur cherchée à la fin de l'exécution de l'algorithme.

$S \leftarrow 0$
Pour k allant de 1 à n
$S \leftarrow S + \frac{1}{k}$

b.
```
def suite(n):
  S=0
  for k in range(1,n+1):
    S=S+1/k
  return S
```

Pour $n = 20$, $S = 3,59773\ldots$ et pour $n = 100$, $S = 5,18737\ldots$ En exécutant le programme avec d'autres valeurs de n, on remarque que les termes de la suite (u_n) ne semblent pas se rapprocher d'un réel lorsque n tend vers $+\infty$, donc (u_n) ne semble pas converger.
2. a. Pour tout $x \geqslant 0$:
$\ln(1+x) \leqslant x \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geqslant 0$.
Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = x - \ln(1+x)$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
$f'(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Le minimum de f sur $[0 ; +\infty[$ est égal à 0, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ et donc $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, en utilisant la relation du 2.a. et en posant $x=\frac{1}{n}$, on a :

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\frac{1}{n}$

c. $\ln(2)-\ln(1)\leqslant 1$

$\ln(3)-\ln(2)\leqslant\frac{1}{2}$

…

$\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\frac{1}{n}$

En sommant les inégalités membre à membre, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$\ln(n+1)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\Leftrightarrow\ln(n+1)\leqslant u_n$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. On en déduit que la suite (u_n) n'est pas convergente (et diverge vers $+\infty$).

Chapitre 7

1 **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=10x-2$, donc f est solution de (E).

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2e^{-2x+1}$, donc f est solution de (E).

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, donc f est solution de (E).

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\sin(x)$, donc f est solution de (E).

6 On dérive chaque fonction de la colonne de droite pour retrouver la fonction de la colonne de gauche. H est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. I est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. G est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. F est une primitive de i sur $\mathbb{R}$.

7 **1.** $f(x)=g'(x)$

$=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

2. Ce sont les fonctions $F:x\mapsto\frac{e^x}{e^x+1}+C$, où $C\in\mathbb{R}$.

3. h est une fonction de la forme de celles trouvées à la question 2.

$h(0)=0\Leftrightarrow\frac{e^0}{e^0+1}+C=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Donc $h(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}$.

8 On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+7x$.

2. $F(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-12x$.

3. $F(x)=\frac{1}{7}x^7+3\times\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{5}x^5$.

4. $F(x)=0{,}1\times\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{100}$

$=\frac{1}{50}x^5+\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{200}x^2$.

11 On note F une primitive de f sur I.

1. $f(x)=5\times2\,(2x+1)^4$ de la forme $5\times u'\times u^4$, avec $u(x)=2x+1$ et $u'(x)=2$

D'où $F(x)=5\times\frac{1}{5}(2x+1)^5=(2x+1)^5$.

2. f est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x)=3x+1$ et $u'(x)=3$. D'où $F(x)=\sqrt{3x+1}$.

3. $f(x)=\frac{-1}{2}(x-2)^{-3}$ de la forme $\frac{u'\times u^n}{-2}$ avec $u(x)=x-2$ et $u'(x)=1$ et $n=-3$

$\frac{u^{n+1}}{-2(n+1)}$ D'où $F(x)=\frac{u^{n+1}}{-2(n+1)}=-\frac{1}{4(x-2)^2}$.

4. f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=2x-6$ et $u'(x)=2$. $u(x)>0$ sur I, d'où $F(x)=\ln(2x-6)$.

29 **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{1}{10}e^{\frac{1+x}{10}}$ d'où :

$f'(x)=\frac{1}{10}e^{\frac{1+x}{10}}=0{,}1e^{\frac{1+x}{10}}=0{,}1f(x)$.

Donc f est une solution particulière de (E).

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3e^{3x-2}$ d'où :

$f'(x)=3\left(e^{3x-2}+5\right)-15=3f(x)-15$

Donc f est une solution particulière de (E).

31 **1.** Les solutions de l'équation différentielle $y'=-2y+5$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{-2x}+\frac{5}{2}$, où $C\in\mathbb{R}$.

2. Les solutions de l'équation différentielle $y'=y-3$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^x+3$, où $C\in\mathbb{R}$.

3. $2y'+y=4\Leftrightarrow y'=-\frac{1}{2}y+2$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+4$, où $C\in\mathbb{R}$.

4. $3y'-6y=1\Leftrightarrow y'=2y+\frac{1}{3}$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{2x}-\frac{1}{6}$, où $C\in\mathbb{R}$.

38 **1.** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-1$, or

$2g(x)+2x=2\times\left(-x-\frac{1}{2}\right)+2x=-1=g'(x)$,

donc g est une solution particulière de (E).

2. Comme g est une solution particulière de l'équation (E), les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ce^{2x}+g(x)=Ce^{2x}-x-\frac{1}{2}$, où C est une constante réelle.

46 **1.** f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. On doit avoir $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=ae^{2x}+(ax+b)2e^{2x}$

$=(2ax+a+2b)e^{2x}$.

$(2ax+a+2b)e^{2x}=(3x-1)e^{2x}$

$\Leftrightarrow 2ax+a+2b=3x-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2a=3\\a+2b=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$ et $b=\frac{-5}{4}$

Donc $F(x)=\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)e^{2x}$.

3. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x\mapsto\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)e^{2x}+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.

66 **1.** Pour tout réel x :

$h'(x)=f_1'(x)-g'(x)$

$=af_1(x)+f(x)-ag(x)-f(x)$

$=a\left(f_1(x)-g(x)\right)=ah(x)$.

Donc la fonction h est bien une solution particulière de (E_0).

2. Soit h une solution de (E_0). On considère la fonction $f_1=h+g$.

$f_1'(x)=h'(x)+g'(x)$

$=ah(x)+ag(x)+f(x)$

$=a(h(x)+g(x))+f(x)$

$=af_1(x)+f(x)$

Donc la fonction f_1 est bien solution de (E).

3. D'après les questions 1 et 2, les solutions de (E) sont de la forme $h+g$ où h est une solution de l'équation différentielle $y'=ay$ et g une solution particulière de (E).

Or on connait les solutions de $y'=ay$: elles sont de la forme $x\mapsto Ce^{ax}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Donc les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto Ce^{ax}+g(x)$.

73 **1.** $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

$=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$

$=\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}$

$\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}=\frac{x+2}{x(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a=x+2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\-2a-b+c=1\\a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\\c=3\end{cases}$

Donc $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}$.

2. On cherche une primitive sur $]1;+\infty[$ de chaque terme composant $f(x)$.

On trouve $F(x)=2\ln(x)-2\ln(x-1)-\frac{3}{x-1}$ (car $x>0$ et $x-1>0$ sur $]1;+\infty[$).

Les primitives de f sont donc de la forme $F(x)+C$, où C est une constante.

On doit avoir $F(2)=10$ donc

$2\ln(2)-2\ln(1)-\frac{3}{2-1}+C=10$

soit $2\ln(2)-3+C=10$, d'où $C=13-2\ln(2)$.

La primitive cherchée est donc :

$F(x)=2\ln(x)-2\ln(x-1)-\frac{3}{x-1}+13-2\ln(2)$.

Chapitre 8

3 L'intégrale cherchée est l'aire, en u.a., de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$. Cette surface est un trapèze, donc :

$\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=\frac{(b+B)\times h}{2}=\frac{(3+6)\times3}{2}$

$=13{,}5$

11 Comme r est continue et positive sur $[-2;2]$, l'aire cherchée est égale à $\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x+4\right)\mathrm{d}x$.

$\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x+4\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+4x\right]_{-2}^{2}$

$=\frac{4}{4}+4\times2-\left(\frac{4}{4}+4\times(-2)\right)$

$=1+8-1+8=16.$

L'aire cherchée est donc égale à 16 u.a.

12 1. $I=\int_1^4\frac{3}{x}dx=[3\ln(x)]_1^4$

$=3\ln(4)-3\ln(1)=3\ln(4).$

2. $J=\int_0^2\left(-4t^2+1\right)dt=\left[-\frac{4}{3}t^3+t\right]_0^2$

$=-\frac{4}{3}\times2^3+2-\left(-\frac{4}{3}\times0+0\right)$

$=-\frac{32}{3}+2=-\frac{26}{3}$

3. $K=\int_{-1}^{1}(1+s)^2\,ds=\left[\frac{1}{3}(1+s)^3\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{3}\times2^3-\frac{1}{3}\times0^3$

$=\frac{8}{3}$

4. $L=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2y}dy=\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$

20 1. $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$=\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)$

2. $I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}dx$

$=\int_0^1\frac{x+x^3}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx$

$=\int_0^1x\,dx$

$I_1+I_2=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

Donc $I_2=\frac{1}{2}-I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2).$

28 On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=e^x$.
Alors $u'(x)=1$ et on peut choisir $v(x)=e^x$.
D'où, par intégration par parties :

$\int_0^1xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1e^x\,dx$

$=e-\left[e^x\right]_0^1$

$=e-(e-1)=1$

37 $-x^2+4\geqslant0$ pour tout $x\in[0;2]$.
$(x-4)^2-4\leqslant0$ pour tout $x\in[2;4]$.
Donc :

Aire $=\int_0^2\left(-x^2+4\right)dx-\int_2^4\left((x-4)^2-4\right)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}(x-4)^3-4x\right]_2^4$

$=-\frac{8}{3}+8+16-\frac{8}{3}-8=\frac{32}{3}$ u.a.

40 1. $x^3-x^2=x^2(x-1)$ donc, sur $[0;1]$, $x^3\leqslant x^2$.
La courbe rouge est donc la courbe de g et la courbe bleue celle de f.
2. Comme, sur $[0;1]$, $g(x)\leqslant f(x)$, on a :

Aire (en u.a.) $=\int_0^1(f(x)-g(x))dx$

$=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

42 1. $f(x)-g(x)=x^2-x-12-(4x-16)$

$=x^2-5x+4$

$=(x-1)(x-4)$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. Pour tout x appartenant à $[5;6]$, $f(x)\geqslant g(x)$.

Donc Aire (en u.a.) $=\int_5^6[f(x)-g(x)]dx$

$=\int_5^6\left(x^2-5x+4\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_5^6$

$=\frac{216}{3}-\frac{5}{2}\times36+4\times6$

$-\left(\frac{125}{3}-\frac{5}{2}\times25+4\times5\right)=6+\frac{5}{6}$

$=\frac{41}{6}$

b. Pour tout x appartenant à $[2;3]$, $f(x)\leqslant g(x)$.

Donc Aire (en u.a.) $=\int_2^3[g(x)-f(x)]dx$

$=\int_2^3\left(-x^2+5x-4\right)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_2^3$

$=-\frac{27}{3}+\frac{5}{2}\times9-4\times3$

$-\left(-\frac{8}{3}+\frac{5}{2}\times4-4\times2\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}.$

44 $\mu=\frac{1}{7-3}\int_3^7\frac{6}{x^2}dx=\frac{1}{4}\left[\frac{-6}{x}\right]_3^7$

$=\frac{1}{4}\left(-\frac{6}{7}+\frac{6}{3}\right)=\frac{2}{7}$

50 Aire $=\int_0^2x^2dx+\int_2^42x\,dx+\int_4^{10}(-x+12)dx$

Aire $=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[x^2\right]_2^4+\left[-\frac{x^2}{2}+12x\right]_4^{10}$

$=\frac{8}{3}+16-4-\frac{100}{2}+120+\frac{16}{2}-48$

$=\frac{134}{3}.$

52 Tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'aire cherchée est :

Aire (en u.a.) $=\int_0^3f(x)dx-\int_3^4f(x)dx$

Or $f(x)=x(x-3)(x-4)=x\left(x^2-7x+12\right)$

$=x^3-7x^2+12x.$

Donc Aire (en u.a.) $=\int_0^3f(x)dx-\int_3^4f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^3$

$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_3^4$

$=\frac{45}{4}-\left(\frac{32}{3}-\frac{45}{4}\right)=\frac{71}{6}.$

81 1. Soit n un entier naturel non nul.

$I_{n+1}-I_n=\int_0^1x^{n+1}e^{x^2}dx-\int_0^1x^ne^{x^2}dx$

$=\int_0^1\left(x^{n+1}e^{x^2}-x^ne^{x^2}\right)dx$

$=\int_0^1x^ne^{x^2}(x-1)dx.$

Or, quel que soit $x\in[0;1]$, $x^n\geqslant0$, $e^{x^2}>0$ et $x-1\leqslant0$.
Donc, sur l'intervalle $[0;1]$, la fonction $x\mapsto x^ne^{x^2}(x-1)$ est négative ou nulle.
Donc, comme $0<1$, on a $\int_0^1x^ne^{x^2}(x-1)dx\leqslant0$ et par suite, $I_{n+1}-I_n\leqslant0$. La suite (I_n) est donc décroissante.
2. $0\leqslant x\leqslant1\Rightarrow0\leqslant x^2\leqslant1\Rightarrow1\leqslant e^{x^2}\leqslant e$, par croissance de la fonction exponentielle.
Pour $x\in[0;1]$, $x\geqslant0$, donc :

$x^n\leqslant x^ne^{x^2}\leqslant ex^n\Rightarrow\int_0^1x^n\,dx\leqslant I_n\leqslant\int_0^1ex^ndx$ (car $0<1$).

D'où $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\leqslant I_n\leqslant\left[\frac{ex^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\frac{e}{n+1}.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0.$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.
La suite (I_n) converge donc vers 0.

Chapitre 9

7 Soient A l'ensemble des adhérents qui suivent des cours collectifs et B l'ensemble de ceux qui utilisent les appareils de musculation.
$\text{Card}(\overline{A}\cap\overline{B})=0$ donc, en complétant le tableau suivant, on obtient $\text{Card}(A\cap B)=37$.

	A	$\overline{A}$	Total
B	37	75	112
$\overline{B}$	38	0	38
Total	75	75	150

9 $A\times B=\{(u;0);(u;1);(w;0);(w;1)\}$
$B\times A=\{(0;u);(1;u);(0;w);(1;w)\}$

17 1. (R ; R ; R ; O ; V ; R ; O) est un 7-uplet de F.
2. Cela revient à chercher les 7-uplets d'un ensemble à 3 éléments. Il y en a $7^3=343$.

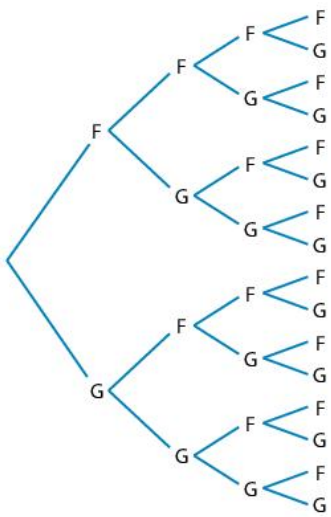
20 Cela revient à chercher les triplets d'éléments distincts d'un ensemble à 7 éléments. Il y en a $7\times6\times5=210$.

27 **1.** Une anagramme de « deux » est une permutation des lettres du mot « deux ». On peut donc former $4! = 24$ anagrammes.

2. Une anagramme de « facteurs » est une permutation des lettres du mot « facteurs ». On peut donc former $8! = 40\ 320$ anagrammes.

3. Une anagramme de « factorielle » est une permutation des lettres du mot « factorielle ». Le nombre de permutations d'un ensemble à 11 éléments est égal à 11! Mais ce mot comporte deux fois la lettre « l » et deux fois la lettre « e », donc le nombre d'anagrammes est égal à $\frac{11!}{4} = 9\ 979\ 200$.

36 **1.**



2. On obtient $2^4 = 16$ compositions possibles.

3. a. Il y a 4 compositions avec une fille et trois garçons.

b. Il y a 6 compositions avec deux filles et deux garçons.

4. $\binom{4}{1} = 4$ et $\binom{4}{2} = 6$.

37 **1.** Une main est une combinaison de 5 éléments parmi 52. Il y a donc $\binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$ mains possibles.

2. Choisir une main contenant l'as de pique revient à choisir les quatre autres cartes parmi les 51 cartes restantes. Il y a donc $\binom{51}{4} = 249\ 900$ mains contenant l'as de pique.

38 **1.** Un tirage est une combinaison de 3 boules parmi 15. Il y a donc $\binom{15}{3} = 455$ tirages possibles.

2. a. Un tirage de trois boules dans B est une combinaison de 3 boules parmi 3. Il y en a $\binom{3}{3} = 1$.

Un tirage de trois boules dans R est une combinaison de 3 boules parmi 5. Il y en a $\binom{5}{3} = 10$.

Un tirage de trois boules dans V est une combinaison de 3 boules parmi 7. Il y en a $\binom{7}{3} = 35$.

b. Le nombre de tirages unicolores dans l'urne est donc égal à $1 + 10 + 35 = 46$.

43

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

a. $\binom{4}{2} = 6$ **b.** $\binom{5}{2} = 10$ **c.** $\binom{6}{3} = 20$ **d.** $\binom{6}{4} = 15$

44 **1. a.** $\binom{6}{1}$ est le nombre de parties à 1 élément dans un ensemble à 6 éléments.

b. $\binom{6}{2}$ est le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à 6 éléments.

c. $\binom{12}{2}$ est le nombre de parties à 2 éléments dans un ensemble à 12 éléments.

d. $\binom{12}{10}$ est le nombre de parties à 10 éléments dans un ensemble à 2 éléments.

e. $\binom{30}{0}$ est le nombre de parties à 0 élément dans un ensemble à 30 éléments.

2. $\binom{6}{1} = 6$; $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$; $\binom{12}{2} = \frac{12\times11}{2} = 66$;

$\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$; $\binom{30}{0} = 1$.

49 **1.** Soient A l'ensemble des internautes qui utilisent F et T mais pas I, B l'ensemble de ceux qui utilisent F et I mais pas T et C l'ensemble de ceux qui utilisent T et I mais pas F.

$\text{Card}(A) = 3\ 000\ 000 - 500\ 000 = 2\ 500\ 000$.

$\text{Card}(B) = 1\ 000\ 000$ et $\text{Card}(C) = 300\ 000$.

Soit D l'ensemble des internautes qui utilisent exactement deux réseaux sociaux.

$D = A \cup B \cup C$,

donc :

$$\begin{aligned}\text{Card}(D) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C)\\ &= 2\ 500\ 000 + 1\ 000\ 000 + 300\ 000\\ &= 3\ 800\ 000\end{aligned}$$

2. Soit F l'ensemble des internautes qui utilisent F, T l'ensemble de ceux qui utilisent T et I l'ensemble de ceux qui utilisent I.

$$\begin{aligned}\text{Card}(F \cup T \cup I) &= 6\ 200\ 000 + 4\ 500\ 000\\ &\quad + 2\ 500\ 000 - 500\ 000 - 3\ 800\ 000\\ &= 8\ 900\ 000.\end{aligned}$$

Donc 8 900 000 internautes utilisent au moins l'un des trois réseaux.

65 **1.** Un tirage est une combinaison de 5 boules parmi 49, suivi d'une boule parmi 10. Il y a donc $\binom{49}{5} \times 10 = 19\ 068\ 840$ tirages possibles.

2. a. Un seul tirage permet de gagner 5 000 000 €.

b. Choisir un tirage contenant les cinq boules bleues avec les bons numéros revient à choisir la boule restante parmi 10. Il y a donc $\binom{10}{1} = 10$ tirages qui permettent de gagner 100 000 €.

c. Choisir un tirage contenant 4 boules bleues et la boule rouge avec les bons numéros revient à choisir les 4 boules bleues portant les bons numéros parmi 5 et la boule bleue restante parmi 44. Il y a donc $\binom{5}{4} \times \binom{44}{1} = 220$ tirages qui permettent de gagner 1 000 €.

84 • **Initialisation** : Pour $n = 1$, $(a+b)^1 = a + b$, donc la propriété est vraie.

• **Hérédité** : Supposons que pour un entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n\\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)\\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots\\ &\quad + \binom{n}{n} ab^n + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2\\ &\quad + \binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^{n+1}\\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^n b^1\\ &\quad + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^{n+1}\\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b^1\\ &\quad + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

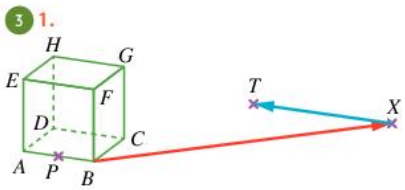
Donc la propriété est héréditaire.

• **Conclusion** : Pour tout $n \geqslant 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Chapitre 10

3 **1.**



2. $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'après l'énoncé.

$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BT}$, d'après la relation de Chasles.

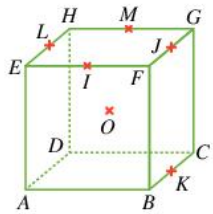
Donc, $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$ d'après l'énoncé.

Donc $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{CT} = -2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$.

Finalement : $\overrightarrow{CT} = -2\overrightarrow{CP}$, donc les points C, P et T sont alignés.

4 **1.**



2. $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$;

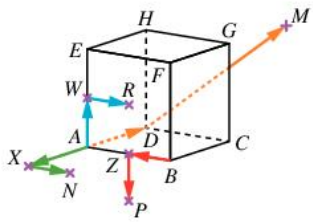
$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EP}$, donc $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

3. a. $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EM}$.

Donc $\overrightarrow{PM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{PM}$ ne semblent pas colinéaires.

5 Pour les points P et R, après manipulation des égalités vectorielles, on obtient :
$\overrightarrow{BP} = 0{,}5\overrightarrow{BA} - 0{,}5\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AR} = 0{,}5\overrightarrow{HE} - 0{,}5\overrightarrow{AB}$



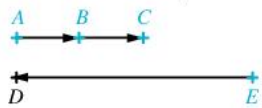
6 **1.** $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, car $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (d'après le théorème de Thalès dans le triangle SCD) et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont colinéaires, car $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$ d'après le théorème de Thalès dans le triangle SAC.

3. $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{SB}$ sont colinéaires, car $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS}$ grâce au théorème de Thalès dans le triangle SBD.

11 $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC}$. D'après la relation de Chasles, on obtient :
$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC}$.
Après simplification, il vient $4\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$, soit $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a ainsi exprimé $\overrightarrow{BM}$ en fonction de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. M appartient au plan (ABC).

14 **1. Vrai.** B appartient au plan (ACD) ou simplement à la droite (AC) si A, C et D sont alignés. Dans tous les cas, les points sont coplanaires
2. Faux. Voici un contre-exemple.



3. Vrai. $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

15 $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}$, donc $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Cette égalité montre que les trois vecteurs $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Attention ! Les points C, I, F, E, A et D ne sont pas coplanaires.

20 **1. a.** $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.
b. Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.
c. $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}$.
d. Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires.
2. a. Les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.
b. Les droites (JK) et (BC) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.
c. Les droites (SJ) et (SB) sont parallèles et confondues.
d. Les droites (OD) et (IJ) sont non coplanaires.

21 **1.** Le plan (AIE) et le plan (BIG) ne sont pas confondus et ont la droite (AB) en commun. Leur droite d'intersection est donc la droite (AB).
2. Le plan (ADI) et le plan (BJC) sont confondus (les points A, D, I, B, J et C sont coplanaires). Leur intersection est donc le plan (ABC).
3. Le plan (HEF) et le plan (BJC) sont strictement parallèles (ils forment deux faces opposées du cube). Leur intersection est donc vide.

27 **1.** Les trois vecteurs sont non coplanaires, donc ils forment une base de l'espace.

2. a. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

c. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

29 Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, on a directement $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $D(0\,;0\,;1)$, $J(0\,;0\,;\frac{2}{3})$. Pour I, d'après $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et la relation de Chasles, on obtient :
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Ce qui donne $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On a alors $I\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;0\right)$.

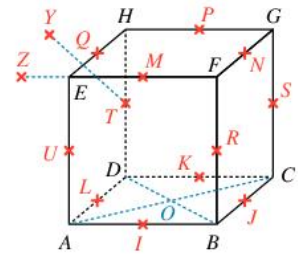
31 **1.** $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}\begin{pmatrix}1+3-4\\4+6-10\\-3-3+6\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$, donc on peut écrire $\vec{u} + 3\vec{v} = 2\vec{w}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

36 **1.** Les points A, B, C et D sont quatre points coplanaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.
2. Les points A, B, C et D sont quatre points coplanaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
3. Les points A, B et D définissent un plan auquel n'appartient pas le point S si on considère une pyramide non aplatie. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont non coplanaires.
4. Les points A, B et S définissent un plan auquel n'appartient le point O si on considère la pyramide non aplatie. Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SO}$ sont non coplanaires.
5. Le point O est le milieu de $[AC]$. Les points S, A, C et O sont quatre points coplanaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SO}$ sont coplanaires.
6. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Or les points S, D et A sont coplanaires, puisqu'ils définissent un plan (SDA). Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc coplanaires.

44 **1. a.** et **b.**



2. Il semble que les points I, U et Z sont alignés.
$\overrightarrow{IZ} = -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AZ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AU} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On remarque $\overrightarrow{IZ} = 2\overrightarrow{IU}$, les vecteurs $\overrightarrow{IZ}$ et $\overrightarrow{IU}$ sont donc colinéaires et les points I, Z et U sont alignés.

3. $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BY}$
$= \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$
$= \overrightarrow{EA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$, donc $ZBCY$ est un parallélogramme.

63 **1.** Si les droites (BC) et (YT) sont parallèles, alors elles sont coplanaires et les points A et D, qui appartiennent respectivement aux droites (BY) et (BT), appartiendraient au plan défini par les deux droites parallèles. Ce qui est absurde car, dans l'énoncé, il est dit que les points A, B, C et D sont non coplanaires. Les droites (BC) et (YT) ne sont donc pas parallèles.
2. Dans le triangle ABD, Y est le milieu de $[AB]$ et X est le milieu de $[AD]$. D'après le théorème de Thalès, les droites (XY) et (BD) sont parallèles. Dans le triangle CBD, Z est le milieu de $[BC]$ et T est le milieu de $[CD]$. D'après le théorème de Thalès, les droites (ZT) et (BD) sont parallèles. On en déduit que les droites (ZT) et (XY) sont parallèles. Elles définissent un plan et les points X, Y, Z et T sont coplanaires.
3. Les points X, Y, Z et T sont coplanaires et les droites (YT) et (XZ) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
4. Non. Les points A, B, C, D, X, Y, Z, T ne sont pas coplanaires, donc le plancher fera des « vagues ».

Chapitre 11

1 1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BB}=0$
2. $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AA}=0$
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=25$
4. $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BF}=BF^2=25$
5. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EH}=EH^2=25$
6. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG})$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FG}$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
$=AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB}=AB^2+0=25$

3 1. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}AB^2=16$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA}=0$
3. $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=-CB^2=-25$
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=64$
5. $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
6. $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$
$=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}$
$=\frac{3}{4}BA^2=48$

4 $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JC}=(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DC})$
$=\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JD}$
$+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DC}$
$=-JA\times JD+0+0+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=-2\times3+AI\times AB$
$=-6+2\times8=10$
$\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JC}=JI\times JC\times\cos\left(\widehat{IJC}\right)$
$=\sqrt{JA^2+AI^2}\times\sqrt{JD^2+DC^2}\times\cos\left(\widehat{IJC}\right)$
$=\sqrt{4+4}\times\sqrt{9+64}\times\cos\left(\widehat{IJC}\right)$
$=2\sqrt{146}\times\cos\left(\widehat{IJC}\right)$
D'où $\cos\left(\widehat{IJC}\right)=\frac{10}{2\sqrt{146}}=\frac{5}{\sqrt{146}}$ et, par suite $\widehat{IJC}\approx66°$.

9 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
$=\frac{1}{2}(25+4-36)=-\frac{7}{2}$

16 1. $EFGH$ est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires. Ainsi la droite (FH) est perpendiculaire à la droite (EG).
2. a. $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH})\cdot\overrightarrow{GC}$
$=\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GC}=0+0=0$
b. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont orthogonaux et, par suite, que les droites (FH) et (GC) sont orthogonales.
3. La droite (FH) est orthogonale aux droites (EG) et (GC), qui sont deux droites sécantes du plan (EGC), donc la droite (FH) est orthogonale au plan (EGC).

17 Soit I le milieu de $[AD]$. Dans le triangle équilatéral BDA, la médiane (BI) est aussi la hauteur issue de B, donc les droites (DA) et (BI) sont perpendiculaires. De même, dans le triangle équilatéral CDA, les droites (DA) et (CI) sont perpendiculaires.
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC})\cdot\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AD}=0+0=0$
Donc la droite (AD) est orthogonale à la droite (BC).

18 1. $\overrightarrow{AE}$.
2. $\overrightarrow{EH}$ est orthogonal au plan (GCD), car $\overrightarrow{EH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HD}$ et $(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HD})$ est une base du plan (GCD).
3. Si $\overrightarrow{IF}$ était un vecteur normal au plan (GCH), alors $\overrightarrow{IF}$ serait orthogonal au vecteur $\overrightarrow{GC}$, donc le point I appartiendrait au plan orthogonal à (GC) passant par F donc au plan (FGH). Comme I appartient à la droite (GC), alors I et G seraient confondus, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc $\overrightarrow{IF}$ n'est pas un vecteur normal au plan (GCH).
4. $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au plan (GCA), car $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ (car $ABCD$ est un carré) et $\overrightarrow{CG}$ (car $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CG}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CG}$ $=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CG}=0+0=0$) et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CG})$ est une base du plan (GCA).

19 1. $BCGF$ est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires. Ainsi les droites (BG) et (FC) sont perpendiculaires, donc orthogonales.
2. $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG})\cdot\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CD}=0+0=0$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et, par suite, les droites (BG) et (CD) sont orthogonales.
3. La droite (BG) est donc orthogonale aux droites (FC) et (CD) qui sont deux droites sécantes du plan (FDC) donc la droite (BG) est orthogonale au plan (FDC). Comme le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est non nul, c'est donc un vecteur normal au plan (FDC).
4. Soit K le milieu de $[CF]$. Comme $\overrightarrow{BG}$ est un vecteur normal au plan (FDC), $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ est aussi un vecteur normal au plan (FDC). Comme K appartient à $[CF]$, il appartient au plan (FDC). Donc K est le projeté orthogonal de B sur le plan (FDC).

23 1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3,5\times(-4)+2\times5,5-4\times(-3)=37$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{15}{7}\times\frac{14}{3}-\frac{12}{11}\times\left(-\frac{22}{4}\right)=\frac{31}{2}$

29 La distance du point B au plan $\mathscr{P}$ vaut $\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
Or $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=0+0-6\times20=-120$
et $\|\vec{n}\|=\sqrt{0^2+21^2+20^2}=29$.
La distance du point B au plan $\mathscr{P}$ vaut donc $\frac{120}{29}$.

39 1. $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AJ}=0{,}25\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ})$
$=0{,}25\overrightarrow{AD}^2+0{,}25\overrightarrow{AD}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
$=4+0=4$
2. $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)$
$=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{FB}$
$=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{GC}$
$=\frac{1}{4}DC^2+0=1$
3. $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{FE}=(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DJ})\cdot\overrightarrow{FE}$
$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{FE}$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}^2+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{FE}$
$=2+0+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FE}$
$=2+0-\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}^2=2-2=0$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont orthogonaux et, par suite, les droites (IJ) et (FE) sont orthogonales.
4. Les droites (FE) et (CD) étant parallèles, on peut en déduire que la droite (IJ) est également orthogonale à la droite (CD). Le point J appartenant à la droite (CD), on en déduit que le projeté orthogonal du point I sur la droite (CD) est le point J.

49 1. a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, donc il est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\\vec{n}\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-b+2c=0\\-a+5c=0\end{cases}$
b. $\begin{cases}3a-b+2c=0\\-a+5c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\times(5c)-b+2c=0\\a=5c\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}b=17c\\a=5c\end{cases}$.
c. On choisit par exemple $c=1$. On a alors $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\17\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
2. Si $\vec{n}'$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$, alors il est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.
$\begin{cases}\vec{n}'\cdot\vec{u}'=0\\\vec{n}'\cdot\vec{v}'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a'-2b'-11c'=0\\-5a'+b'+8c'=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}9a'-10a'+16c'-11c'=0\\b'=5a'-8c'\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-a'+5c'=0\\b'=5a'-8c'\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a'=5c'\\b'=25c'-8c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=5c'\\b'=17c'\end{cases}$
On choisit par exemple $c'=1$, on a alors $\vec{n}'\begin{pmatrix}5\\17\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$
3. $\vec{n}=\vec{n}'$, donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires. On en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

54 1. a. H est le centre du carré $ABCD$, c'est donc le milieu de la diagonale $[AC]$. Dans le triangle SAC isocèle en S, la médiane issue de S est également la médiatrice du segment $[AC]$, donc la droite (SH) est perpendiculaire à la droite (AC).
b. H est le centre du carré $ABCD$, c'est donc le milieu de la diagonale $[BD]$. Dans le triangle SBD isocèle en S, la médiane issue de S est également la médiatrice du segment $[BD]$ donc la droite (SH) est perpendiculaire à la droite (BD).
c. La droite (SH) est donc perpendiculaire aux droite (AC) et (BD) qui sont deux droites sécantes du plan $(ABCD)$ donc la droite (SH) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$.
2. La droite (SH) est donc la hauteur de la pyramide $SABCD$.
Ainsi $\mathscr{V}(SABCD)=\frac{1}{3}\mathscr{A}(ABCD)\times SH$
Soit $a=AB$. $\mathscr{A}(ABCD)=a^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$, donc $AC = a\sqrt{2}$.

$SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

Donc $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D'où $\mathcal{V}(SABCD) = \frac{1}{3}a^2 \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

On souhaite donc que :

$\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = 75 \text{ cL} \Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = 750 \text{ cm}^3$

$\Leftrightarrow a^3 = \frac{4\,500}{\sqrt{2}} \text{ cm}^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{4\,500}{\sqrt{2}}} \text{ cm}$

Soit $a \approx 14{,}7$ cm.

Le goutte-à-goutte de Samira doit donc avoir des arêtes mesurant environ 14,7 cm pour pouvoir contenir environ 75 mL.

Chapitre 12

1 1. $A(4\,;22\,;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\22\end{pmatrix}$.

2. $A(3\,;-11\,;-44)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\\5\end{pmatrix}$.

3. $A(0\,;0\,;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

4. $A(-1\,;-2\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

3 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

2. Pour $t = 0$, on obtient :

$\begin{cases}x = -3+0\\y = 4-2\times0\\z = 1+0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -3\\y = 4\\z = 1\end{cases}$.

$C(-3\,;4\,;1)$ appartient donc à Δ.

Pour $t = 1$, on obtient :

$\begin{cases}x = -3+1\\y = 4-2\times1\\z = 1+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2\\y = 2\\z = 2\end{cases}$.

$D(-2\,;2\,;2)$ appartient donc à Δ.

3. $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires car ce sont des vecteurs directeurs de Δ.

5 $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (FG). Une représentation paramétrique de la droite (FG) est : $\begin{cases}x = 4+4t\\y = -6+3t\\z = -7+2t\end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

10 1. d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-6\\-8\\6\end{pmatrix}$.

d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}$.

2. a. On remarque que $\vec{u_1} = -2\vec{u_2}$, donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

b. Deux droites parallèles sont coplanaires, d_1 et d_2 sont donc coplanaires.

c. Le point $A(4\,;-1\,;-22)$ appartient à d_1.

$A \in d_2 \Leftrightarrow$ il existe un réel t' tel que

$\begin{cases}4 = 3t'+1\\-1 = 4t'\\-22 = -3t'+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t' tel que $\begin{cases}t' = 1\\t' = -\frac{1}{4}\\t' = \frac{25}{3}\end{cases}$.

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également.

Donc A n'appartient pas à la droite d_2. Les droites d_1 et d_2 ne sont pas confondues.

17 $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{n_3}\begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{n_4}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

24 1. $\mathcal{R}$ a une équation de la forme :

$4x + 2y - z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 4\times(-2) + 2\times4 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$.

$\mathcal{R}$ a pour équation : $4x + 2y - z + 1 = 0$.

2. $\mathcal{R}$ a une équation de la forme :

$x - 3y + 5z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 5 - 3\times3 + 5\times(-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 14$.

$\mathcal{R}$ a pour équation : $x - 3y + 5z + 14 = 0$.

3. $\mathcal{R}$ a une équation de la forme :

$x - z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 3 - (-5) + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

$\mathcal{R}$ a pour équation : $x - z - 8 = 0$.

4. $\mathcal{R}$ a une équation de la forme :

$-2y + 3z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow -2\times2 + 3\times(-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = 13$

$\mathcal{R}$ a pour équation : $-2y + 3z + 13 = 0$.

29 1. $-3x_E + 2y_E - z_E + 7 = 0 - 6 - 1 + 7 = 0$.

Donc le point E appartient au plan $\mathcal{R}$.

$x_E + y_E + 3 = 0 - 3 + 3 = 0$.

Le point E appartient au plan $\mathcal{S}$. Il appartient donc bien aux deux plans.

2. $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{S}$.

3. $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les deux plans ne sont pas parallèles.

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = -3\times1 + 2\times1 - 1\times0 = -1 \neq 0$. $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas orthogonaux. Les plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont donc sécants mais pas perpendiculaires.

39 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-4\\-27\\24\end{pmatrix}$.

2. Il existe deux nombres réels a et b tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$. Donc les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, ils ne forment donc pas une base de l'espace.

44 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}$

2. On cherche les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$.

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + 7z = 0$.

On pose $z = 0$, un couple solution peut être $x = 5$ et $y = 3$. On pose donc $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$.

$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3x' - 5y' + 7z' = 0$. On pose $x' = 0$, un couple solution peut être $y' = 7$ et $z' = 5$. On pose donc $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\\5\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$. Ce sont donc deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

59 1. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ normal au plan $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur de Δ.

2. $\begin{cases}x = 3+4t\\y = 2+t\\z = t\end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

3. $A'(x\,;y\,;z) \in \Delta \cap \mathcal{P}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}x = 3+4t\\y = 2+t\\z = t\\4x+y+z-3 = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+4t\\y = 2+t\\z = t\\4(3+4t)+2+t+t-3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+4t\\y = 2+t\\z = t\\18t+11 = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+4\times\left(-\frac{11}{18}\right)\\y = 2-\frac{11}{18}\\z = -\frac{11}{18}\\t = -\frac{11}{18}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{5}{9}\\y = \frac{25}{18}\\z = -\frac{11}{18}\\t = -\frac{11}{18}\end{cases}$.

Ainsi, $A'\left(\frac{5}{9}\,;\frac{25}{18}\,;-\frac{11}{18}\right)$ est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A.

4. A' est donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

61 1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x\\y+5\\z-2\end{pmatrix}$.

Le point $H(x\,;y\,;z)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D} \Leftrightarrow H \in \mathcal{D}$ et (HA) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+2t\\y = 5-3t\\z = t\\\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+2t\\y = 5-3t\\z = t\\2x-3(y+5)+(z-2) = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 3+2t\\y = 5-3t\\z = t\\2(3+2t)-3(10-3t)+(t-2) = 0\end{cases}$

2. $\begin{cases}x = 3+2t\\y = 5-3t\\z = t\\2(3+2t)-3(10-3t)+(t-2) = 0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-3t \\ z = t \\ 14t - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2\times\frac{13}{7} \\ y = 5-3\times\frac{13}{7} \\ z = \frac{13}{7} \\ t = \frac{13}{7} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{47}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = \frac{13}{7} \\ t = \frac{13}{7} \end{cases}$. Ainsi, $H\left(\frac{47}{7} ; -\frac{4}{7} ; \frac{13}{7}\right)$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$.

3. On trace la droite $\mathscr{D}$, le point A, puis le plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A. On vérifie les coordonnées du projeté orthogonal avec la commande Intersection(P,D).

71 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AE})$.
$A(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), H(1 ; 0 ; 1)$.

Soit H' le milieu de $[AC]$: $H'\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$ et $\vec{H'H}\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)$. Une représentation paramétrique de la droite (HH') est :

$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Soit A' le milieu du segment $[HC]$. $A'\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{A'A}\left(-1 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AA') est :

$\begin{cases} x = 2t' \\ y = t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$.

Les droites (HH') et (AA') sont des médianes du triangle (HAC), leur intersection est le point K, centre de gravité du triangle. On détermine ses coordonnées :

$\begin{cases} t+1 = 2t' \\ -t = t' \\ 2t+1 = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{3} \\ t' = \frac{1}{3} \end{cases}$.

En réinjectant la valeur de t' dans la représentation paramétrique de la droite (AA'), on obtient les coordonnées du point K : $K\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$

$\vec{DF}(-1 ; 1 ; 1)$ et $F(0 ; 1 ; 1)$, donc $\vec{KF}\left(-\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

On remarque que $\vec{KF} = \frac{2}{3}\vec{DF}$. Les vecteurs sont donc colinéaires et les points D, K et F sont alignés.

Enfin, $\vec{DF}\cdot\vec{AC} = -1\times1+1\times1+1\times0 = 0$ et $\vec{DF}\cdot\vec{AH} = -1\times1+1\times0+1\times1 = 0$.

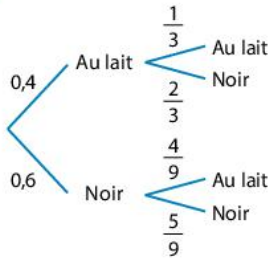
$\vec{AC}$ et $\vec{AH}$ sont deux vecteurs directeurs non coplanaires du plan (AHC),

$\vec{DF}$, vecteur directeur de (DF), est orthogonal à chacun de ces deux vecteurs.

La droite (DF) est donc perpendiculaire au plan (ACH) en K.

Chapitre 13

1 1.



2. Lorsqu'on mange un chocolat, la composition de la boîte évolue. Les deux épreuves successives ne sont donc pas indépendantes.

3. $P((L ; N)) + P((N ; L)) = 0,4\times\frac{2}{3} + 0,6\times\frac{4}{9} = \frac{8}{15}$

2 1. Il s'agit d'une succession de trois épreuves indépendantes d'univers {B ; R}. L'univers est donc : {B ; R} × {B ; R} × {B ; R}, c'est-à-dire :
{(B ; B ; B) ; (B ; B ; R) ; (B ; R ; B) ; (B ; R ; R) ; (R ; B ; B) ; (R ; B ; R) ; (R ; R ; B) ; (R ; R ; R)}.

2. Obtenir deux boules blanches exactement correspond aux issues (B ; B ; R) ; (B ; R ; B) ; (R ; B ; B). Les épreuves étant indépendantes, on a :
$P((B ; B ; R)) = P(B)\times P(B)\times P(R) = \frac{10}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{2}{12} = \frac{25}{216}$

De même, $P((B ; R ; B)) = P((R ; B ; B)) = \frac{25}{216}$.

Donc la probabilité d'avoir deux boules blanches exactement est égale à $3\times\frac{25}{216} = \frac{25}{72}$.

9 1. Deux issues sont possibles (en panne ou non la première année) et on répète 600 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, car une panne n'affecte pas les autres ordinateurs. On retrouve bien un schéma de Bernoulli de paramètres $p = 0,1$ et $n = 600$.

2. X comptant le nombre de succès dans ce schéma, on peut affirmer que X suit la loi binomiale de de paramètres $p = 0,1$ et $n = 600$.

3. $P(X = 20) = \binom{600}{20}\times0,1^{20}\times0,9^{580} \approx 0$

4. La calculatrice donne $P(X \leqslant 40) \approx 0,003$.

13 1. Le nombre de daltoniens peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,085$.

$P(X = 2) = \binom{20}{2}\times0,085^2\times0,915^{18} \approx 0,277$

2. Le nombre de daltoniennes peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,004$.

$P(X = 2) = \binom{20}{2}\times0,004^2\times0,996^{18} \approx 0,003$

25 1. Deux issues sont possibles (donneur universel ou non) et on répète 60 fois cette épreuve de façon identique et indépendante. X comptant le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,06$ et $n = 60$.

2. La loi est régie par la formule $P(X = k) = \binom{60}{k}\times0,06^k\times0,94^{60-k}$ pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 60$.

3. $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0,882$

4. $E(X) = n\times p = 3,6$. On peut dire qu'en moyenne, chaque semaine, on rencontre 3,6 donneurs universels.

38 1. Les valeurs des abscisses vont de 0 à 5 donc $n = 5$.

2. $E(X) = 0\times0,07776 + 1\times0,2592 + 2\times0,3456 + 3\times0,2304 + 4\times0,0768 + 5\times0,01024 = 2$

3. On sait par ailleurs que $E(X) = n\times p$, avec $n = 5$. Donc $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

51 1. C suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,94$, donc $E(C) = 500\times0,94 = 470$.

2. Les consoles conformes se vendent 310 €, sinon on les vend 190 €. Ainsi on obtient :
$B = 310\times C + 190\times(500 - C) = 120\times C + 95000$.
La loi de B s'écrit donc :

$C = \ldots$	0	1	…	500
$B = \ldots$	95 000	95 120	…	155 000
$P(B) = \ldots$	$P(C = 0)$	$P(C = 1)$	….	$P(C = 500)$

Grâce à un tableur, on trouve que l'espérance de X est égale à 151 400 €. On a additionné toutes les valeurs obtenues dans la colonne D. Le gain moyen est donc de 151 400 €.

	A	B	C	D
1	C=…	B=k	P(B=k)	k.P(B=k)
2	0	95000	0	0
3	1	95120	0	0
4	2	95240	0	0
5	3	95360	0	0
6	4	95480	0	0
7	5	95600	0	0
8	6	95720	0	0

69 Si X compte le nombre de « 6 » obtenus, on sait que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et p. Ainsi, sa variance est égale à $50p(1-p)$. Il suffit donc de résoudre l'équation $50p(1-p) = 10$, c'est-à-dire $5p^2 - 5p + 1 = 0$, qui a pour solutions $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ et $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$. Comme p est supérieur à 0,5 on en conclut que la valeur cherchée est $p = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

Chapitre 14

1 1. $E(Y) = 2E(X) = 6$ et $V(Y) = 2^2V(X) = 8$.

2. $E(Z) = 3E(X) + 1 = 10$ et $V(Z) = 3^2V(X) = 18$.

3. $E(T) = -E(X) = -3$ et $V(T) = (-1)^2V(X) = 2$.

4. $E(U) = 2E(X-1) = 2(E(X)-1) = 4$ et $V(U) = 2^2V(X-1) = 4V(X) = 8$.

7 **1.** Les issues étant équiprobables, on a :
$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \ldots = P(X_2 = 6) = \frac{1}{6}$.
Il en est de même pour X_2.
$E(X_1) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6}$
$= 3{,}5$
$V(X_1) = (1-3{,}5)^2\times\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\times\frac{1}{6}$
$+ (3-3{,}5)^2\times\frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2\times\frac{1}{6}$
$+ (5-3{,}5)^2\times\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2\times\frac{1}{6}$
$= \frac{17{,}5}{6}$
Puisque les variables aléatoires suivent la même loi :
$$E(X_2) = 3{,}5 \text{ et } V(X_2) = \frac{17{,}5}{6}.$$
2. Les valeurs possibles de S_2 sont $\{2\,;3\,;4\,;\ldots\,;11\,;12\}$.
$E(S_2) = E(X_1) + E(X_2) = 7$.
Les expériences aléatoires associées aux variables aléatoire X_1 et X_2 étant indépendantes, on peut calculer la variance en utilisant la propriété du cours : $V(S_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{17{,}5}{3}$.
3. Puisque $M_2 = \frac{S_2}{2}$, les valeurs possibles de M_2 sont $\{1\,;1{,}5\,;2\,;2{,}5\,;\ldots\,;5{,}5\,;6\}$.
$E(M_2) = \frac{1}{2}\times E(S_2) = 3{,}5$
et $V(M_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\times V(S_2) = \frac{17{,}5}{12}$.

20 **1.** L'événement $\{|X-10| \geqslant 10\}$ est égal à l'événement $\{|X - E(X)| \geqslant 10\}$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :
$$P(|X - E(X)| \geqslant 10) \leqslant \frac{V(X)}{10^2} = 0{,}05.$$
2. $\{X \geqslant 20\} = \{X - 10 \geqslant 10\} \subset \{|X-10| \geqslant 10\}$, donc $P(X \geqslant 20) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant 10) \leqslant 0{,}05$.

23 On note X la variable aléatoire égale au nombre de croissants vendus en une journée.
D'après l'énoncé, on a $E(X) = 50$ et $V(X) = 25$ et on cherche à majorer $P(X \geqslant 75)$.
Pour appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il faut « centrer » la variable pour faire apparaître la bonne forme :
$\{X \geqslant 75\} = \{X - E(X) \geqslant 75 - E(X)\}$
$= \{X - E(X) \geqslant 75 - 50\}$
$= \{X - E(X) \geqslant 25\}$
$\subset \{|X - E(X)| \geqslant 25\}$.
On a donc :
$P(X \geqslant 75) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant 25)$
$\leqslant \frac{V(X)}{25^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.
Remarque : en utilisant l'inégalité de Markov, on obtient « seulement » :
$P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} \approx 0{,}667$.

25 **1.** Pour chaque valeur de i, la variable aléatoire X_i est associée à une épreuve de Bernoulli de succès « Pile » : $X_i = 1$ si on a un succès et 0 sinon, et de probabilité de succès $\frac{1}{2}$. Les variables aléatoires X_i suivent donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2. On a donc, d'après le cours : $E(X_i) = \frac{1}{2}$ et $V(X_i) = \frac{1}{4}$.
3. Puisque $S_5 = X_1 + \ldots + X_5$, on a :
$$E(S_5) = E(X_1) + \ldots + E(X_5) = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$
Les expériences aléatoires de Bernoulli sont bien indépendantes, on a donc :
$$V(S_5) = V(X_1) + \ldots + V(X_5) = \frac{5}{4}.$$
4. La variable aléatoire S_5 représente le nombre de fois que l'on obtient « Pile » en 5 lancers.
5. La répétition indépendante de ces 5 expériences est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire S_5 est égale au nombre de succès, donc, d'après la propriété du cours, S_5 suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{2}$ et $n = 5$.
6. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n on a :
$P(|S_5 - 2{,}5| \geqslant 2)$
$= P\left(\left|S_5 - 5\times\frac{1}{2}\right| \geqslant 2\right)$
$\leqslant \frac{5\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2^2} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$.
Puisque $\{|S_5 - 2{,}5| \geqslant 2\} = \{S_5 = 0 \text{ ou } 5\}$, on en déduit que la probabilité de n'obtenir que des « Pile » ou des « Face » en 5 lancers est inférieure à 31,25 %.

31 **1.** On ne peut pas calculer p, mais on peut seulement imaginer que la taille a sans doute une influence sur la valeur de p : par exemple si la hauteur est petite, comme dans le cas d'une pièce, on peut penser que $p = 0$ et, inversement, si la hauteur est grande et la base petite (un bâton), on aura $p = 1$.
2. On est en présence de la répétition d'une expérience aléatoire qui consiste à lancer une boite et à regarder si elle retombe sur le côté, succès de probabilité p inconnue. On peut considérer que ces n expériences sont indépendantes. On peut donc appliquer la loi des grands nombres. On a ici un schéma de Bernoulli. On note X_1, X_2, … , X_n les variables aléatoires associées à ces expériences, qui prennent la valeur 1 en cas de « succès » et 0 en cas d' « échec ». Elles suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Les variables ont toutes la même espérance :
$$E(X_i) = p \text{ pour } i \text{ allant de 1 à } n.$$
On pose $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne empirique (que l'on peut appeler ici fréquence empirique). D'après la loi des grands nombres, on a donc, pour tout nombre réel t, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - p| \geqslant t) = 0$.
3. En lançant suffisamment de fois la boîte, on peut donc estimer la probabilité p en observant la réalisation de M_n qui est la fréquence observée (la « fréquence » tend vers la probabilité).

41 **1.** On a ici un schéma de Bernoulli. On note X_1, X_2, … , X_n les variables aléatoires associées à ces expériences, qui prennent la valeur 1 en cas de « succès » (Pile) et 0 en cas d'« échec ». Elles suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
On a alors $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
Donc S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. À la calculatrice :
$P(0{,}49 < M_n < 0{,}51) = P(490 < S_n < 510)$
$= 0{,}452$
On a : $P(|M_n - 0{,}5| > 0{,}01)$
$= 1 - P(0{,}49 < M_n < 0{,}51)$
$= 1 - 0{,}452$
$= 0{,}548$
3. Pour $n = 10^4$:
$P(0{,}49 < M_n < 0{,}51) = P(4\,900 < S_n < 5\,100)$
$= 0{,}839$.
$P(|M_n - 0{,}5| > 0{,}01) = 0{,}161$
Pour $n = 10^5$:
$P(0{,}49 < M_n < 0{,}51) = P(49\,000 < S_n < 51\,000)$
$P(|M_n - 0{,}5| > 0{,}01) = 0{,}047$
4. D'après la loi des grands nombres : la suite de terme général $1 - u_n = P(|M_n - 0{,}5| > 0{,}01)$ converge vers 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

48 **1.** Car $\{X - m \geqslant \alpha\} = \{X - m + t \geqslant \alpha + t\}$
2. $E\left[(X-m+t)^2\right]$
$= E\left[(X-m)^2 + 2t(X-m) + t^2\right]$
$= \sigma^2 + 0 + t^2$
$= \sigma^2 + t^2$
3. On pose $Y = X - m + t$.
D'après l'inégalité de Markov :
$P(Y > \alpha + t) \leqslant P(Y \geqslant \alpha + t)$.
$\leqslant \frac{E(Y)}{(\alpha+t)^2} = \frac{\sigma^2 + t^2}{(\alpha+t)^2}$.
D'après la question 1, on a le résultat demandé.
4. **a.** h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :
$$h'(t) = \frac{2t(\alpha+t)^2 - 2(\alpha+t)\left(\sigma^2+t^2\right)}{(\alpha+t)^4}$$
$$= \frac{2t(\alpha+t) - 2\left(\sigma^2+t^2\right)}{(\alpha+t)^3}$$
$$= \frac{2t\alpha - 2\sigma^2}{(\alpha+t)^3}.$$
$h'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant \frac{\sigma^2}{\alpha}$. Donc h admet un minimum en $t = \frac{\sigma^2}{\alpha}$ et ce minimum vaut $h\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.
b. D'après les questions 3. et 4. a. :
$$P(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}.$$
c. $P(|X-m| > \alpha) = P(X - m \geqslant \alpha)$
$+ P(X - m \leqslant -\alpha)$
D'où $P(|X-m| > \alpha) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.
d. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :
$$P(|X-m| > \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$
$\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \alpha^2 \leqslant \sigma^2$
$\Leftrightarrow \alpha \leqslant \sigma$, car $\alpha > 0$.

Algèbre et géométrie

1 COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Contenus

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de $\{0, 1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- Nombre des k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, formules :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

- Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

Capacités attendues

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

Démonstrations

- Démonstration par dénombrement de la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

- Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

Approfondissement possible

- Combinaisons avec répétitions.

▼ Exemples d'algorithme

- Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal.
- Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation.
- Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.

2 MANIPULATION DES VECTEURS, DES DROITES ET DES PLANS DE L'ESPACE

Contenus

- Vecteurs de l'espace. Translations.
- Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
- Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
- Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

Capacités attendues

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

Approfondissements possibles

- Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
- Fonction vectorielle de Leibniz.

3 ORTHOGONALITÉ ET DISTANCES DANS L'ESPACE

Contenus

- Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie.
- Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
- Base orthonormée, repère orthonormé.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
- Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, formules de polarisation.
- Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.

- Vecteur normal à un plan. Étant donnés un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.

Capacités attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

Démonstration

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Approfondissements possibles

- Intersection d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère en un point.
- Sphère circonscrite à un tétraèdre.
- Fonction scalaire de Leibniz.

4 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Contenus

- Représentation paramétrique d'une droite.
- Équation cartésienne d'un plan.

Capacités attendues

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
- Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

Démonstration

- Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A.

Approfondissements possibles

- Déterminer l'intersection de deux plans.
- Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
- Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.
- Intersection d'une sphère et d'une droite.

Analyse

1 SUITES

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π, e, $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, etc.

Approfondissements possibles

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

2 LIMITES DES FONCTIONS

Contenus

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- Limites et comparaison.
- Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstration

- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.

Approfondissements possibles

- Asymptotes obliques. Branches infinies.

3 COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

Contenus

- Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
- Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstration

- Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Approfondissements possibles

- Courbe de Lorenz.
- Dérivée n-ième d'une fonction.
- Inégalité arithmético géométrique.

4 CONTINUITÉ DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Contenus

- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples d'algorithme

- Méthode de dichotomie.
- Méthode de Newton, méthode de la sécante.

Approfondissements possibles

- Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.
- Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y.
- Prolongement par continuité.

5 FONCTION LOGARITHME

Contenus

- Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstrations

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de $x \mapsto x\ln(x)$.

Exemple d'algorithme

- Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

Approfondissements possibles

- Pour α dans $\mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^{\alpha}$.
- Pour x dans $\mathbb{R}$, limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

6 FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Contenus

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Capacités attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi, \pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

Approfondissements possibles

- Fonction tangente.

7 PRIMITIVES, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Contenus

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
  Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$, $(a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Approfondissements possibles

- Autres exemples d'équations différentielles, éventuellement en lien avec une modélisation, par exemple l'équation logistique.

Exemple d'algorithme

- Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.

8 CALCUL INTÉGRAL

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par : $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Sous les hypothèses du théorème, relation : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f. Notation $[F(x)]_a^b$.
- Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b.

- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations

- Pour une fonction positive croissante f sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Pour toute primitive F de f, relation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.

Approfondissements possibles

- Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes.
- Encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par des intégrales.

Exemples d'algorithme

- Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo.
- Algorithme de Brouncker pour le calcul de ln(2).

Probabilités

1 SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES, SCHÉMA DE BERNOULLI

Contenus

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \ldots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i. Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$.

Démonstration

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Exemples d'algorithme

- Simulation de la planche de Galton.
- Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif k, détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leqslant \alpha$.
- Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Approfondissements possibles

- Loi géométrique.
- Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares).

2 SOMMES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Contenus

- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
  Relation $V(aX) = a^2V(X)$.
- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et de la moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$.

Capacités attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Démonstrations

- Espérance et variance de la loi binomiale.

Approfondissements possibles

- Relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour des variables aléatoires indépendantes X, Y. Application à la variance de $X + Y$.

3 CONCENTRATION, LOI DES GRANDS NOMBRES

Contenus

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, et quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.
- Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$.
- Loi des grands nombres.

Capacité attendue

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Exemples d'algorithme

- Calculer la probabilité de $\left(|S_n - pn| > \sqrt{n}\right)$, où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Simulation d'une marche aléatoire.
- Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ. Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks, ou à $\dfrac{k\sigma}{\sqrt{n}}$, pour $k = 1, 2, 3$.

Approfondissements possibles

- Estimation.
- Marche aléatoire.
- Exemples d'application issus d'autres disciplines pour diverses valeurs de n : sondage (par exemple $n = 1000$), étude du sex ratio (par exemple $n = 10^6$), demi-vie d'atomes radioactifs ($n = 10^{23}$).

Algorithmique et programmation

En algorithmique et programmation, le programme reprend les programmes de seconde et de première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes.

Les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python. On utilise le symbole « ← » pour désigner l'affection dans un algorithme écrit en langage naturel. L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples.

Notion de liste

La génération des listes en compréhension et en extension est mise en lien avec la notion d'ensemble. Les conditions apparaissant dans les listes définies en compréhension permettent de travailler la logique. Afin d'éviter des confusions, on se limite aux listes sans présenter d'autres types de collections.

Capacités attendues

- Générer une liste (en extension, par ajouts successifs ou en compréhension).
- Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer…) et leurs indices.
- Parcourir une liste.
- Itérer sur les éléments d'une liste.

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils connaissent également la notion de couple, de triplet et plus généralement de n-uplet et celle de produit cartésien.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités $\bar{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

La notion de fonction, que les élèves manipulent depuis le cycle 4, est mise en évidence dans les diverses parties du programme : fonctions d'une variable réelle, suites, variables aléatoires, exemples en géométrie. La notion de bijection est rencontrée naturellement en analyse, en géométrie (notamment bijection entre le plan et $\mathbb{R}^2$, l'espace et $\mathbb{R}^3$), en dénombrement. La composition de deux fonctions est utilisée principalement dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

Le symbole de somme $\sum$ peut être introduit et utilisé pour écrire certaines expressions de façon concise, mais la manipulation de ce symbole pour démontrer des égalités n'est pas un objectif du programme.

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication, ou sa contraposée ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) ;
- raisonner par disjonctions des cas, par l'absurde, par contraposée ;
- raisonner par équivalence, utiliser une propriété caractéristique ;
- distinguer condition nécessaire et condition suffisante ;
- démontrer une propriété par récurrence.

Le programme complet disponible ici : https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf

Extrait du BO spécial n° 2 du 13 février 2020

« Cette note de service définit l'épreuve de l'enseignement de spécialité mathématiques de la classe de terminale de la voie générale, applicable à compter de la session 2021 du baccalauréat.

(…)

Le sujet aborde une grande variété des contenus du programme de spécialité, à l'exception des sections suivantes du programme de spécialité de terminale :

- fonctions sinus et cosinus ;
- calcul intégral ;
- concentration, loi des grands nombres. »

Index

A-B

Aire sous la courbe 244
Aire entre deux courbes 248
Asymptote 78, 80
Base d'un plan 312
Base de l'espace 316
Base orthonormée 350

C

Cardinal 276
Colinéarité 310
Combinaison 280
Combinaison linéaire 312
Composition des limites 82
Convexité 114
Coordonnées 316
Coplanarité 312, 314
Cosinus (fonction) 148, 150
Couple 276

D

Dérivée d'une fonction composée 112
Dérivée seconde 112
Direction d'un plan 312
Distance d'un point à un plan 350
Distance d'un point à une droite 350
Droite de l'espace 312
Droite et plan orthogonaux 346
Droite parallèle à un plan 314
Droites orthogonales 346
Droites parallèles 314
Droites perpendiculaires 346

E

Épreuve de Bernoulli 410
Équation cartésienne d'un plan 380
Équation différentielle 212, 216
Équation trigonométrique 152, 154

F

Factorielle 278
Fonction composée 112
Fonction concave 114, 116
Fonction continue 118
Fonction convexe 114, 116
Fonction cosinus 148, 150
Fonction sinus 148, 150

I-K

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 440
Inégalité de Markov 440
Inéquation trigonométrique 152, 154
Intégrale 244, 246
Intégration par parties 246
k-uplet 276, 278

L-M

Limite d'une fonction 78, 80
Limite d'une suite 44
Linéarité de l'espérance 438
Linéarité de l'intégrale 246
Logarithme népérien 182
Loi binomiale 410
Loi de Bernoulli 410, 442
Loi des grands nombres 442
Majorant 16
Méthode des rectangles 242, 244
Minorant 16
Moyenne empirique 442

O-P

Opérations sur les limites de fonctions 82
Opérations sur les limites de suites 46
Partie d'un ensemble 280
Partition d'un ensemble 276
Permutation 278
Plan 312
Plans parallèles 314
Plans perpendiculaires 348
Plans sécants 314
Point d'inflexion 114, 116
Primitive 212, 214
Principe additif 276
Principe multiplicatif 276
Produit cartésien 276
Produit scalaire 344
Projeté orthogonal 348, 350

R

Raisonnement par récurrence 14
Relation de Chasles (intégrales) 244
Relation de Chasles (vecteurs) 310
Relation de Pascal 282
Relation fonctionnelle 182
Repère de l'espace 316
Repère orthonormé 350
Représentation paramétrique d'une droite 378

S

Schéma de Bernoulli 410
Sinus (fonction) 148, 150
Succession d'épreuves indépendantes 408
Suite bornée 16
Suite convergente 44
Suite divergente 44
Suite géométrique 50
Suite majorée 16
Suite minorée 16
Suite monotone 16, 50

T

Théorème de comparaison (suites) 48
Théorème de comparaison (fonctions) 84
Théorème des croissances comparées 84
Théorème des gendarmes (suites) 48
Théorème des gendarmes (fonctions) 84
Théorème des valeurs intermédiaires 120
Théorème fondamental de l'intégration 244
Transformations de variables aléatoires 438
Triangle de Pascal 282
Triplet 276

V

Valeur moyenne 248
Vecteur de l'espace 310
Vecteur directeur 312
Vecteur normal à un plan 348
Vecteurs orthogonaux 344

Utilisation d'un tableur

1. Copie d'une formule

On peut recopier la formule écrite dans une cellule vers le bas ou vers la droite :
- cliquer sur le carré en bas à droite de la cellule ;
- faire glisser la formule vers le bas ou vers la droite.

Si l'on veut qu'une référence de cellule reste fixe lorsqu'on recopie une formule, il faut mettre un $. Devant la lettre il fixe la colonne et devant le nombre la ligne.

Exemple : La feuille de calcul ci-contre donne les premiers termes de la suite (u_n) définie par u_0 et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = au_n + b$. L'utilisateur peut modifier les valeurs de u_0, a et b dans les cellules B2, D2 et E2.

	A	B	C	D	E
1	n	u_n		a	b
2	0	1		2	1
3	1	3			
4	2	7			
5	3	15			
6	4	31			
7	5	63			
8	6	127			
9	7	255			
10	8	511			

On écrit la formule: "=D$2*B2+E$2" puis on la recopie vers le bas

La recopie vers le bas donne la formule "=D$2*B6+E$2"

2. Outil de calcul

fx =SOMME(A1;A4) Somme des nombres contenus dans les cellules A1, A2, A3 et A4.

fx =ALEA() Nombre réel aléatoire de l'intervalle [0 ; 1[.

fx =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) Un nombre aléatoire entier compris entre 1 et 6.

fx =ENT(A1) Partie entière du nombre dans A1.

fx =EXP(A1) Exponentielle du nombre dans A1.

fx =LN(A1) Logarithme du nombre A1.

fx =PI() Nombre π.

fx =COS(A1) Cosinus du nombre dans A1.

fx =SIN(A1) Sinus du nombre dans A1.

Remarque : La liste des fonctions du tableur peut s'obtenir en cliquant sur l'icône fx devant la barre de saisie puis en utilisant l'outil Rechercher.

3. Outil de test

fx =SI(A1<0,3;0;1) Test qui renvoie 0 si la condition « A1<0,3 » est vraie et 1 sinon.

fx =NB.SI(A1:A5;"<=2") Nombre de cellules de la plage A1:A5 qui contiennent une valeur inférieure ou égale à 2.

4. Outil pour les probabilités

fx =FACT(10) Nombre 10!.

fx =COMBIN(7;3) Nombre $\binom{7}{3}$.

fx =LOI.BINOMIALE.N(5;10;0,3;0) $P(X = 5)$ lorsque X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

fx =LOI.BINOMIALE.N(5;10;0,3;1) $P(X \leqslant 5)$ lorsque X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

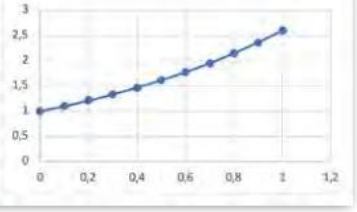
5. Outil graphique

Pour insérer un graphique représentant une fonction ou une suite dans une feuille de calcul, il suffit de cliquer sur Insertion et choisir dans la liste ci-contre.

Exemple : Grâce à la méthode d'Euler, on a déterminé les coordonnées $(x_n ; y_n)$ des points de la représentation graphique d'une solution approchée f sur $[0 ; 1]$ de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $f(0) = 1$.

En sélectionnant la plage A2:B12, puis en cliquant sur et en sélectionnant *Nuage de points avec courbes lissées* on obtient le graphique ci-contre.

	A	B	C	D	E	F
1	x_n	y_n				
2	0	1				
3	0,1	1,1				
4	0,2	1,21				
5	0,3	1,331				
6	0,4	1,4641				
7	0,5	1,6105				
8	0,6	1,7716				
9	0,7	1,9487				
10	0,8	2,1436				
11	0,9	2,3579				
12	1	2,5937				

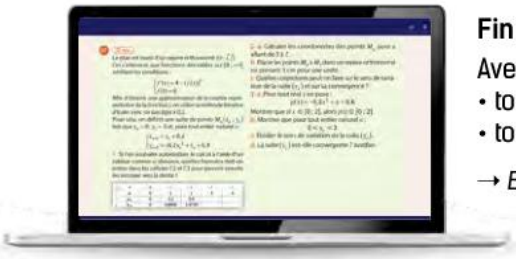


COLLECTION BARBAZO

Un manuel riche en exercices, pour donner du sens aux mathématiques

Accès libre : Mon manuel toujours accessible en ligne sur **mesmanuels.fr/4605279**

LE MANUEL NUMÉRIQUE PREMIUM



Fini les sacs trop lourds !

Avec :
- toutes les démonstrations du programme
- tous les fichiers logiciels

→ *En vente sur www.kiosque-edu.com/familles*

UN ACCÈS GRATUIT À LA PLATEFORME D'EXERCICES

De nombreux exercices interactifs, pour s'entraîner en autonomie sur toutes les notions du programme

→ *https://barbazo.reussirenmaths.fr/tle-spe*

RESSOURCES EN +

Les ressources numériques du manuel en accès direct

Avec les QR-codes dans le manuel

Sur le site collection
→ *www.lycee.hachette-education.com/Barbazo/tle-spe*

Dans la même collection

35 1543 1
ISBN 978-2-0178-6619-0
9 782017 866190

hachette ÉDUCATION
www.hachette-education.com