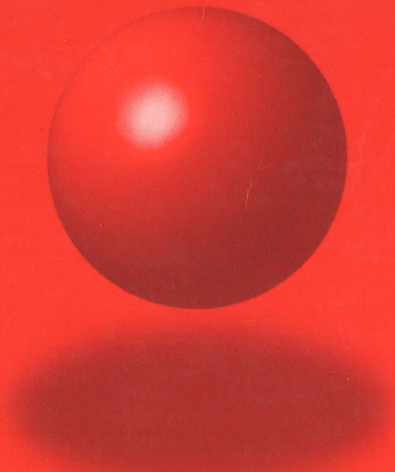
JEAN-LOUIS SOL

MANUEL

Mathématiques

Accès à l'université



DUNOD

Mathématiques

JEAN-LOUIS SOL
Université Montpellier I

Mathématiques

Accès à l'université

DEUG de sciences économiques, AES, MASS
BTS et IUT tertiaires
Classes préparatoires aux écoles de commerce et de gestion
CNAM

DUNOD

ISBN 2 10 005042 7

Avant-propos

Les étudiants qui s'inscrivent en première année d'université ont des connaissances hétérogènes en mathématiques. Vu la multiplicité des sections du secondaire, et l'histoire personnelle de chacun, les nouveaux bacheliers n'ont pas les mêmes atouts pour aborder les études supérieures.

L'expérience montre que les handicaps sont surmontables. À l'université Montpellier 1, l'UFR de sciences économiques offre aux nouveaux inscrits un cours de mise à niveau en mathématiques. Cet enseignement a été créé en 1985 ; sa pratique annuelle a inspiré cet ouvrage.

Les attentes des étudiants sont multiples. Pour y répondre, le livre est divisé en trois parties :

- première partie : questions et exercices tests ;
- deuxième partie : cours ;
- troisième partie : dix séances d'entraînement.

La première et la troisième partie sont reliées à la deuxième par des renvois indiqués en caractères gras ; chaque renvoi fait référence à un paragraphe du cours.

Suivant ses objectifs et ses compétences, le lecteur choisira les chapitres ou les sections qu'il aura besoin d'approfondir ; il commencera même sa lecture par la partie de son choix :

- **Le lecteur désireux de tester son niveau** répondra aux questions posées dans la première partie ; les réponses à ces questions de cours et exercices se trouvent dans la deuxième partie. Le paragraphe, qui donne la solution, est indiqué pour chaque test. Ce procédé évite les redondances et préserve la cohérence de l'ensemble ; il nécessite, de la part du lecteur, une attitude active, utile pour la compréhension et la mémorisation.

- **Le lecteur désireux d'acquérir des connaissances,** ou de combler certaines lacunes, trouvera dans la deuxième partie, un cours complet, illustré d'exemples et d'exercices simples. Ce cours présente les notions essentielles nécessaires pour entreprendre les études universitaires ; il est divisé en paragraphes concis pour que la table des matières ait l'utilité d'un lexique.

- **Le lecteur désireux de s'entraîner à la résolution d'exercices,** de vérifier son habileté et son savoir, commencera son travail par les séances d'entraînement de la troisième partie. Les solutions présentées sont très détaillées pour pallier l'absence d'un enseignant. Les étudiants se découragent souvent devant des corrigés trop succincts et il est souhaitable de leur fournir des réponses aussi complètes que celles demandées dans une copie d'examen. Chaque exercice renvoie à des paragraphes du cours; ces renvois facilitent la résolution et sollicitent la curiosité du lecteur.

Quel que soit le but recherché, il doit être possible de l'atteindre seul et sans l'utilisation d'ouvrages complémentaires. En particulier, la deuxième partie n'est pas un simple résumé de cours; elle est réduite aux notions essentielles mais elle constitue un véritable manuel; pour être abordée, elle ne nécessite qu'un niveau très élémentaire en mathématiques; elle peut donc servir aussi bien pour des révisions que pour un apprentissage; certaines lacunes ne sont pas toujours dues à l'oubli.

Les éléments de mathématiques développés dans ce livre sont enseignés dans les classes du secondaire : de la sixième à la terminale. Dans la mesure du possible, les programmes de référence sont ceux des sections B, entrés en vigueur en 1992-93 pour les classes terminales.

Cet ouvrage a, en effet, été conçu pour répondre, en priorité, aux besoins des futurs étudiants en économie, gestion et administration : sciences économiques, AES, préparation aux grandes écoles commerciales, IUT, BTS, CNAM, etc. Cependant, sa forme et son contenu en font un instrument de révision, d'entraînement, voire d'apprentissage, pour tout étudiant qui s'inscrit dans un premier cycle universitaire, même éloigné des disciplines économiques. C'est dans le souci de faciliter ses débuts à l'université que ce livre a été rédigé.

Jean-Louis Sol

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE

Questions et exercices tests

Une série de tests correspond à chaque chapitre du cours. Un test présente soit une question de cours fondamentale soit un exercice qui illustre une notion essentielle. Les réponses se trouvent dans la deuxième partie de l'ouvrage. Les renvois en caractères gras indiquent le paragraphe du cours où se trouve chaque réponse.

1. NOTIONS ET VOCABULAIRE DE BASE

Les notions énumérées dans les trois index de base ci-dessous doivent être maîtrisées.

Test 1.1 Théorie des ensembles

Terminologie à connaître :

- appartenance, (**1.1.1**) ;
- biunivoque (correspondance), (**1.1.5**) ;
- correspondance, (**1.1.5**) ;
- couple, (**1.1.5**) ;
- définition d'un ensemble :
  - définition, (**1.1.1**) ;
  - définition en compréhension, (**1.1.1**) ;
  - définition en extension, (**1.1.1**) ;
- différence de deux ensembles, (**1.1.4**) ;
- égalité de deux ensembles, (**1.1.3**) ;
- éléments d'un ensemble, (**1.1.1**) ;
- ensemble produit, (**1.1.5**) ;
- ensemble vide, (**1.1.1**) ;
- graphe d'une correspondance, (**1.1.5**) ;
- inclusion, (**1.1.2**) ;
- intersection de deux ensembles, (**1.1.4**) ;
- *n*-uplet, (**1.1.5**) ;
- produit cartésien de deux ensembles, (**1.1.5**) ;
- réunion de deux ensembles, (**1.1.4**) ;
- sous-ensembles, (**1.1.2**) ;
- symbole $\Rightarrow$, (**1.1.2**) ;
- symbole $\Leftrightarrow$, (**1.1.2**) ;
- univoque (correspondance), (**1.1.5**).

Test 1.2 Ensembles de nombres

Terminologie à connaître :

- dénominateur d'une fraction, (**1.2.2**) ;
- éléments négatifs (notation d'), (**1.2.1**) ;
- éléments non nuls (notation d'), (**1.2.1**) ;
- éléments positifs (notation d'), (**1.2.1**) ;
- entiers naturels (nombres), (**1.2.1**) ;
- entiers relatifs (nombres), (**1.2.1**) ;
- fraction, (**1.2.2**) ;
- fractions équivalentes, (**1.2.2**) ;

- irrationnels (nombres), (**1.2.3**) ;
- numérateur d'une fraction, (**1.2.2**) ;
- opérations sur les fractions, (**1.2.2**) ;
- rationnels (nombres), (**1.2.2**) ;
- réels (nombres), (**1.2.3**).

Test 1.3 Ensemble des vecteurs du plan

Terminologie à connaître :
- Chasles (relation de), (**1.3.5**) ;
- colinéaires (vecteurs), (**1.3.8**) ;
- définition d'un vecteur, (**1.3.1**) ;
- directeur (vecteur), (**1.3.8**) ;
- direction d'un vecteur, (**1.3.1**) ;
- égalité de deux vecteurs, (**1.3.3**) ;
- longueur d'un vecteur, (**1.3.1**) ;
- mesure algébrique d'un vecteur, (**1.3.8**) ;
- multiplication d'un vecteur par un nombre :
  • définition, (**1.3.6**) ;
  • propriétés, (**1.3.7**) ;
- norme d'un vecteur, (**1.3.4**) ;
- normé (vecteur), (**1.3.4**) ;
- notation (vecteur, droite, segment), (**1.3.1**) ;
- nul (vecteur), (**1.3.2**) ;
- opposé d'un vecteur (vecteur), (**1.3.7**) ;
- points alignés, (**1.3.8**) ;
- sens d'un vecteur, (**1.3.1**) ;
- somme de deux vecteurs :
  • définition, (**1.3.5**) ;
  • propriétés, (**1.3.7**) ;
- transformé d'un point par une translation, (**1.3.3**) ;
- unitaire (vecteur), (**1.3.4**).

2. LES NOMBRES RÉELS

Test 2.1 Qu'appelle-t-on repère d'une droite (D) et abscisse d'un point de (D) dans ce repère ? (**2.1.1, a et b**).

Test 2.2 Comment peut-on noter l'ensemble des nombres réels strictement positifs ? (**2.1.1, b**).

Test 2.3 Soit a, b, c trois nombres réels avec $a \leqslant b$; pour quelles valeurs de c a-t-on $ac \geqslant bc$? (**2.1.2**).

Test 2.4 Définir la valeur absolue d'un nombre réel a **(2.2).**

Test 2.5 Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est défini en compréhension par $[a, b] = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b \}$; définir en compréhension les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$]a, b];\ ]a, b[;\ [a, +\infty[;\ ]-\infty, a[\quad \textbf{(2.4).}$$

Test 2.6 Sur $\mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ déterminer :

$$(+\infty) + (+\infty);\ (-\infty) + (-\infty);\ (-1) \times (+\infty);\ (-1) \times (-\infty) \quad \textbf{(2.3).}$$

Test 2.7 Calculer : 3^4; 3^{-4}; $2^3 \times 2^2$; $(2^2)^3$; $(2 \times 3)^2$ **(2.5).**

Test 2.8 Calculer : $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt[6]{27^2}$ **(2.6.1).**

Test 2.9 Donner, quand elles existent, les solutions des équations suivantes : $x^4 = 81$; $x^2 = -1$; $x^3 = 8$; $x^3 = -8$ **(2.6.2).**

Test 2.10 Développer : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(a+b)^3$; $(a-b)^3$; $(3x-2)(5x-4)$; $(x^2-z)^2 \times (x+y)^2$ **(2.7).**

Test 2.11 Factoriser : $a^2 - b^2$; $a^3 + b^3$; $a^3 - b^3$; $(3x-2)(x+1) - 3(6x-4)$; $x^4 - 25$; $(4x-3)^2 - (x^2 - 2x + 1)$ **(2.7).**

3. Résolution, sur $\mathbb{R}$, d'équations et d'inéquations à coefficients réels

Test 3.1 Résoudre les équations :

$$2x + 7 = 4;\ -2x + 7 = 4;\ 3(x-7) = 6(2x-5);\ \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1} = 0 \quad \textbf{(3.1).}$$

Test 3.2 Résoudre les inéquations :

$$2x + 7 > 4\,;\ -2x + 7 \geqslant 4\,;\ (m-1)x + (m-3) \geqslant 0$$

où m est un paramètre **(3.2).**

Test 3.3 Résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

a) Par la méthode de substitution
b) Par la méthode des combinaisons linéaires
(rappeler le principe de la méthode du pivot de Gauss) **(3.3.1).**

Test 3.4 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = -4\,; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 1\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ x + 2y = 0\,; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 5 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = -2 \end{cases}$$

(3.3.2).

Test 3.5 Factoriser, quand cela est possible, les trinômes suivants et déterminer leur signe en fonction des valeurs de x :

$3x^2 - 16\,; 3x^2 + 16\,;\ -3x^2 + 4x\,;\ 2x^2 - 7x + 6$ **(3.4).**

Test 3.6 Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} xy = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ **(3.4).**

Test 3.7 Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe des fractions suivantes : $\dfrac{x+4}{2x-6}\,;\ \dfrac{2(x+1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)(x^2+2)(3x-7)}{x-2}$ **(3.4 et 3.5).**

Test 3.8 Résoudre les équations suivantes :

$\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-6} = 0\,;\ \sqrt{x^2 - x + 3} = 3x - 4\,;\ \sqrt[3]{x^2+1} - x^2 - 1 = 0\,;$
$\sqrt{|x-1|} = 2$ **(3.6).**

4. Généralités sur les fonctions réelles de la variable réelle

Test 4.1 Soit une fonction f de E dans F telle que $y = f(x)$;

• à un élément x de E la fonction f peut-elle associer plus d'un élément y de F ?

• qu'appelle-t-on ensemble de définition de f ? qu'appelle-t-on ensemble des images de f ? **(4.1.1)**.

Test 4.2 Donner le domaine de définition des fonctions suivantes : $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$; $x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$; $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ **(4.1.2)**.

Test 4.3 Soit les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$; après avoir déterminé les domaines de définition nécessaires, former et comparer $f \circ g$ et $g \circ f$ **(4.2)**.

Test 4.4 Quel est le degré de la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 5x + 2$? Quels sont ses termes de degré 4 et de degré 0 ? **(4.4.1)**.

Test 4.5 La fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x-3}$ est-elle une fonction rationnelle ? **(4.4.1)**.

Test 4.6 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$; pourquoi peut-on affirmer que ce polynôme est factorisable par $(x + 2)$? **(4.4.2)**.

Test 4.7 Déterminer $Q(x)$ tel que $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x + 2)\,Q(x)$:
a) en utilisant une division euclidienne
b) en utilisant une identification **(4.4.2)**.

Test 4.8 Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$ sachant que $P(-2) = P(1) = P(3/2) = 0$ **(4.4.2)**.

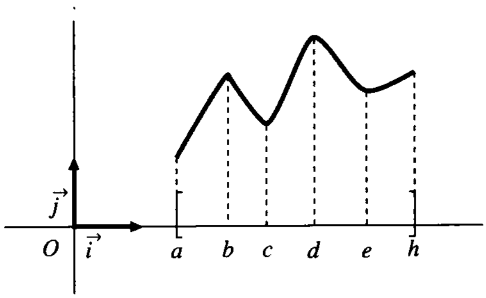
Test 4.9 Factoriser $x^7 - a^7$ et développer $(a + b)^7$ **(4.4.2 et 4.4.3)**.

5. Comportement global d'une fonction et représentation graphique

Test 5.1 Qu'est-ce qu'un repère cartésien du plan ? Dans quel cas ce repère est-il orthogonal ? Dans quel cas est-il orthonormé (ou orthonormal) ? **(5.1.1)**.

Test 5.2 Quand dit-on qu'une fonction est monotone sur un intervalle ? Quand dit-on qu'elle est strictement monotone ? **(5.2)**.

Test 5.3 Dans la représentation graphique ci-contre d'une fonction f sur un intervalle $I = [a, h]$, caractériser les différents extremums. Cette fonction f est-elle bornée sur I ? **(5.3)**.



Test 5.4 Soit c et d deux nombres réels ; construire une droite d'équation $x = d$ et une droite d'équation $y = c$ dans un repère cartésien **(5.4.1)**.

Test 5.5 Soit a et b deux nombres réels ; préciser, suivant les valeurs de a, l'allure de la droite d'équation $y = ax + b$ tracée dans un repère cartésien **(5.4.2)**.

Test 5.6 Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants :

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ **(5.4.3, a)**.

Test 5.7 Résoudre graphiquement l'inéquation $x - 2y < 4$; puis le système d'inéquations :

$$\begin{cases} 3x + 4y < 160 \\ 6x + 3y < 180 \\ x + y < 60 \\ 0 < x < 25 \\ 0 < y < 35 \end{cases}$$

(5.4.3, b).

Test 5.8 Caractériser, du point de vue de la parité ou de l'imparité, les fonctions suivantes : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^3 + x^2$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \dfrac{x^5 + x}{x^2 + 1}$ **(5.6.1).**

Test 5.9 Montrer que, dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ admet pour centre de symétrie le point $(-1, 2)$ **(5.6.2).**

Test 5.10 Qu'est-ce qu'une fonction périodique ? **(5.7).**

6. LIMITE ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS RÉELLES DE LA VARIABLE RÉELLE

Test 6.1 Trouver les limites, pour x tend vers 1, des fonctions suivantes et étudier la continuité de ces fonctions :

$$x \mapsto |x - 1| ; \; x \mapsto \frac{x-1}{|x-1|} ; \; x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \textbf{(6.2.3).}$$

Test 6.2 Soit $l \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; on suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, déterminer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **(6.3, a).**

Test 6.3 Soit $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; on suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, déterminer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **(6.3, b)**.

Test 6.4 Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5x^4 - 3x^2 + 2)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 2)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 + x^2 + 2x + 2)$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{3x^3 + x^2 + 2x + 2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^5 - 3x - 1}{4x^5 + 2x + 2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 2x}$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 3x^2}$ **(6.3, e)**.

Test 6.5 La restriction à $[1, 3]$ de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, dont la représentation graphique est faite au paragraphe 5.6.2, réalise-t-elle une bijection ? (la définition de la restriction d'une fonction est donnée au paragraphe 4.1.4) **(6.5)**.

Test 6.6 Trouver la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f telle que $f(x) = -2x + 3$ et tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé **(6.5)**.

Test 6.7 Soit g la restriction à $[2, 4]$ de la fonction f telle que $f(x) = x^2$; trouver la solution de l'équation $g(x) = 9$ **(6.5)**.

Test 6.8 Pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, donner la représentation graphique des fonctions $x \mapsto x^n$ et de leurs fonctions réciproques **(6.6.3)**.

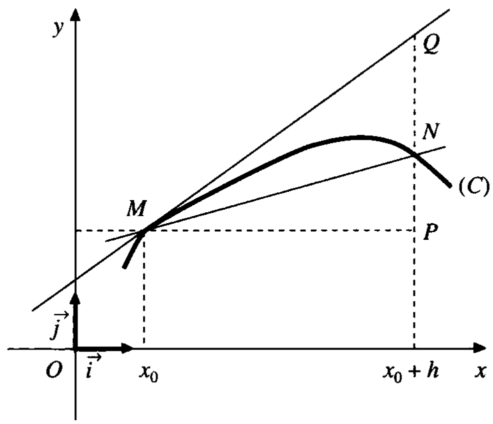
7. Dérivées et primitives

Test 7.1 Développer $(x_0 + h)^3$ et en déduire le nombre dérivé en x_0 de la fonction $x \mapsto x^3$ **(7.1.1, a et b)**.

Test 7.2 En utilisant la définition du nombre dérivé, trouver le nombre dérivé de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ **(7.1.1, b)**.

Test 7.3 En utilisant la définition du nombre dérivé, trouver $f'(3)$ pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; en déduire l'équation de la droite tangente à la courbe représentative de f pour $x = 3$ **(7.1.1, c)**.

Test 7.4 Commenter la représentation graphique ci-contre à partir de la définition de la dérivée en un point **(7.1.2)**.



Test 7.5 Étudier la continuité et la dérivabilité en 3 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x > 3,$$

$$f(3) = \frac{1}{3},$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{54} + \frac{1}{2} \quad \text{si } x < 3$$ **(7.1.3, c)**.

Test 7.6 Une fonction continue en un point x_0 est-elle dérivable en x_0 ? Une fonction dérivable en x_0 est-elle continue en x_0 ? Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction $x \mapsto |x|$ **(7.1.4)**.

Test 7.7 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes: $x \mapsto 7x$; $x \mapsto 3x^7$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt[5]{x^3}$; $x \mapsto (x^3 - 3x^2 + 12x + 4)^2$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$; $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x^3}$ **(7.2.3)**.

Test 7.8 Les fonctions $x \mapsto x^2 + 3$ et $x \mapsto x^2 - 5$ sont-elles des primitives d'une même fonction ? **(7.3.1)**.

Test 7.9 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes : $x \mapsto x^4$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$; $x \mapsto 3x^2 + 4x - 3$; $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **(7.3.2)**.

8. ÉTUDE LOCALE D'UNE FONCTION

Test 8.1 Étudier les variations de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ quand $x < 0$, $f(x) = -1$ quand $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = x^3 - 12x + 10$ quand $x > 1$ **(8.1.1)**.

Test 8.2 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$;
a) Trouver l'équation de la droite (T) tangente à la courbe représentative de f en 0.
b) Préciser les positions relatives de la courbe et de sa tangente (T) quand x tend vers 0 **(8.1.2)**.

Test 8.3 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - x$; répondre aux questions posées au test précédent **(8.1.2)**.

Test 8.4 Soit une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I :
a) Si $f'(x_0) = 0$, x_0 est-il l'abscisse d'un extremum de f sur I ?
b) Si x_0 est l'abscisse d'un extremum de f, est-ce que $f'(x_0) = 0$? **(8.1.3)**.

Test 8.5 Une fonction non dérivable en un point x_0 peut-elle admettre un extremum en ce point x_0 ? **(8.1.3)**.

Test 8.6 Caractériser le point d'abscisse 0 de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = -\sqrt[3]{-x}$ pour $x \leqslant 0$ **(8.2.1)**.

Test 8.7 Caractériser le point d'abscisse 1 de la fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$ **(8.2.2, a)**.

Test 8.8 Caractériser le point d'abscisse 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ **(8.2.2, b)**.

Test 8.9 Étudier les branches infinies de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{x+1}$ pour x tend vers -1 et pour x infini **(8.3.1 et 8.3.2)**.

Test 8.10 Étudier les branches infinies de la fonction $x \mapsto x^2$ pour x infini **(8.3.3, a)**.

Test 8.11 Étudier la branche infinie de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ pour x infini **(8.3.3, b)**.

Test 8.12 Étudier la branche infinie de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x-1}$ pour x infini **(8.3.3, c)**.

Test 8.13 Étudier les branches infinies de la fonction $x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x}$ pour x infini **(8.3.3, c)**.

9. ÉTUDE D'UNE FONCTION

Test 9.1 Énumérer et détailler les étapes nécessaires à l'étude d'une fonction **(9.1)**.

Test 9.2 Étudier la fonction $x \mapsto x^3 - |x|$ **(9.2.1)**.

Test 9.3 Étudier la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ **(9.2.2)**.

Test 9.4 Étudier la fonction f telle que : $f(x) = x^3 - |x|$ pour $x < 0, f(0) = 0$, $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ pour $x > 0$ **(9.2.3)**.

Test 9.5 Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; pour tracer la courbe (C), représentative de f, utiliser un repère orthogonal où les unités de longueur sont différentes sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées dans le rapport 2 (**9.2.4**).

Test 9.6 Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos 2x}$ (**9.3.5**).

10. Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

Test 10.1 Donner la définition de la fonction logarithme népérien (**10.1.1**).

Test 10.2 Trouver la dérivée de chacune des fonctions suivantes : $x \mapsto \ln(1-x^2)$; $x \mapsto \ln|1-x^2|$ (**10.1.2**).

Test 10.3 Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ (**10.1.3**).

Test 10.4 Dans un repère orthonormé, tracer la courbe d'équation $y = \ln x$ (**10.1.5**).

Test 10.5 Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : \ln(x-2)(x-1) = \ln(2x+8) ;$$
$$(B) : \ln(x-2) + \ln(x-1) = \ln(2x+8)$$

(**10.1.5**).

Test 10.6 Donner la définition de la fonction exponentielle népérienne (**10.2.1 et 10.2.2**).

Test 10.7 Résoudre l'équation $e^x - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{8}{3}$ (**10.2.3, a**).

Test 10.8 Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{4x^3+5x+2}$ (**10.2.3, b**).

Test 10.9 Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ **(10.2.3, c)**.

Test 10.10 Dans un même repère orthonormé, tracer les courbes d'équation $y = \ln x$ et $y = e^x$ **(10.2.4)**.

Test 10.11 Résoudre l'équation $\frac{(e^x)^3}{e^2} > 1$ **(10.2.4)**.

Test 10.12 Donner la définition des fonctions exponentielles de base a et logarithme de base a **(10.3)**.

Test 10.13 Calculer $2^3 \times 2^{\sqrt{2}}$ et $2^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}}$ **(10.3)**.

Test 10.14 Démontrer que, pour $m \in \mathbb{R}$, la dérivée, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction $x \mapsto x^m$ est la fonction $x \mapsto mx^{m-1}$ **(10.4)**.

Test 10.15 Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^m \ln x = 0$ pour $m \in \mathbb{R}_+^*$ **(10.5.1)**.

Test 10.16 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^x$, puis, sachant que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ **(10.5.2)**.

11. Suites arithmétiques et suites géométriques

Test 11.1 a) Donner les termes de rang 4, 5 et 6 de la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ définie sur $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$;

b) Donner les termes de rang 1, 2 et 3 de la suite (u_n) telle que $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ **(11.1.1)**.

Test 11.2 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $u_n = n^5 - n$ est divisible par 5 **(11.1.2).**

Test 11.3 Quand dit-on qu'une suite numérique est monotone? quand dit-on qu'une suite numérique est bornée? **(11.1.3).**

Test 11.4 Donner la définition d'une suite arithmétique **(11.2.1).**

Test 11.5 Trouver le vingt-sixième terme de la suite arithmétique (2, 5, 8, 11, ...) et le onzième terme de la suite arithmétique (10, 6, 2, – 2, – 6, ...) **(11.2.2).**

Test 11.6 Quelle est la somme des N termes consécutifs d'une suite arithmétique dont le premier de ces N termes est A et le dernier B ? **(11.2.3).**

Test 11.7 Donner la définition d'une suite géométrique **(11.3.1).**

Test 11.8 Trouver le dixième terme de la suite géométrique (2, 1, 1/2, 1/4, ...) et le neuvième terme de la suite géométrique (3, – 6, 12, – 24, ...) **(11.3.2).**

Test 11.9 Quelle est la somme des N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ dont le premier de ces N termes est A ? **(11.3.3).**

12. Calcul intégral

Test 12.1 Calculer $\int_2^3 x^2 \, dx$; en déduire, dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'aire du domaine Δ délimité par la courbe d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$ dans les trois cas suivants : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm, $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm, $\|\vec{i}\| = 3$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}1$ cm **(12.1.1 et 12.1.3).**

Test 12.2 Vérifier que $\int_3^2 x^2\,dx = -\int_2^3 x^2\,dx$ et que

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx \qquad \textbf{(12.2.1).}$$

Test 12.3 Calculer $\int_2^3 \left(x^2 - 4e^x + 2 + \dfrac{3}{x}\right) dx$ **(12.2.2).**

Test 12.4 Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ où $a < b$; qu'appelle-t-on valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$ **(12.2.3, d).**

Test 12.5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, calculer l'aire du domaine Δ délimité par la courbe d'équation $y = x^2 - 2x$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 3$ **(12.3.1).**

Test 12.6 Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[-a, a]$, où $a > 0$, telle que $I = \int_0^a f(x)\,dx$; donner la valeur de $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ dans le cas où f est paire et dans le cas où f est impaire **(12.3.1).**

Test 12.7 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, calculer l'aire du domaine D délimité par les paraboles d'équation $y = x^2 - 3x - 1$ et $y = -x^2 - x + 3$ **(12.3.2).**

Test 12.8 Calculer $\int_0^1 x^4(1 + x^5)^5\,dx$; $\int_{-1}^{3} x^2\sqrt{27 - x^3}\,dx$; $\int_0^1 \dfrac{x}{1 + x^2}\,dx$ **(12.4.1).**

Test 12.9 Déterminer $\int \dfrac{x}{4 - x^2}\,dx$ **(12.4.1).**

Test 12.10 À l'aide de l'intégration par parties, calculer $\int_1^2 (3x^2 + x)\ln x\,dx$ et déterminer $\int e^{2x}(x^2 - 2x + 3)\,dx$ **(12.4.2).**

DEUXIÈME PARTIE

Cours

Le cours qui suit, présente l'essentiel des pré-requis nécessaires à l'entrée de l'université dans les sciences de l'économie, de l'administration et de la gestion.

Pour éviter de trop longs développements, la démarche suivante a été adoptée :

- *Certaines parties des programmes du secondaire ne sont pas traitées. L'exhaustivité est évidemment impossible. Les notions négligées ici, sont généralement reprises à leur base à l'université; elles sont, par ailleurs, bien délimitées et leur étude peut se faire de manière indépendante. C'est le cas, par exemple, de la statistique descriptive et des probabilités.*
- *De nombreuses démonstrations sont absentes du cours. Seules ont été conservées celles qui présentent un véritable intérêt pédagogique. Les exemples leur ont été souvent préférés ; leur multiplicité a pour but d'illustrer la théorie et de préparer aux exercices de la troisième partie.*
- *Le chapitre 1 résume des connaissances enseignées au collège ; il définit des termes de base et est accompagné, dans les tests de la première partie, d'un index préalable.*

1 Notions et vocabulaire de base

1.1 Présentation de la théorie des ensembles

1.1.1 Ensembles. Éléments. Appartenance

La notion d'ensemble est une notion primitive. Elle est issue de termes usuels : groupement, collection, rassemblement d'objets. La théorie des ensembles permet de définir avec précision les concepts mathématiques. Cette notion se définit par l'emploi qu'on en fait et l'approche intuitive, ci-dessous, peut suffire :

> Un ensemble est une entité qui rassemble certains objets bien déterminés. Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble; on dit qu'ils appartiennent à l'ensemble. Un ensemble est donc un groupement d'éléments ayant en commun une ou plusieurs propriétés qui les caractérisent.

Si x (écrit en minuscules) est un élément de l'ensemble E (écrit en majuscules) on note $x \in E$ (on lit «x appartient à E» cette proposition appartenance).

Si x n'est pas un élément de l'ensemble E on note $x \notin E$ (on lit «x n'appartient pas à E»).

Remarque 1 : il y a essentiellement deux façons de déterminer un ensemble :

- un ensemble est défini en extension quand on écrit la liste des éléments de l'ensemble, ainsi :

  l'ensemble des voyelles en français est { a, e, i, o, u, y }, l'ensemble des entiers naturels est { 0, 1, 2, 3, 4, ... }.

- un ensemble est défini en compréhension quand on énonce les propriétés communes à tous ses éléments, ainsi :

  l'ensemble des voyelles en français est $\{ x | x$ est une voyelle de l'alphabet français $\}$,

  l'ensemble des entiers naturels est $\{ x | x$ est un nombre entier positif ou nul $\}$.

(le symbole « | » se lit « tel que » et peut aussi s'écrire « : » ou « ; »).

Remarque 2 : l'ensemble auquel n'appartient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\varnothing$.

Remarque 3 : les ensembles dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles sont appelés familles ou systèmes. Dans la suite du chapitre, on suppose que tous les ensembles présentés appartiennent à une même famille d'ensembles.

1.1.2 Sous-ensembles. Inclusion

Un ensemble A est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble B si tout élément de A appartient à B ;

on note $A \subset B$ (on lit « A inclus dans B »),
ou $B \supset A$ (on lit « B contient A »).

On peut donc écrire, a étant un élément de A,

$$A \subset B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B \text{ pour tout élément } a).$$

Remarque 1 : le symbole $\Rightarrow$ se lit « implique » ou « entraîne » ;

le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « équivaut à » ou « si, et seulement si ».

Remarque 2 : on parle d'inclusion stricte si $A \subset B$ et si, en même temps, A est distinct de B.

Remarque 3 : soit un ensemble A, on a toujours $\varnothing \subset A$.

1.1.3 Égalité de deux ensembles

Deux ensembles A et B sont égaux (ou identiques) s'ils sont constitués des mêmes éléments ;

on note $A = B$ (on lit « A égale B »).

Remarque 1 : $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarque 2 : l'égalité de deux ensembles ne tient compte ni d'une répétition d'éléments ni de l'ordre de présentation de ces éléments, ainsi :

$$\{ a, b, c \} = \{ b, a, c \} = \{ a, a, a, b, b, c \}.$$

1.1.4 Réunion. Intersection. Différence

Des opérations sur les ensembles permettent de construire de nouveaux ensembles. Parmi les plus importantes, si A et B sont deux ensembles :

- la réunion de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$ (on lit «A union B»), défini par $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$,
- l'intersection de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$ (on lit «A inter B»), défini par $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$,
- la différence A moins B est l'ensemble, noté $A - B$ ou $A \backslash B$ on lit «A moins B», défini par $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \}$.

Exemples : *si* $A = \{ a, b, c, d, e, f \}$ *et si* $B = \{ d, e, f, g \}$; $A \cup B = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$; $A \cap B = \{ d, e, f \}$; $A - B = \{ a, b, c \}$; $B - A = \{ g \}$; $A \cap (B - A) = \varnothing$.

1.1.5 Produit cartésien. Correspondances

a) Couple

Soit deux ensembles A et B et deux éléments x et y tels que $x \in A$ et $y \in B$, un couple est un objet mathématique tel que, si (x, y) et (x', y') sont deux couples leur égalité est définie par : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

Remarque : la notion de couple est différente de celle d'ensemble puisque $(x, y) \neq (y, x)$ alors que $\{ x, y \} = \{ y, x \}$.

b) Produit cartésien de deux ensembles

Le produit cartésien (ou ensemble produit) d'un ensemble A par un ensemble B est l'ensemble, noté $A \times B$ (on lit «A croix B»), de tous les couples formés par les éléments de A et de B tels que :

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

On dit que a décrit A, que b décrit B, que (a, b) décrit $A \times B$.

Exemple : *si* $A = \{ a, b, c \}$ *et si* $B = \{ c, d \}$; $A \times B = \{ (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d) \}$; $B \times A = \{ (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c) \}$.

Remarque 1 : $A \times A$ se note A^2, ainsi dans l'exemple précédent

$$A^2 = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c) \}.$$

Remarque 2 : la notion de produit cartésien s'étend au produit de plus de deux ensembles, ainsi l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets (ou n-uples) défini par $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots x_n \in E_n \}$ (si $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$ on note $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = E^n$).

c) Correspondances

Nota : le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **1.1.5, c)**.

Soit deux ensembles non vides, A et B, et une propriété définie sur une partie G de $A \times B$, on dit qu'il y a une relation entre x et y si $(x, y) \in G$ avec $G \subset A \times B$.

On appelle correspondance entre A et B le triplet (A, B, G) ; A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée et G est le graphe de la correspondance.

Une correspondance est donc une mise en relation de deux ensembles. On comprend, intuitivement, qu'elle « associe » certains éléments de A à certains éléments de B.

Remarque : une correspondance est dite univoque quand elle conduit d'un élément de l'ensemble de départ A à un élément, et un seul, de l'ensemble d'arrivée B ; elle est dite biunivoque quand elle est univoque à la fois dans la mise en relation de A avec B et de B avec A.

1.2 Présentation des principaux ensembles de nombres

Ce paragraphe ne prétend pas expliquer la construction des ensembles de nombres. Les notions de nombres entiers et de nombres décimaux sont supposées familières. Les opérations élémentaires sur les nombres (addition, soustraction, multiplication, division) et leurs propriétés usuelles doivent être maîtrisées.

1.2.1 Les nombres entiers

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, est :

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est :

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

Remarque : on utilise les notations : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{ 0 \}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{ 0 \}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*$; ces notations sont transposables aux ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ définis aux paragraphes suivants ; elles indiquent l'absence de l'élément nul, la présence des seuls éléments positifs, la présence des seuls éléments négatifs.

1.2.2 Les nombres rationnels

On appelle fraction tout couple (a, b), élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, tel que :

- cette fraction est notée $\frac{a}{b}$, a (entier relatif) est le numérateur de la fraction, b (entier relatif non nul) est le dénominateur de la fraction ;
- et deux fractions, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, sont équivalentes si $ad = bc$.

L'ensemble des fractions équivalentes à une fraction donnée s'appelle un nombre rationnel. L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble dont les éléments sont les nombres rationnels.

Remarque : soit a, b, c, d des nombres entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ et donc $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et si, en outre, $c \neq 0$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

1.2.3 Les nombres réels

Soit la fraction $\frac{a}{b}$; en effectuant la division de a par b on obtient un développement décimal, soit limité, soit illimité périodique à partir d'un certain rang. Cette propriété est caractéristique des nombres rationnels (un ratio est le rapport entre deux quantités).

Exemples : $\frac{9}{3} = 3$, $\frac{13}{-4} = -3{,}25$, $\frac{-3}{9} = -0{,}33333...$, $\frac{-723}{-100} = 7{,}23$, $\frac{895\,652}{9\,900} = 90{,}46\,98\,98\,98...$

Or, il est possible de concevoir un développement décimal illimité non périodique : ce développement définit un nombre irrationnel.

Exemples : *$\pi = 3{,}141\ 592\ 65...$ (d'autres nombres irrationnels sont présentés dans des chapitres ultérieurs : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, ...).*

On admettra qu'il est possible de rassembler dans un même ensemble les nombres rationnels et les nombres irrationnels ; on obtient ainsi l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

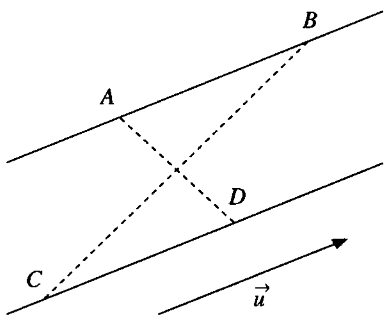
Remarque : on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.3 Présentation de l'ensemble des vecteurs du plan

1.3.1 Définitions et notations

Dans un plan, deux points distincts, A et B, pris dans cet ordre, définissent un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, qui a :

- la direction de la droite (AB) ;
- le sens de déplacement de A vers B sur la droite (AB) ;
- la longueur du segment $[AB]$.



1.3.2 Vecteur nul

Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens, et sa longueur est zéro ; on peut le définir à l'aide de deux points confondus ; on le note $\vec{0}$.

1.3.3 Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs non nuls, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, sont égaux quand ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. Ils définissent alors le même vecteur qu'on peut noter avec une seule lettre. On a , par exemple, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque 1 : le point B est le transformé du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Remarque 2 : étant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un point unique B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Remarque 3 : si l'une des propriétés suivantes est vraie, les autres le sont aussi :

- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ;
- le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme ;
- les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont égaux.

1.3.4 Norme d'un vecteur. Vecteur unitaire

Une unité de longueur étant choisie dans le plan, soit deux points, A et B, tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$:

la norme du vecteur $\vec{u}$ est la distance AB; c'est un nombre réel positif noté $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

On appelle vecteur unitaire (ou vecteur normé) tout vecteur de norme 1.

1.3.5 Somme de deux vecteurs

Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; si A est un point quelconque, il existe des points uniques B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. La somme du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, tel que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Cette définition se traduit par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

1.3.6 Multiplication d'un vecteur par un nombre

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un nombre λ; le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre λ est le vecteur, noté $\lambda\vec{u}$, défini par les caractéristiques suivantes :

- **si $\vec{u} = \vec{0}$ $\quad \lambda\vec{0} = \vec{0}$;**
- **si $\lambda = 0$ $\quad \lambda\vec{u} = \vec{0}$;**
- **si $\vec{u} \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$**

  quand λ est positif : $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction, sont de même sens et $\|\lambda\vec{u}\| = \lambda\|\vec{u}\|$,

  quand λ est négatif : $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction, sont de sens contraire et $\|\lambda\vec{u}\| = -\lambda\|\vec{u}\|$.

1.3.7 Quelques propriétés

Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et les nombres λ et μ, on a :
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, $1\vec{u} = \vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ (opposé du vecteur $\vec{u}$), $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$, $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$, $\lambda(\mu\vec{u}) = \lambda\mu\vec{u}$.

1.3.8 Vecteurs colinéaires. Points alignés. Vecteurs directeurs d'une droite

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, l'un d'eux est nul ou si, les vecteurs n'étant pas nuls, il existe un nombre λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Soit deux points distincts, A et B, et un vecteur non nul $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Un point M appartient à la droite (AB) si, et seulement si, il existe un nombre λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$; le nombre λ est appelé mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AM}$ relativement au vecteur $\vec{u}$; on note $\overline{AM} = \lambda$.

2 Les nombres réels

2.1 L'ensemble $\mathbb{R}$

2.1.1 Approche intuitive et notations

a) Repère d'une droite

Soit (D) une droite, $\vec{i}$ un vecteur directeur de (D), et O un point de (D) : le couple $(O, \vec{i})$ est un repère de la droite (D).

Soit M un point de (D) : $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ (voir **1.3.8**), O est l'origine du repère $(O, \vec{i})$, $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de ce repère ; le nombre x est l'abscisse du point M dans le repère $(O, \vec{i})$.

b) La droite réelle

À tout point M d'une droite (D), munie d'un repère $(O, \vec{i})$, correspond un nombre réel x tel que $\overline{OM} = x$ et, réciproquement, à tout nombre réel x correspond un point M d'abscisse x (voir **1.3.8**).

Cette correspondance biunivoque conduit à appeler « droite réelle » l'ensemble $\mathbb{R}$ et « point » un nombre de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels positifs peut se noter $\mathbb{R}_+$

L'ensemble des nombres réels négatifs peut se noter $\mathbb{R}_-$

L'ensemble des nombres réels d'où on exclut la valeur 0 peut se noter $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{ 0 \}$. Ainsi, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{ 0 \}$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- - \{ 0 \}$ celui des nombres réels strictement négatifs.

2.1.2 Ordre dans $\mathbb{R}$

a) Définitions et notations

Soit a et b deux nombres réels ;

a est inférieur à b si $b - a$ est un nombre positif, on note $a \leqslant b$;

a est supérieur à b si $b - a$ est un nombre négatif, on note $a \geqslant b$.

b) Règles opératoires

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$;

pour tout $c \in \mathbb{R}$ $\qquad a + c \leqslant b + c$,

pour tout $c \in \mathbb{R}_+$ $\qquad ac \leqslant bc$,

pour tout $c \in \mathbb{R}_-$ $\qquad bc \leqslant ac$ (ou $ac \geqslant bc$).

Remarque 1 : si $0 < a \leqslant b$ alors $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.

Remarque 2 :

$a < b$ signifie $a \leqslant b$ avec $a \neq b$ et se lit « a strictement inférieur à b » ;

$a > b$ signifie $a \geqslant b$ avec $a \neq b$ et se lit « a strictement supérieur à b » ;
($a \neq b$ se lit « a différent de b »).

2.2 Valeur absolue d'un nombre réel

On appelle valeur absolue d'un nombre réel a le nombre, noté $|a|$, tel que :

$$|a| = a \text{ si } a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |a| = -a \text{ si } a \leqslant 0.$$

Exemple : $|-2| = |2| = 2 = -(-2)$.

Remarque 1 : la valeur absolue d'un nombre réel est un nombre réel positif, ainsi $|a| = |-a|$ et l'égalité $|a| = |b|$ signifie soit $a = b$, soit $a = -b$.

Remarque 2 : après avoir étudié le chapitre 3, on pourra vérifier que : $|a - x| \leqslant b \Leftrightarrow |x - a| \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant x \leqslant a + b$, et donc, en particulier, $|x| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant x \leqslant b$.

2.3 La droite réelle achevée

Soit deux éléments, non réels, notés $+\infty$ (lire « plus l'infini ») et $-\infty$ (lire « moins l'infini »), tels que pour tout x réel on ait $x < +\infty$ et $x > -\infty$, on appelle droite réelle achevée l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que sur cet ensemble les lois usuelles appliquées à $\mathbb{R}$ soient applicables avec les conditions suivantes :

pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \text{ et } x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$|x| \times (+\infty) = (+\infty) \times |x| = +\infty,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\left|\frac{x}{0}\right| = +\infty,$$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(-1) \times (+\infty) = -\infty$, $(-1) \times (-\infty) = +\infty$,

et où les éléments suivants ne sont pas définis :

$$(+\infty) + (-\infty),\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},$$

(∞ signifiant soit $+\infty$ soit $-\infty$).

2.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

2.4.1 Définitions sur $\mathbb{R}$

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$; on définit les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

- intervalle fermé (ou segment) $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$,
- intervalle ouvert $]a, b[= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$,
- intervalle semi-ouvert à gauche $]a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}$,
- intervalle semi-ouvert à droite $[a, b[= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$.

Remarque 1 : on dit que les intervalles ci-dessus sont d'extrémités a et b.

Remarque 2 : le nombre réel $\frac{a+b}{2}$ est le centre d'un intervalle d'extrémités a et b, et le nombre réel $|b-a|$ est sa longueur.

Remarque 3 : on appelle intervalle ouvert non vide centré en x_0, tout intervalle de la forme $]x_0-h, x_0+h[$ où h est un nombre réel strictement positif ; on a alors les équivalences suivantes :

$$x \in]x_0-h, x_0+h[\Leftrightarrow x_0-h < x < x_0+h \Leftrightarrow |x-x_0| < h.$$

2.4.2 Extension sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Soit a un nombre réel, on définit les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

- demi-droites fermées :

  $[a, +\infty[= \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqslant a \}$ appelé section finissante fermée ;

  $]-\infty, a] = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \leqslant a \}$ appelé section commençante fermée ;

- demi-droites ouvertes :

  $]a, +\infty[= \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x > a \}$ appelé section finissante ouverte ;

  $]-\infty, a[= \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x < a \}$ appelé section commençante ouverte.

Remarque : on peut donc écrire $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

2.5 Puissances d'un nombre réel (exposants entiers)

2.5.1 Définitions et notations

a) Exposants entiers positifs ou nuls

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$;

la puissance p-ième de α est le nombre, noté α^p (lire « α puissance p »), tel que

$$\alpha^p = \underbrace{\alpha \times \alpha \times \ldots \times \alpha}_{p \text{ facteurs}} ;$$

α est appelé la base et p l'exposant ;

par convention : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a $\alpha^1 = \alpha$ et $\alpha^0 = 1$.

b) Exposants entiers

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\alpha^{-q} = \frac{1}{\alpha^q}.$$

2.5.2 Règles de calcul

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\alpha^p \times \alpha^q = \alpha^{p+q}, \quad \frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q}, \quad (\alpha^p)^q = \alpha^{pq},$$

$$(\alpha \times \beta)^p = \alpha^p \times \beta^p \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^p = \frac{\alpha^p}{\beta^p}.$$

Exemples : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \approx 0{,}012$, $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$, $(2^2)^3 = 2^6 = 64$, $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 = (6)^2 = 6 \times 6$.

2.6 Racine n-ième d'un nombre réel (exposants fractionnaires)

2.6.1 Racine *n*-ième arithmétique

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$; α est appelé racine n-ième du nombre réel positif a si $\alpha^n = a$, on note $\alpha = \sqrt[n]{a}$ et on a l'équivalence :

$$\alpha = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n = a \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \\ \alpha = 0 \text{ si } a = 0 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ est appelé le radical, le nombre a est appelé le radicande, le nombre n est appelé l'indice (si n est pair on parle de racine paire, si n est impair on parle de racine impaire, si $n = 2$ on parle de racine carrée et on n'écrit pas l'indice 2 du radical, si $n = 3$ on parle de racine cubique).

Remarque : on convient de poser $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ et les règles de calcul utilisées pour les exposants entiers restent applicables ; ainsi, si $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\sqrt[n]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p.$$

Exemples :

$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ *(car* $2^4 = 16$*),* $\sqrt{x^2} = |x|$ *(car* $(x)^2 = (-x)^2 = x^2$*),*

$\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = 2$ *(car* $2^5 = 32$*),* $\sqrt[3]{x^3} = x$*,*

$\sqrt[6]{27^2} = \sqrt[6]{729} = 3 = 27^{\frac{2}{6}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3}$.

2.6.2 Solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation $x^n = a$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Si $a = 0$ l'équation $x^n = 0$ admet une seule solution $x = 0$;

si $a \neq 0$

- 1^er^ cas : n pair,

  si $a > 0$ l'équation admet deux solutions $x_1 = \sqrt[n]{a}$ et $x_2 = -\sqrt[n]{a}$,

  si $a < 0$ l'équation n'admet pas de solution ;

- 2^e^ cas : n impair,

  si $a > 0$ l'équation admet une solution $x = \sqrt[n]{a}$,

  si $a < 0$ l'équation admet une solution $x = -\sqrt[n]{-a}$.

Exemples :

$x^4 = 81 \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{81} = 3$ *(car* $3^4 = 81$*) et* $x_2 = -\sqrt[4]{81} = -3$ *(car* $(-3)^4 = 81$*),*

$x^2 = -1$ *n'a pas de solution car il n'y a pas de réel qui multiplié par lui-même donne un nombre négatif,*

$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$ *(car* $2^3 = 8$*),*

$x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2$ *(car* $(-2)^3 = -8$*).*

2.7 La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Égalités remarquables

Dans $\mathbb{R}$, l'opération multiplication est distributive par rapport à l'opération addition :

quels que soient les réels a, b, c, on a :

$$a(b + c) = ab + ac = (b + c)a\,;$$

passer de $a(b + c)$ à $ab + ac$, c'est développer une expression,

passer de $ab + ac$ à $a(b + c)$, c'est factoriser une expression.

Remarque : factorisation et développement permettent d'établir les égalités remarquables suivantes (voir aussi les paragraphes **4.4.2** et **4.4.3**) :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Exemples : *voici deux exemples de développement suivis de trois exemples de factorisation d'expressions où x, y, z sont des nombres réels :*

- $(3x - 2)(5x - 4) = 15x^2 - 12x - 10x + 8 = 15x^2 - 22x + 8$;
- $(x^2 - z)^2(x + y)^2 = (x^4 - 2x^2z + z^2)(x^2 + 2xy + y^2)$
  $= x^6 + 2x^5y + x^4y^2 - 2x^4z - 4x^3yz - 2x^2y^2z + x^2z^2 + 2xyz^2 + y^2z^2$;
- $(3x - 2)(x + 1) - 3(6x - 4) = (3x - 2)(x + 1) - 6(3x - 2)$
  $= (3x - 2)(x + 1 - 6) = (3x - 2)(x - 5)$;
- $x^4 - 25 = (x^2)^2 - (5)^2 = (x^2 + 5)(x^2 - 5) = (x^2 + 5)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$;
- $(4x - 3)^2 - (x^2 - 2x + 1) = (4x - 3)^2 - (x - 1)^2$
  $= ((4x - 3) + (x - 1))((4x - 3) - (x - 1)) = (5x - 4)(3x - 2)$.

3 Résolution, sur $\mathbb{R}$, d'équations et d'inéquations à coefficients réels

Un nombre x_0 est solution d'une équation (resp. d'une inéquation) d'inconnue x si, lorsque $x = x_0$, l'égalité (resp. l'inégalité) présentée par l'équation (resp. l'inéquation) est vraie. Déterminer l'ensemble des solutions c'est résoudre l'équation (resp. l'inéquation). Si elles existent, les solutions d'un système d'équations ou d'inéquations à p inconnues sont des p- uplets.

Ce chapitre n'est pas exhaustif. Il présente, essentiellement à l'aide d'exemples, les principales méthodes de résolution. (Au chapitre 5 sont expliquées des méthodes graphiques.)

Remarque : avant de résoudre une équation, une inéquation, ou un système d'équations ou d'inéquations, il est nécessaire de s'assurer que cela est possible : quand les équations et inéquations proposées n'existent pas sur $\mathbb{R}$, il faut préciser leur domaine de définition (parties de $\mathbb{R}$ pour lesquelles elles ont une signification).

3.1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ (OU S'Y RAMENANT)

Si a $\neq$ 0, l'équation $ax + b = 0$ a pour solution unique : $x = -\frac{b}{a}$

Exemple 1 : *$2x + 7 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 - 7 \Leftrightarrow 2x = -3$ et la solution est $x = -\frac{3}{2}$.*

Exemple 2 : *$-2x + 7 = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 - 7 \Leftrightarrow -2x = -3$ et la solution est $x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.*

Exemple 3 : *$3(x-7) = 6(2x-5) \Leftrightarrow 3x - 21 = 12x - 30 \Leftrightarrow 30 - 21 = 12x - 3x \Leftrightarrow 9 = 9x$ et la solution est $x = \frac{9}{9} = 1$.*

Exemple 4 : *$\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1} = 0$.*
Cette équation n'est définie que sur $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$, sur ce domaine l'équation peut s'écrire : soit $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow x + 1 = 3(x-2) \Leftrightarrow 2x = 7$,

$$\textit{soit } \frac{(x+1) - 3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{7-2x}{(x-2)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 7 - 2x = 0,$$

et en définitive, l'équation a pour solution $x = \frac{7}{2}$.

3.2 INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Si a $\neq$ 0, $ax + b$ change de signe pour $x = -\frac{b}{a}$,

si $a > 0$, $ax + b > 0$ pour $x > -\frac{b}{a}$,

si $a < 0$, $ax + b > 0$ pour $x < -\frac{b}{a}$.

Exemple 1 : *$2x + 7 > 4 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$*

l'ensemble des solutions est $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

Exemple 2 : $-2x+7 \geqslant 4 \Leftrightarrow -2x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{-3}{-2} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2}$

l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$.

Exemple 3 : *$(m-1)x + (m-3) \geqslant 0$, où m est un paramètre, s'écrit $(m-1)x \geqslant (3-m)$, donc :*

- *si $(m-1) > 0$, c'est-à-dire si $m > 1$, les solutions seront telles que $x \geqslant \dfrac{3-m}{m-1}$;*
- *si $(m-1) < 0$, c'est-à-dire si $m < 1$, les solutions seront telles que $x \leqslant \dfrac{3-m}{m-1}$;*
- *si $(m-1) = 0$, c'est-à-dire si $m = 1$, il faudrait $0 \geqslant (3-m)$, donc $m \geqslant 3$, ce qui est impossible puisqu'on a $m = 1$.*

3.3 Systèmes d'équations linéaires (ou s'y ramenant)

3.3.1 Présentation de méthodes de résolution

Résolution du système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues, ci-contre :

$$(S)\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 & (a) \\ x + 10y - 3z = 5 & (b) \\ -x + y + z = -3 & (c) \end{cases}$$

a) Méthode de substitution

On exprime les inconnues les unes en fonction des autres; il est, évidemment, nécessaire d'utiliser toutes les équations.

Ainsi, par exemple : (c) s'écrit $x = y + z + 3$ (d), alors (b) s'écrit $y + z + 3 + 10y - 3z = 5$ c'est-à-dire $11y - 2z = 2$ d'où on tire $z = \dfrac{11}{2}y - 1$ (e), alors, (d) s'écrit $x = y + \dfrac{11}{2}y - 1 + 3 = \dfrac{13}{2}y + 2$ (f) ; (f) et (e) permettent de transformer (a) : $2\left(\dfrac{13}{2}y + 2\right) - y + 2\left(\dfrac{11}{2}y - 1\right) = 2$ c'est-à-dire

$$13y + 4 - y + 11y - 2 = 2$$

d'où $23y = 0$ donc $y = 0$, alors (f) donne $x = 2$ et (e) donne $z = -1$.

En définitive, le triplet $(2, 0, -1)$ est la solution unique du système (S).

b) Méthode des combinaisons linéaires

On élimine des inconnues en combinant les différentes équations : on additionne des équations après les avoir multipliées par des nombres judicieusement choisis ; il est, évidemment, nécessaire d'utiliser toutes les équations.

Ainsi, par exemple : $\left.\begin{array}{ll} 10 \times (a) + (b) & \text{conduit à } 21x + 17z = 25\ (\alpha) \\ (b) - 10 \times (c) & \text{conduit à } 11x - 13z = 35\ (\beta) \end{array}\right\}$

alors $13 \times (\alpha) + 17 \times (\beta)$ donne

$$273x + 221z + 187x - 221z = 325 + 595 \Leftrightarrow 460x = 920 \Rightarrow x = \frac{920}{460} = 2\,;$$

par ailleurs, $11 \times (\alpha) - 21 \times (\beta)$ donne

$$231\,x + 187z - 231x + 273z = 275 - 735 \Leftrightarrow 460z = -460 \Rightarrow z = \frac{-460}{460} = -1\,;$$

de même : $\left.\begin{array}{ll} (a) - 2\,(b) \text{ conduit à } & -21y + 8z = -8\ (\gamma) \\ (b) + (c) \quad \text{conduit à} & 11y - 2z = 2\ (\delta) \end{array}\right\}$

alors, $(\gamma) + 4 \times (\delta)$ donne $-21y + 8z + 44y - 8z = -8 + 8 \Leftrightarrow 23y = 0 \Rightarrow y = 0$.
En définitive, le triplet $(2, 0, -1)$ est la solution unique du système (S).

Remarque : il est possible de mêler, dans la même résolution d'un système d'équations, les méthodes de substitution et des combinaisons linéaires. La méthode du pivot de Gauss systématise cette pratique de manière algorithmique.

c) Méthode du pivot de Gauss

Par éliminations successives des inconnues, on réduit le système à un système triangulaire qui peut être résolu facilement par substitution. L'équation utilisée pour éliminer une inconnue des autres équations est appelée équation pivot; le coefficient de cette inconnue, dans l'équation pivot, est appelé pivot de l'équation. Au cours d'une résolution, la même équation ne doit pas être choisie plusieurs fois pour équation pivot.

Ainsi, par exemple : $\left\{\begin{array}{rl} x + 10y - 3z = 5 & (b) \\ 2x - y + 2z = 2 & (a) \\ -x + y + z = -3 & (c) \end{array}\right.$

Si on choisit (b) pour équation pivot, le pivot est 1 ; on effectue les transformations :

$$\begin{array}{ll} 2 \times (b) - (a) \text{ conduit à } & 20y + y - 6z - 2z = 10 - 2 \Leftrightarrow 21y - 8z = 8\ (a') \\ -1 \times (b) - (c) \text{ conduit à } & -10y - y + 3z - z = -5 + 3 \Leftrightarrow -11y + 2z = -2\ (c') \end{array}$$

Le système devient $\left\{\begin{array}{rl} x + 10y - 3z = 5 & (b) \\ 21y - 8z = 8 & (a') \\ -11y + 2z = -2 & (c') \end{array}\right.$

Si on choisit (a') pour équation pivot, le pivot est 21,

le système s'écrit $\begin{cases} x+10y-\ 3z= & 5 \quad (b) \\ \quad y-\dfrac{8}{21}z= & \dfrac{8}{21} \quad (a'') \\ -11y+\ 2z= & -\ 2 \quad (c') \end{cases}$

On effectue la transformation :

$-11\times(a'')-(c')$ conduit à $\dfrac{88}{21}z-2z=-\dfrac{88}{21}+2 \Leftrightarrow 46z=-46\ (c'')$; on obtient alors le système triangulaire :

$$\begin{cases} x+10y-\ 3z= & 5 \quad (b) \\ \quad y-\dfrac{8}{21}z= & \dfrac{8}{21} \quad (a'') \\ \quad 46z= & -46 \quad (c'') \end{cases}$$

d'où on tire :

à partir de (c''), $z=-\dfrac{46}{46}=-1$, alors,

à partir de (a''), $y=\dfrac{8}{21}z+\dfrac{8}{21}=-\dfrac{8}{21}+\dfrac{8}{21}=0$, alors,

à partir de (b), $x=-10y+3z+5=0-3+5=2$.

En définitive, le triplet $(2, 0, -1)$ est la solution unique du système (S).

3.3.2 Quelques exemples

***Exemple 1** : résolution des systèmes*

$(S_1)\begin{cases} x-2y=\ 4 & (a), \\ 3x-6y=12 & (b), \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x-2y=\ 4 & (a), \\ 2x-4y=-4 & (c), \end{cases}$ $(S_3)\begin{cases} x-2y=4 & (a). \\ x+\ y=1 & (d). \end{cases}$

- *Le système (S_1) admet une infinité de solutions, en effet : (b) est $3\times(a)$; on a, par exemple, $x=4+2y$ pour tout y de $\mathbb{R}$.*
- *Le système (S_2) n'admet pas de solution, en effet : $2\times(a)$ s'écrit $2x-4y=8$; or, (c) s'écrit $2x-4y=-4$.*
- *Le système (S_3) admet le couple $(2, -1)$ pour solution unique, en effet : (d) – (a) conduit à $3y=-3$ d'où $y=-1$ alors (a) permet d'écrire $x=4+2y=4-2=2$.*

Nota : la résolution graphique des trois systèmes de l'exemple 1 est présentée au paragraphe **5.4.3** du chapitre 5.

Exemple 2 : *le système linéaire* $\begin{cases} 3x - 5y = 0 & (a) \\ x + 2y = 0 & (b) \end{cases}$

est dit homogène. La solution unique de ce système est le couple (0, 0); en effet : (a) donne $x = \frac{5}{3}y$ *alors (b) s'écrit* $\frac{5}{3}y + 2y = 0$ *donc* $\frac{11}{3}y = 0$ *et on a bien* $y = 0$ *donc* $x = 0$.

Exemple 3 : *le système* $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$

n'est pas un système linéaire et il n'existe que sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ *(il faut à la fois* $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$*); sur ce domaine, on peut se ramener à la résolution d'un système linéaire en posant les changements de variables* $X = \frac{1}{x}$ *et* $Y = \frac{1}{y}$, *alors le système devient*

$$\begin{cases} X + 2Y = 5 & (a) \\ 3X + 5Y = -2 & (b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + 6Y = 15 & (a') \\ -3X - 5Y = 2 & (b') \end{cases}$$

et (a′) + (b′) conduit à $Y = 17$ *valeur qu'on porte dans (a), il vient :*
$X = 5 - 2Y = 5 - 34 = -29$ *et, en définitive,* $x = \frac{1}{X} = -\frac{1}{29}$ *et* $y = \frac{1}{Y} = \frac{1}{17}$,
le couple $\left(-\frac{1}{29}, \frac{1}{17}\right)$ *est l'unique solution du système proposé.*

3.4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

Soit les nombres réels a, b, c avec $a \neq 0$, l'expression $P(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée trinôme du deuxième degré :

- sa forme canonique est $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$;
- son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$;

$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ d'où les résultats suivants :

- si $\Delta < 0$ l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution réelle ; le trinôme n'est pas factorisable ; $P(x)$ a le même signe que a.

- si $\Delta = 0$ l'équation $P(x) = 0$ admet une solution : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ appelée racine double du trinôme ; $P(x) = a(x - x_1)^2$; $P(x)$ est du signe de a pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

- si $\Delta > 0$ l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ appelées racines simples du trinôme ; $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$; et, si $x_1 < x_2$, $P(x)$ est du signe de a pour tout x de $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, $P(x)$ est du signe de $(-a)$ pour tout x de $]x_1, x_2[$.
De plus $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Remarque : le calcul de Δ n'est évidemment pas obligatoire, en particulier si le trinôme est facilement factorisable.

Exemple 1 : *$P(x) = 3x^2 - 16$;*
$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{3}$ l'équation admet 2 solutions : $x_1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$;
$3x^2 - 16 = 3\left(x - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$;
$P(x) > 0$ pour tout x de $\left]-\infty, -\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\dfrac{4}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ ($P(x)$ est du signe de 3),
$P(x) < 0$ pour tout x de $\left]-\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right[$ ($P(x)$ est du signe (-3)).

Exemple 2 : *$P(x) = 3x^2 + 16$;*
l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution, on ne peut, en effet, trouver un nombre réel x tel que $3x^2 = -16$ puisque $3x^2$ est positif ou nul ;
$P(x) > 0$ (signe de 3) pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exemple 3 : *$P(x) = -3x^2 + 4x$;*
$P(x) = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 4) = 0 \Leftrightarrow -3x\left(x - \dfrac{4}{3}\right) = 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{4}{3}$;
$P(x) < 0$ (signe de (-3)) pour tout x de $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]\dfrac{4}{3}, +\infty\right[$;

$P(x) > 0$ (signe de $-(-3) = 3$) pour tout x de $\left]0, \dfrac{4}{3}\right[$.

Exemple 4 : *$P(x) = 2x^2 - 7x + 6$; on trouve $\Delta = 49 - 48 = 1$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{7+1}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7-1}{4} = \dfrac{3}{2}$;*

$P(x) > 0$ (signe de 2) pour tout x de $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

$P(x) < 0$ (signe de (-2)) pour tout x de $\left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$.

Exemple 5 : *résolution du système $\begin{cases} xy = 2 & (a) \\ 2x + 3y = 7 & (b) \end{cases}$*

$x = 0$ n'étant pas solution de l'équation (a), celle-ci peut s'écrire $y = \dfrac{2}{x}$ (équation qui n'est pas définie en 0);

pour $y = \dfrac{2}{x}$ l'équation (b) devient $2x + \dfrac{6}{x} = 7 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$

équation qui a pour solutions (voir exemple 4) : $x_1 = \dfrac{3}{2}$ $\left(\text{alors } y_1 = \dfrac{2}{x_1} = \dfrac{4}{3}\right)$ et $x_2 = 2$ $\left(\text{alors } y_2 = \dfrac{2}{x_2} = 1\right)$.

En définitive, le système admet les deux couples de solutions $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}\right)$ et $(2, 1)$.

Exemple 6 : *détermination du signe de $F(x) = \dfrac{x+4}{2x-6}$ suivant les valeurs de x :*

$F(x)$ n'existe que si x appartient à $\mathbb{R} - \{3\}$, sur ce domaine $F(x)$ a le même signe que $(x + 4)(2x - 6)$ qui est un trinôme factorisé de racines -4 et 3 et dont le coefficient du terme de deuxième degré, (2), est positif; on en conclut donc :

$F(x) > 0$ (signe de 2) pour tout x de $]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[$,

$F(x) < 0$ (signe (-2)) pour tout x de $]-4, 3[$,

$F(x) = 0$ pour $x = -4$.

3.5 SIGNE D'UNE EXPRESSION FACTORISÉE

Pour trouver le signe d'une expression factorisée, il est commode d'étudier le signe de chacun de ses facteurs et de rassembler les résultats dans un tableau.

Exemple : *signe de $E(x) = \dfrac{2(x+1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)(x^2+2)(3x-7)}{x-2}$*

il faut $x \neq 2$, $E(x)$ n'est définie que sur $\mathbb{R} - \{2\}$;

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$2(x^2+2)$		+		+		+		+		+	
$x+1$		−	0	+		+		+		+	
$x-\frac{3}{2}$		−		−	0	+		+		+	
$\frac{1}{x-2}$		−		−		−	‖	+		+	
$3x-7$		−		−		−		−	0	+	
$E(x)$		+	0	−	0	+	‖	−	0	+	

en définitive, sur $R-\{2\}$,

$E(x) > 0$ *pour tout x de* $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{3}{2}, 2\right[\cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$

$E(x) < 0$ *pour tout x de* $\left]-1, \frac{3}{2}\right[\cup \left]2, \frac{7}{3}\right[$

$E(-1) = 0,\ E\left(\frac{3}{2}\right) = 0,\ E\left(\frac{7}{3}\right) = 0.$

Remarque 1 : si les expressions $A(x)$ et $B(x)$ sont définies :

$$A(x)\,.\,B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Remarque 2 : la méthode présentée ci-dessus permet, en particulier, d'étudier le signe d'un polynôme de degré supérieur à deux (voir **4.4**).

3.6 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS CONTENANT UN RADICAL

Les équations et inéquations contenant un radical sont dites irrationnelles. Pour les résoudre, on isole les radicaux et on cherche une formulation équivalente sans radical. Ainsi, par exemple,

$$\text{pour } A(x) \geqslant 0,\ \sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow A(x) = (B(x))^2 \text{ avec } B(x) \geqslant 0.$$

Il est très important de considérer les domaines de définition avant chaque phase de calcul.

Exemple 1 : *résolution de l'équation (E) :* $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-6} = 0$; $\sqrt{x-1}$ *existe si, et seulement si,* $x-1 \geqslant 0$ *c'est-à-dire* $x \geqslant 1$, $\sqrt{2x-6}$ *existe si, et seulement si,* $2x-6 \geqslant 0$ *c'est-à-dire* $x \geqslant 3$, *l'équation (E) ne peut avoir des solutions que dans* $[3, +\infty[$; *(E)* $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-6}$ *donc, dans* $[3, +\infty[$, *(E) a la même solution que l'équation* $x-1 = 2x-6 \Rightarrow x = 5$ *et, en définitive, (E) a pour unique solution* $x = 5$.

Exemple 2 : *résolution de l'équation (E) :* $\sqrt{x^2 - x + 3} = 3x - 4$; *on a* $x^2 - x + 3 > 0$ *(trinôme de discriminant négatif et de coefficient de terme de degré 2 positif); par ailleurs, une racine carrée est un nombre positif ou nul, il faut donc* $3x - 4 \geqslant 0$.

L'équation (E) est définie sur $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ *(on peut noter que, puisque* $x^2 - x + 3 > 0$, $x = \frac{4}{3}$ *ne sera pas solution). Dans* $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$, *(E) a les mêmes solutions que l'équation* $x^2 - x + 3 = (3x - 4)^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 9x^2 - 24x + 16 \Leftrightarrow 8x^2 - 23x + 13 = 0$ *qui a pour solutions dans* $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{23 + \sqrt{113}}{16} \approx 2{,}1 \text{ et } x_2 = \frac{23 - \sqrt{113}}{16} \approx 0{,}77,\ x_2 \notin \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[\text{ et } x_1 \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

donc, en définitive, l'équation (E) a pour unique solution

$$x_1 = \frac{23 + \sqrt{113}}{16}.$$

Exemple 3 : *résolution de l'équation (E) :* $\sqrt[3]{x^2 + 1} - x^2 - 1 = 0$; *l'équation (E) est définie dans* $\mathbb{R}$,

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 + 1} = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (x^2 + 1)^3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$x^6 + 3x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4 + 3x^2 + 2) = 0$$

où on a toujours $x^4 + 3x^2 + 2 \neq 0$ *(puisque* $x^4 + 3x^2 \geqslant 0$*), comme* $x^2 = 0$ *pour* $x = 0$, *(E) a pour unique solution* $x = 0$.

Exemple 4 : *résolution de l'équation (E) :* $\sqrt{|x - 1|} = 2$; $\sqrt{|x - 1|}$ *existe pour tout x de* $\mathbb{R}$;
pour $x > 1$, $|x - 1| = x - 1$, $(E) \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$;
pour $x < 1$, $|x - 1| = 1 - x$, $(E) \Leftrightarrow \sqrt{1 - x} = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 4 \Rightarrow x = -3$;
pour $x = 1$ *l'équation (E) n'est pas satisfaite car* $0 \neq 2$.
En définitive, (E) a pour solutions les nombres -3 *et* 5.

Exemple 5 : *résolution de l'inéquation (I) :* $-2x + 5 > \sqrt{x - 2}$; *(I) n'existe que si* $x \geqslant 2$ *(il faut* $x - 2 \geqslant 0$*) et si* $x < \frac{5}{2}$ *(il faut* $-2x + 5 > 0$*), le domaine de définition de (I) est donc* $\left[2, \frac{5}{2}\right[$; *sur ce domaine, (I) a les mêmes solutions que l'inéquation* $(-2x + 5)^2 > x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 > x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 21x + 27 > 0$.

Le trinôme $4x^2 - 21x + 27$ *a pour discriminant* $\Delta = 9$ *et pour racines 3 et* $\frac{9}{4} = 2{,}25$;

on a $4x^2 - 21x + 27 > 0$ *(signe de 4) pour tout x de* $\left]-\infty, \frac{9}{4}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$ *et, en définitive, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est* $\left[2, \frac{9}{4}\right[$ *(car* $\left[2, \frac{9}{4}\right[$ *est inclus dans* $\left[2, \frac{5}{2}\right[$*).*

Exemple 6 : *résolution de l'inéquation (I) :* $x - 1 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ *;*
il faut $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$ *c'est-à-dire* $(x + 1)(x - 4) \geqslant 0$*, les solutions de (I) doivent appartenir à* $]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$ *et, sur ce domaine :*
si $x - 1 \leqslant 0$*, donc* $x \leqslant 1$*, l'inéquation (I) est vérifiée car on a toujours*

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} \geqslant 0,$$

si $x - 1 > 0$*, donc* $x > 1$*, l'inéquation (I) a les mêmes solutions que*

$$(x - 1)^2 \leqslant x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leqslant x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow x \leqslant -5$$

ce qui est impossible puisqu'on est dans le cas où $x > 1$*.*
En définitive, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $]-\infty, -1]$*.*

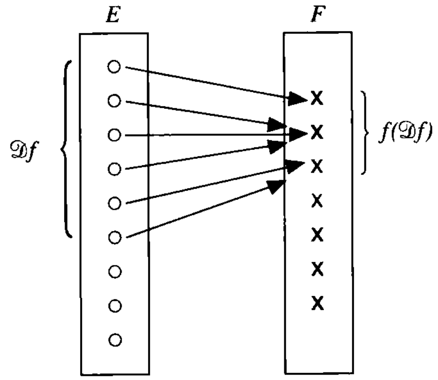
4 Généralités sur les fonctions réelles de la variable réelle

4.1 Définitions

4.1.1 Présentation des fonctions. Domaine de définition

Soit deux ensembles E et F; une fonction f de E dans F (ou de E vers F) est une correspondance entre E et F qui à tout élément x de E associe au plus un élément y de F.

Si y est l'élément unique de F associé à un élément x de E par la fonction f on le note $f(x)$ (lire «f de x»); x est alors appelé la variable (ou l'argument) et $y = f(x)$ est appelé l'image de x par f (ou la valeur de f au point x).



L'ensemble des x de E qui ont une image par f est l'ensemble de définition de la fonction f. On le note souvent $\mathcal{D}f$.

On dit que f est définie sur $\mathcal{D}f$. L'ensemble des images se note alors $f(\mathcal{D}f)$, il est défini par :

$$f(\mathcal{D}f) = \{ y \mid y = f(x), x \in \mathcal{D}f \} \quad (\text{on a } f(\mathcal{D}f) \subset F)$$

Notation : pour connaître une fonction f il faut préciser son ensemble E de départ, son ensemble F d'arrivée et la règle de correspondance, on note :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Remarque 1 : il convient d'éviter l'abus de langage qui consiste à dire «la fonction $f(x)$»; f désigne la fonction alors que $f(x)$ est un élément de l'ensemble d'arrivée.

Remarque 2 : la première recherche à effectuer quand on considère une fonction est la détermination de son domaine de définition. Il arrive qu'un procédé permettant de définir une fonction soit donné et que ne soit pas précisé le domaine de définition; dans ce cas, il faut prendre pour domaine de définition l'ensemble le plus étendu sur lequel le procédé est applicable (voir **4.1.2**).

Remarque 3 : on appelle application f de l'ensemble E dans l'ensemble F une fonction f de E dans F dont le domaine de définition est égal à E; tout élément de E admet une, et une seule, image par f.

4.1.2 Définition des fonctions réelles de la variable réelle

En reprenant les notations du paragraphe précédent :

si $F = \mathbb{R}$, f est appelée fonction réelle (ou fonction numérique);

si $E = F = \mathbb{R}$, f est appelée fonction réelle de la variable réelle (ou fonction numérique de la variable réelle).

Sauf précision contraire, les fonctions présentées dans ce livre sont des fonctions réelles de la variable réelle. Dans la notation $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ il sera donc souvent suffisant de ne conserver que $f : x \mapsto f(x)$. On se contentera parfois d'écrire «soit la fonction f telle que $y = f(x)$» ou «soit une fonction f» étant convenu que les ensembles de départ et d'arrivée de f sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exemples 1 :

- *la fonction $f : x \mapsto x^3$ fait correspondre à tout nombre réel sa puissance 3 (son cube), $\mathscr{D}f = \mathbb{R}$ et $f(\mathscr{D}f) = \mathbb{R}$;*
- *la fonction $g : x \mapsto x^2 + 1$ fait correspondre à tout nombre réel sa puissance 2 (son carré) à laquelle on ajoute le nombre 1, $\mathscr{D}g = \mathbb{R}$ et $g(\mathscr{D}g) = [1, +\infty[$;*
- *la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ fait correspondre à tout nombre réel positif sa racine carrée, $\mathscr{D}h = \mathbb{R}_+$ et $h(\mathscr{D}h) = \mathbb{R}_+$.*

Exemples 2 : *domaine de définition des fonctions f, g, h suivantes :* $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$, $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$;

- *pour f, il faut $x \neq 2$ donc $\mathscr{D}f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$;*
- *pour g, il faut $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x} \neq 2$ (c'est-à-dire $x \neq 4$) donc $\mathscr{D}g = [0, 4[\cup]4, +\infty[$;*
- *pour h, il faut $x - 2 \neq 0$ et $(x+1)(x-2) \geqslant 0$ donc $\mathscr{D}h =]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[$.*

4.1.3 Égalité de deux fonctions

Soit deux fonctions f et g ; on a l'équivalence suivante :

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ et } g \text{ ont le même domaine de définition } \mathscr{D} \\ \text{et, pour tout } x \text{ de } \mathscr{D}, f(x) = g(x). \end{cases}$$

4.1.4 Restriction d'une fonction et prolongement d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E ; on appelle restriction de f à A la fonction g de A dans F définie, pour tout x de A, par $g(x) = f(x)$; f est appelée prolongement de g.

Remarque 1 : on note parfois g par l'écriture $(f \mid A)$.

Remarque 2 : la connaissance de f et de A détermine parfaitement la restriction g ; par contre, g étant connue, un prolongement de g a ses valeurs bien déterminées, si elles existent, pour tout x de A et des valeurs arbitraires pour les élements x de $E - A$.

4.2 COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

Soit E et F deux intervalles, soit f une fonction définie sur E à valeurs dans F (c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ on a $f(x) \in F$) et soit g une fonction définie sur F; on appelle fonction composée de g et de f la fonction, notée $g \circ f$ (lire «g rond f»), définie sur E par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque 1 : la composition de deux fonctions nécessite de considérer attentivement les domaines de définition. La fonction $g \circ f$ n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de définition de g.

Remarque 2 : en général $g \circ f \neq f \circ g$ et il est fréquent que l'une des deux fonctions, $g \circ f$ ou $f \circ g$, soit définie et pas l'autre.

Remarque 3 : sous réserve que les fonctions f, g, h, $h \circ g$, $(h \circ g) \circ f$ soient définies, on a : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Exemple 1 : *soit les fonctions* $f : x \mapsto f(x) = 1 - x^2$ *et* $g : x \mapsto \sqrt{x}$; *il est commode de poser* $y = f(x) = 1 - x^2$ *et* $z = g(y) = \sqrt{y}$ *avec* $y \geqslant 0$, *pour* f *définie sur* $[-1, +1]$ *et* g *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *on définit sur* $[-1, +1]$ *la fonction* $(g \circ f) : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$; *alors que* f *peut être définie sur* $\mathbb{R}$, *il a fallu réduire son domaine de définition à* $[-1, +1]$ *pour définir* $g \circ f$ *car pour* $x \in [-1, +1]$ *on a* $f(x) \geqslant 0$ *donc* $f(x) \in \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}g$ ($f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *n'est pas inclus dans* $\mathbb{R}_+$ *alors que* $f([-1, +1]) = \mathbb{R}_+$).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[dr, mapsto, "g \circ f"'] & y = 1 - x^2 \arrow[d, mapsto, "g"] \\ & z = \sqrt{y} = \sqrt{1 - x^2} \end{tikzcd}$$

Exemple 2 : *formation et comparaison de* $f \circ g$ *et de* $g \circ f$ *quand* $f : x \mapsto x^2 + 2$ *et* $g : x \mapsto \dfrac{1}{x - 2}$; f *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et* g *est définie sur* $\mathbb{R} - \{2\}$.

Si on pose $y = f(x) = x^2 + 2$ *et* $z = g(y) = \dfrac{1}{y - 2}$ *on aura* $z = \dfrac{1}{x^2}$; *pour* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *et* g *définie sur* $\mathbb{R} - \{2\}$, *on a* $g \circ f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}^*$.

Si on pose $y = g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ *et* $z = f(y) = y^2 + 2$ *on aura* $z = \dfrac{1}{(x - 2)^2} + 2$; *pour* g *définie sur* $\mathbb{R} - \{2\}$ *et* f *définie sur* $\mathbb{R}$, *on a* $f \circ g : x \mapsto \dfrac{1}{(x - 2)^2} + 2$ *définie sur* $\mathbb{R} - \{2\}$.

On peut constater que $f \circ g \neq g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & y = x^2 + 2 \arrow[d, "g"] \\ & z = \frac{1}{y-2} = \frac{1}{x^2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & y = \frac{1}{x-2} \arrow[d, "f"] \\ & z = y^2 + 2 = \frac{1}{(x-2)^2} + 2 \end{tikzcd}$$

4.3 Opérations dans l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle

Soit les fonctions f et g définies respectivement sur les ensembles $\mathcal{D}f$ et $\mathcal{D}g$ tels que $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g \neq \varnothing$; il est commode d'introduire les notations suivantes :

- somme : $f + g$ définie sur $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$ telle que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- produit : $f \, . \, g$ définie sur $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$ telle que $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, (en particulier, si a est un nombre réel (af) est une fonction définie sur $\mathcal{D}f$ telle que $(af)(x) = af(x)$).

Remarque : le domaine de définition de la fonction $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas toujours $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$ puisque pour tout nombre x_0 de $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$ tel que $g(x_0) = 0$ la fonction $\frac{f}{g}$ n'est pas définie.

4.4 Présentation des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles

4.4.1 Définitions

On appelle fonction monôme toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a_m x^m$ où $a_m \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$; a_m est appelé le coefficient du monôme. Par commodité, il est courant d'appeler $a_m x^m$ monôme de degré m si $a_m \neq 0$.

On appelle fonction polynôme toute fonction égale à une somme de fonctions monômes. Le degré d'une fonction polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré dont le coefficient est non nul ; on note :

$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m.$$

Par commodité, il est courant d'appeler $P(x)$ polynôme ; si $a_n \neq 0$, le degré du polynôme précédent est n (on note $\deg(P) = n$).

Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont les coefficients du polynôme.

Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

On appelle fonction rationnelle toute fonction égale au quotient de deux fonctions polynômes.

Exemple 1 : *la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^5 + 6x^4 + 4x^2 + 5x + 2$ est une fonction polynôme de degré 5 ; $4x^5$ est son terme de degré 5 (terme de plus haut degré), $6x^4$ est son terme de degré 4, ..., 2 est son terme de degré zéro (ou terme constant) ; les réels 4, 6, 0, 4, 5, 2 sont les coefficients de P.*

Exemple 2 : *la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x-3}$ est une fonction rationnelle car, en réduisant au même dénominateur, il vient : $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x-3}$ (quotient de polynômes).*

4.4.2 Factorisation d'un polynôme

a) Division euclidienne

Quels que soient les polynômes A et B, avec $B \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ où, soit $\deg(R) < \deg(B)$, soit $R(x) = 0$.

Q et R peuvent être déterminés en effectuant la division euclidienne de A par B. On dit qu'on divise A par B suivant les puissances décroissantes. Q est appelé le quotient et R le reste de la division de A par B.

Exemple : *dans l'exemple 2 du paragraphe **4.4.1** :*

$$A(x) = x^2 - 5x + 10, \quad B(x) = x - 3, \quad Q(x) = x - 2, \quad R(x) = 4.$$

b) Divisibilité par $(x - a)$

Un polynôme P est divisible (ou factorisable) par $(x - a)$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - a)\,Q(x)$.

P est divisible par $(x - a)$ si, et seulement si, $P(a) = 0$; on dit alors que a est un zéro (ou une racine) du polynôme P.

Pour déterminer Q on peut utiliser la division euclidienne ou effectuer une identification.

Exemple 1 : *soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$; puisque $P(-2) = 0$, $P(x)$ est divisible (factorisable) par $(x + 2)$ et on peut écrire $P(x) = (x + 2)Q(x)$.*

- *Détermination de $Q(x)$ par division euclidienne :*

  le principe consiste à utiliser une disposition analogue à celle de la division des nombres et à obtenir des restes successifs en considérant les termes de plus haut degré comme l'indique le calcul ci-dessous :

$$
\begin{array}{rr|l}
P(x) = & 2x^3 - x^2 - 7x + 6 & x + 2 \\ \cline{3-3}
2x^2(x+2) = & 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 - 5x + 3 = Q(x) \\ \cline{2-2}
P(x) - 2x^2(x+2) = & -5x^2 - 7x + 6 & \\
-5x(x+2) = & -5x^2 - 10x & \\ \cline{2-2}
(-5x^2 - 7x + 6) - (-5x(x+2)) = & 3x + 6 & \\
3(x+2) = & 3x + 6 & \\ \cline{2-2}
(3x+6) - 3(x+2) = & 0 &
\end{array}
$$

- *Détermination de $Q(x)$ par identification :*

  le polynôme Q est de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ donc

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\
&= x^3(a) + x^2(2a + b) + x(2b + c) + 2c,
\end{aligned}
$$

  égalité qui implique le système d'équations linéaires $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \\ 2b + c = -7 \\ 2c = 6 \end{cases}$

  d'où on titre aisément $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$ et donc $Q(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Remarque 1 : dans l'exemple ci-dessus $Q(1) = 0$ permet de trouver la relation $Q(x) = (x - 1)(2x - 3) = 2(x - 1)(x - 3/2)$ et, en définitive, puisque $P(-2) = 0$, $P(1) = 0$ et $P(3/2) = 0$, on peut écrire $P(x) = 2(x - 1)(x - 3/2)(x + 2)$.

Remarque 2 : un polynôme P de degré n admet au plus n racines distinctes ; dans ce cas on peut écrire : $P(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ où α est un nombre réel non nul et où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les n racines du polynôme P.

Remarque 3 : soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel, le polynôme $x^n - a^n$ est factorisable par $(x - a)$ et on a :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Exemple 2 : *$x^7 - a^7 = (x - a)(x^6 + x^5a + x^4a^2 + x^3a^3 + x^2a^4 + xa^5 + a^6)$.*

4.4.3 La formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel, un raisonnement par récurrence permet de démontrer la formule suivante :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + C_n^n b^n.$$

Exemple : $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
car $C_7^0 = C_7^7 = 1$, $C_7^1 = C_7^6 = 7$, $C_7^2 = C_7^5 = \dfrac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$, $C_7^3 = C_7^4 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35.$

Remarque 1 : soient p et n deux nombres entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots (p-1) \times p}$$

est le nombre de combinaisons sans répétition de n éléments pris p à p, c'est-à-dire, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque 2 : soit n un nombre entier naturel, on appelle factorielle n le nombre, noté $n\,!$, défini par :

$$0\,! = 1 \quad \text{et, pour} \quad n \geqslant 1, \quad n\,! = (n-1)\,!\,n.$$

On a donc : $0\,! = 1$, $1\,! = 1$ et le produit des n premiers entiers strictement positifs s'écrit $n\,! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$.

5 Comportement global d'une fonction et représentation graphique

5.1 Représentation graphique dans un repère cartésien

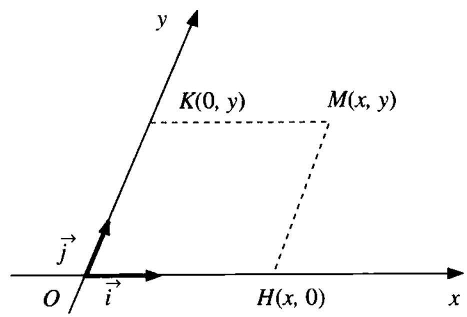
5.1.1 Repères et coordonnées dans le plan

Tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non nuls et non colinéaires constitue une base du plan vectoriel.

Soit O un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan ; le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien du plan, le point O est l'origine de ce repère. Alors, pour tout point M du plan il existe un couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, et pour tout couple (x, y) de réels il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Le couple (x, y) lié au point M par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est le couple des coordonnées de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $M(x, y)$; x est l'abscisse du point M et y son ordonnée.

Soit (Ox) la droite de repère $(O, \vec{i})$ et soit (Oy) la droite de repère $(O, \vec{j})$; si H est le projeté de M sur (Ox) parallèlement à (Oy) et si K est le projeté de M sur (Oy) parallèlement à (Ox) on a : $H(x, 0)$, $K(0, y)$, $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$; la droite (Ox) est appelée axe des abscisses, la droite (Oy) est appelée axe des ordonnées.



Quand les axes des abscisses et des ordonnées sont perpendiculaires le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthogonal (les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux) ; si, de plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont normés ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$) le repère est dit orthonormé (ou orthonormal).

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}f$ et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan ; quand x décrit $\mathcal{D}f$, l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ est la représentation graphique de f dans ce plan. On dit que la courbe, souvent notée (Cf), ainsi obtenue est la courbe représentative de f sur $\mathcal{D}f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; cette courbe a pour équation cartésienne $y = f(x)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (par commodité, on dit : « la courbe (Cf) d'équation $y = f(x)$ »).

5.1.2 Compléments à propos des vecteurs

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan vectoriel et $M(x, y)$ et $N(x', y')$ deux points du plan ; si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ on peut noter $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ et on a les résultats suivants :

- $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$;
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$;
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$;
- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$.

5.2 VARIATIONS D'UNE FONCTION. TAUX D'ACCROISSEMENT. MONOTONIE

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et soit x_1 et x_2 deux points distincts de $\mathcal{D}$:

On appelle taux d'accroissement (ou taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2, le nombre $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

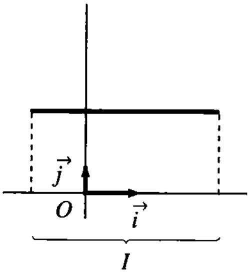
Soit t le taux d'accroissement de f entre deux nombres quelconques distincts d'un intervalle $I \subset \mathcal{D}$ (évidemment $I \neq \varnothing$ et I n'est pas réduit à un seul nombre) :

- f est croissante sur I (resp. strictement croissante sur I) si, et seulement si, $t \geqslant 0$ (resp. $t > 0$);
- f est décroissante sur I (resp. strictement décroissante sur I) si, et seulement si, $t \leqslant 0$ (resp. $t < 0$);
- f est constante sur I si, et seulement si, $t = 0$.

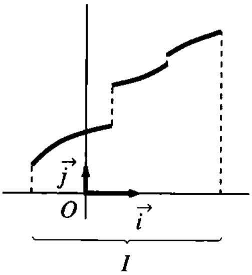
Quand on subdivise $\mathcal{D}$ en intervalles où la fonction f est croissante, décroissante ou constante, on dit qu'on étudie les variations de f sur $\mathcal{D}$ (ou qu'on détermine le sens de variation de f sur $\mathcal{D}$).

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle.

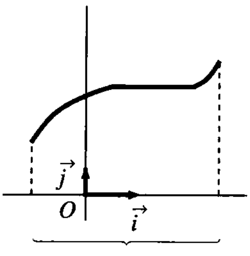
Une fonction est monotone sur un intervalle si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante sur cet intervalle.



f constante sur I



f strictement croissante sur I



f croissante sur I

5.3 Extremums. Fonctions bornées

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathcal{D}$;

- f admet un maximum absolu, égal à $f(x_0)$, sur $\mathcal{D}$ en x_0 si, pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$;
- f admet un minimum absolu, égal à $f(x_0)$, sur $\mathcal{D}$ en x_0 si, pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.

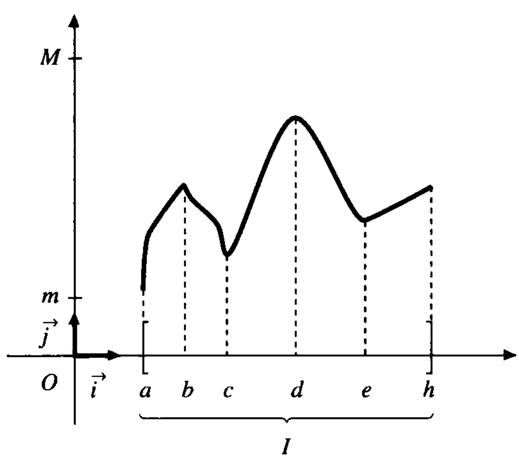
Remarque 1 : les maximums et les minimums sont appelés des extremums.

Remarque 2 : s'il existe un nombre réel positif α tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}$ et que les résultats ci-dessus ne sont établis que pour tout x de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ (« x voisin de x_0 »), on parle d'extremum relatif ou d'extremum local (les extremums locaux sont souvent simplement appelés extremums).

Remarque 3 : dans les conditions de la remarque 2, si x_0 est une extrémité de $\mathcal{D}$ et si $[x_0, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}$, ou si $]x_0 - \alpha, x_0] \subset \mathcal{D}$, $f(x_0)$ est aussi un extremum local ; le point $(x_0, f(x_0))$ est appelé point d'arrêt de la courbe représentative de f.

- f est dite majorée sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe un nombre réel M tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout x de $\mathcal{D}$;
- f est dite minorée sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe un nombre réel m tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout x de $\mathcal{D}$;
- une fonction à la fois majorée et minorée sur $\mathcal{D}$ est dite bornée sur $\mathcal{D}$.

Exemple : *on considère la représentation graphique ci-contre d'une fonction f définie sur un intervalle $I=[a, h]$; f admet un minimum absolu en a, un maximum relatif en b, un minimum relatif en c, un maximum absolu en d, un minimum relatif en e, un maximum relatif en h ; sur I, les points $(a, f(a))$ et $(h, f(h))$ sont des points d'arrêt de la courbe représentative de f ; la fonction f est bornée sur I, puisqu'on a $f(x) \leqslant f(d)$ et $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout x de $\mathcal{D}$.*



5.4 Fonctions dont les courbes représentatives sont des droites

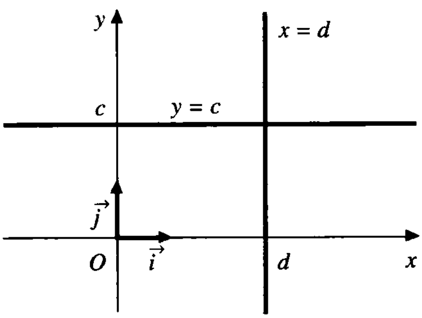
Dans tout le paragraphe **5.4**, on considère l'ensemble des points du plan muni du repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'ensemble des points de coordonnées (x, y) est une droite si, et seulement si, leurs coordonnées sont liées par une relation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α, β et γ sont des nombres réels tels que α et β ne sont pas simultanément nuls. La relation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est une équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(-\beta, \alpha)$.

5.4.1 Droites représentatives des équations $y = c$ et $x = d$

Soit deux nombres réels c et d :

- la courbe d'équation $y = c$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses, cette droite passe par le point $(0, c)$;
- la courbe d'équation $x = d$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, cette droite passe par le point $(d, 0)$.



Remarque : l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$ et l'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$.

5.4.2 La fonction affine $x \mapsto ax + b$ et la fonction linéaire $x \mapsto ax$

Étant donné deux nombres réels a et b, la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax + b$ est appelée fonction numérique du premier degré ; si $b \neq 0$ la fonction est dite affine, si $b = 0$ la fonction est dite linéaire. Sa courbe représentative est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1, a)$; cette droite passe par le point $(0, b)$.

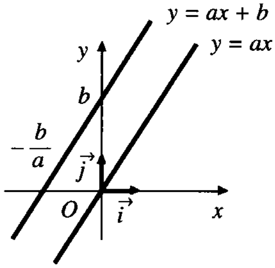
a est appelé coefficient directeur de la droite, c'est le taux d'accroissement constant de la fonction affine ou de la fonction linéaire ; si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé a est appelé pente de la droite ;

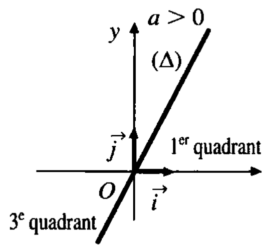
b est l'ordonnée à l'origine de la droite.

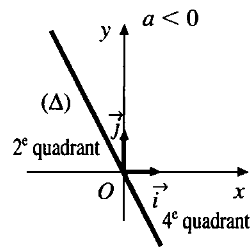
Remarque 1 : les droites d'équation $y = ax$ et $y = ax + b$ sont parallèles.

Remarque 2 : pour construire la droite d'équation $y = ax + b$ on peut, par exemple, joindre les points $(0, b)$ et $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ (la droite d'équation $y = ax$ passe par le point $(0, 0)$).

Remarque 3 : soit (Δ) la droite représentative d'une fonction linéaire d'équation $y = ax$ dans un repère orthogonal; «plus $|a|$ est grand» plus (Δ) est «proche» de l'axe des ordonnées, «plus $|a|$ est petit» plus (Δ) est «proche» de l'axe des abscisses; si $a > 0$, (Δ) se situe dans le premier et le troisième quadrant (fonction croissante sur $\mathbb{R}$); si $a < 0$, (Δ) se situe dans le deuxième et le quatrième quadrant (fonction décroissante sur $\mathbb{R}$).







5.4.3 Applications géométriques

a) Résolution graphique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Soit le système linéaire (S) : $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 & (a) \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 & (b) \end{cases}$

(a) est l'équation de la droite (D_1) et (b) est celle de la droite (D_2);

- si (D_1) et (D_2) sont parallèles, le système (S) n'a aucune solution;
- si (D_1) et (D_2) sont confondues, le système (S) a une infinité de solutions;
- si (D_1) et (D_2) sont sécantes en $M_0(x_0, y_0)$, (on a $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$) le couple (x_0, y_0) est la solution unique du système (S).

Exemple : *on construit les droites :*

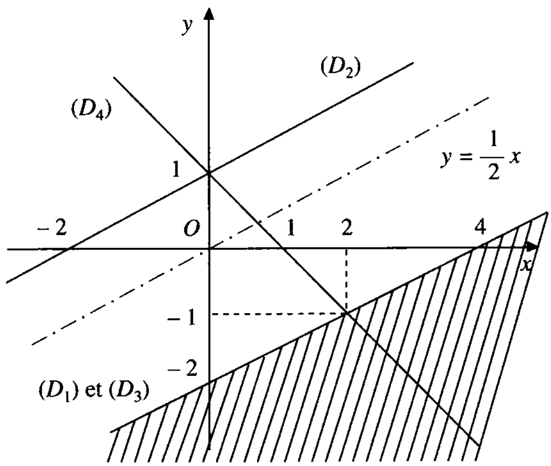
(D_1) d'équation $x - 2y = 4$;

(D_2) d'équation $2x - 4y = -4$;

(D_3) d'équation $3x - 6y = 12$;

(D_4) d'équation $x + y = 1$;

- *(D_1) et (D_3) passent par les points (4, 0) et (0, – 2) et sont confondues, le système* $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$ *admet une infinité de solutions ;*



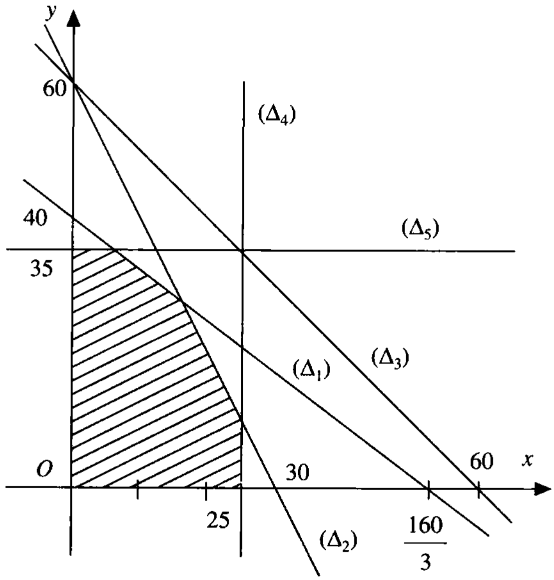
- *(D_2) passe par les points (– 2, 0) et (0, 1), elle est parallèle à (D_1) ((D_1) et (D_2) sont parallèles à la droite d'équation* $y = \frac{1}{2}x$*), le système* $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$ *n'admet pas de solution ;*
- *(D_4) passe par les points (1, 0) et (0, 1), (D_1) et (D_4) sont sécantes au point (2, – 1), le système* $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ *admet pour solution unique* $\left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \end{array} \right.$

b) Résolution graphique d'inéquations

Une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts : un demi-plan ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $\alpha x + \beta y + \gamma > 0$ et un demi-plan ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $\alpha x + \beta y + \gamma < 0$. Ce partage du plan permet de résoudre graphiquement les inéquations linéaires d'inconnues (x, y).

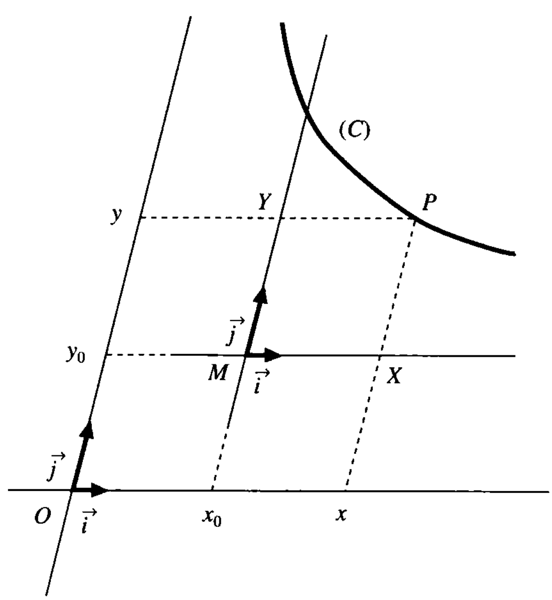
Exemple 1 : *la droite (D_1) d'équation $x - 2y = 4$ partage le plan en deux demi-plans; pour résoudre graphiquement l'inéquation $x - 2y < 4$ on pose $h(x, y) = x - 2y - 4$; tout point $M(x, y)$ tel que $h(x, y) < 0$ est solution de l'inéquation proposée, or $h(0, 0) = -4$ donc $h(0, 0) < 0$; le point (0, 0) appartient au demi-plan des solutions de l'inéquation (demi-plan non hachuré du graphique de l'exemple du paragraphe **5.4.3, a**).*

Exemple 2 : *en utilisant la méthode employée dans l'exemple précédent, on construit le graphique ci-dessous qui présente, dans sa partie hachurée, l'ensemble des solutions du système d'inéquations suivant :*



$$\begin{cases} 3x + 4y < 160 & ((\Delta_1) \text{ est la droite d'équation } 3x + 4y = 160) \\ 6x + 3y < 180 & ((\Delta_2) \text{ est la droite d'équation } 6x + 3y = 180) \\ x + \ y < \ 60 & ((\Delta_3) \text{ est la droite d'équation } x + y = 60) \\ 0 < x < \ 25 & ((\Delta_4) \text{ est la droite d'équation } x = 25) \\ 0 < y < \ 35 & ((\Delta_5) \text{ est la droite d'équation } y = 35) \end{cases}$$

5.5 CHANGEMENT DE REPÈRE



Soit O et M deux points du plan, (C) une courbe et P un point de (C), on suppose que :

- dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) a pour équation $y = f(x)$, le point M a pour coordonnées (x_0, y_0), le point P a pour coordonnées (x, y);
- dans le repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) a pour équation $Y = g(X)$, le point P a pour coordonnées (X, Y), on a :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + (X, Y)$$

d'où $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$ et

$$y = f(x) \Leftrightarrow y_0 + Y = f(x_0 + X)$$

et en définitive

$$Y = g(X) = f(x_0 + X) - y_0.$$

Exemple : *voir l'exemple du paragraphe* ***5.6.2.***

5.6 Parité et symétrie

5.6.1 Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$;

- f est dite paire si, et seulement si, pour tout x de $\mathscr{D}$, on a :

$$-x \in \mathscr{D} \text{ et } f(-x) = f(x);$$

- f est dite impaire si, et seulement si, pour tout x de $\mathscr{D}$, on a :

$$-x \in \mathscr{D} \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Exemples :

- *les fonctions* $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto |x|$ *sont paires sur* $\mathbb{R}$*;*
- *les fonctions* $x \mapsto x^3$ *et* $x \mapsto \dfrac{x^5 + x}{x^2 + 1}$ *sont impaires sur* $\mathbb{R}$*;*
- *la fonction* $x \mapsto x^3 + x^2$ *n'est ni paire ni impaire sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 1 : une partie non vide E de $\mathbb{R}$ est dite centrée à l'origine (ou symétrique par rapport à zéro) si pour tout x de E le nombre $(-x)$ appartient à E.

Remarque 2 : si une fonction est paire, sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Si une fonction est impaire, sa courbe représentative dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à O.

Dans ces deux cas, on peut donc limiter l'étude de la fonction à l'ensemble des réels positifs de son domaine de définition.

5.6.2 Axe de symétrie et centre de symétrie

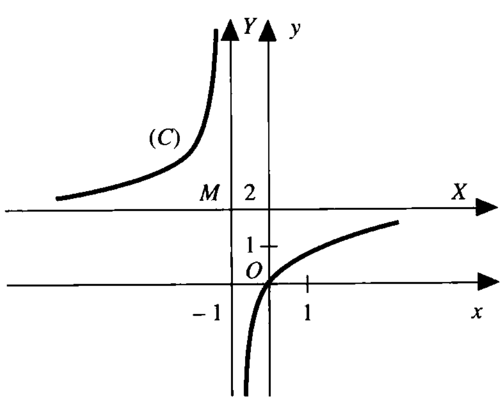
Soit une fonction f définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et soit, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point $M(x_0, y_0)$ et la courbe (C) représentative de f ;

- pour montrer que (C) admet la droite d'équation $x = x_0$ pour axe de symétrie, dans le cas où $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal, il suffit d'écrire l'équation de (C) dans le repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$ et de montrer que cette nouvelle équation définit une fonction paire ;
- pour montrer que (C) admet le point M pour centre de symétrie, dans le cas où $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est quelconque, il suffit d'écrire l'équation de (C) dans le repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$ et de montrer que cette nouvelle équation définit une fonction impaire.

Remarque : on peut, ainsi, établir les résultats suivants pour tout x de $\mathcal{D}$ tel que $(a - x)$ appartient à $\mathcal{D}$:

- $f(a - x) = f(x)$ signifie que (C) admet la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$ pour axe de symétrie ;
- $f(a - x) = b - f(x)$ signifie que (C) admet le point $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ pour centre de symétrie.

Exemple : *en reprenant les notations ci-dessus, si, dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (C) a pour équation $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1}$;*



$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$, *(C) admet le point M(– 1, 2) pour centre de symétrie. En effet, dans* $(M, \vec{i}, \vec{j})$, *(C) a pour équation* $Y = g(X)$ *avec* $x = -1 + X$ *et* $y = 2 + Y$, *donc :*

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y + 2 = f(X - 1)$$

et $$Y = g(X) = f(X-1) - 2 = \frac{2(X-1)}{(X-1)+1} - 2 = \frac{2X - 2 - 2X}{X} = -\frac{2}{X},$$

on a bien $g(-X) = -\dfrac{2}{(-X)} = \dfrac{2}{X} = -g(X)$, *g est une fonction impaire.*

5.7 Fonctions périodiques

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$; on dit que f est périodique si, et seulement si, il existe un nombre réel T non nul tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$:

- d'une part $(x + T) \in \mathcal{D}$ et $(x - T) \in \mathcal{D}$,
- d'une part $f(x + T) = f(x)$.

Le nombre T est une période de f; le plus petit élément positif de l'ensemble des périodes de f est alors appelé la période de f.

Pour étudier une fonction périodique f de période T, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T. En effet, la courbe représentative de f, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est invariante par les translations de vecteur $\lambda T \vec{i}$ où λ est un entier relatif quelconque.

Exemple : *on appelle fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de* $\mathbb{R}$ *la fonction* f_E *définie par :*

$$x \in E \Rightarrow f_E(x) = 1 \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} - E \Rightarrow f_E(x) = 0;$$

il est aisé de vérifier que, si $E = \mathbb{Z}$, *la fonction caractéristique de l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs a pour période 1.*

6 Limite et continuité des fonctions réelles de la variable réelle

6.1 Limite et continuité en un point

6.1.1 Approche intuitive. Définitions. Théorèmes fondamentaux

a) Limite en un point (approche intuitive)

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sauf, peut-être, au point x_0 de I; si «quand x, tout en restant dans I, se rapproche de x_0, $f(x)$ se rapproche du nombre l» on dit que l est la limite de f quand x tend vers x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (ou $f(x) \to l$ quand $x \to x_0$).

Remarque 1 : «x se rapproche de x_0» signifie que «$|x - x_0|$ devient (infiniment) petit»; plus «x est proche de x_0», plus la longueur de l'intervalle $[x, x_0]$ (ou $[x_0, x]$) est petite, «proche de zéro» (tend vers zéro).

Remarque 2 : $x \to x_0$ se lit «x tend vers x_0».

b) Unicité de la limite

Si la limite présentée ci-dessus existe, elle est unique.

c) Continuité en un point

Une fonction f est continue en un point x_0 si, et seulement si, f est définie en x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

6.1.2 Extension des définitions

a) Limite à droite et limite à gauche en un point x_0

Quand x tend vers x_0 :

- si «x se rapproche de x_0» par valeurs décroissantes on note $x \to x_0^+$ (ou $x \to x_0$ avec $x > x_0$) ;
- si «x se rapproche de x_0» par valeurs croissantes on note $x \to x_0^-$ (ou $x \to x_0$ avec $x < x_0$).

Une fonction f peut donc admettre une limite à droite (resp. à gauche) en un point x_0, notée $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ (resp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$).

b) Continuité à droite et continuité à gauche en un point x_0

Une fonction f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si, et seulement si, f est définie en x_0 et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Remarque : une fonction f, définie sur $]x_0 - h, x_0 + h[$ où h est un nombre réel strictement positif, est continue en x_0 si, et seulement si, $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

c) Extension pour l'infini

Bien que $+\infty$ et $-\infty$ ne soient pas des nombres réels, la notion de limite peut être étendue pour l'infini et on trouve des écritures du type :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = l \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

où l'infini peut être affecté du signe + ou du signe – et où $x \to x_0$ peut être remplacé par $x \to x_0^+$ ou par $x \to x_0^-$.

Remarque : les notations $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$, $|x| \to +\infty$ ont la même signification et se lisent «x tend vers plus ou moins l'infini».

6.2 Continuité sur un intervalle

6.2.1 Définitions

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$;

- une fonction f est continue sur $]a, b[$ si, et seulement si, f est continue en tout point de $]a, b[$;
- une fonction f est continue sur $[a, b]$ si, et seulement si, elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

Remarque : intuitivement, f est continue sur un intervalle I si sa courbe représentative sur I n'est interrompue nulle part, si on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille.

6.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$; si une fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'ensemble des éléments $f(x)$, quand x décrit $[a, b]$, est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$; soit $[m, M]$ cet intervalle, on peut démontrer les théorèmes suivants :

si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$ et si $[m, M]$ est le segment image de $[a, b]$ par f, $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur c de $[m, M]$; en particulier,

- si c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un point x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = c$ (théorème des valeurs intermédiaires) ;
- si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, $f(x)$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

Exemple : *soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ (la représentation graphique de f est donnée au paragraphe **8.1.2**) ; la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et les théorèmes précédents sont vérifiés pour tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, en particulier,*

- *pour $a = 0$ et $b = 2$: $m = -1$, $M = 3$ alors,*

$$f([0, 2]) = [-1, 3], \quad [f(0), f(2)] = [1, 3] \subset [-1, 3] ;$$

- *pour $a = 0$ et $b = 1$: $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ sont de signes contraires et $f(x)$ s'annule sur $]0, 1[$.*

6.2.3 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, sauf au point x_0 de $\mathcal{D}$, et telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ où l est un nombre réel ; la fonction g définie par :

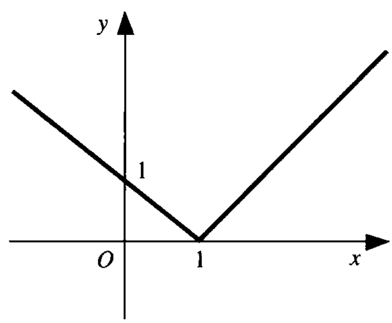
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathcal{D} - \{ x_0 \} \\ \text{et } g(x_0) = l \end{cases}$$

est continue sur $\mathcal{D}$ et est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque : f est prolongeable par continuité en x_0 si, et seulement si, quand $f(x_0)$ n'existe pas $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

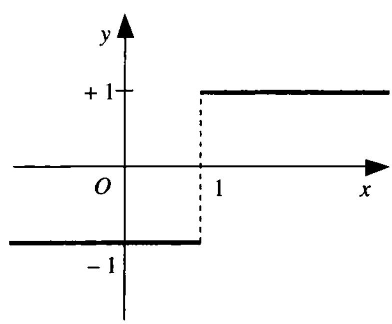
Exemple 1 : *la fonction* $f : x \mapsto |x - 1|$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$ *car,*

- *si* $x > 1$ $f(x) = x - 1$ *(équation d'une droite),*
- *si* $x < 1$ $f(x) = 1 - x$ *(équation d'une droite),*
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$



Exemple 2 : *la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{|x-1|}$ *est définie sur* $\mathbb{R} - \{1\}$, *elle est continue sur* $]1, +\infty[$ *(car si* $x > 1$ *on a* $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$*) et sur* $]-\infty, 1[$ *(car si* $x < 1$ *on a* $f(x) = \dfrac{x-1}{-x+1} = -1$*),*

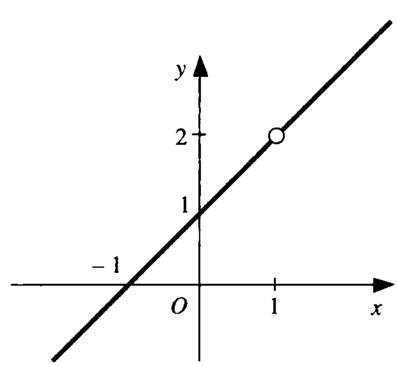
elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$.



Exemple 3 : *la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *est définie sur* $\mathbb{R} - \{1\}$ *; sur ce domaine* $f(x) = x + 1$ *elle est donc continue sur* $]-\infty, 1[$ *et sur* $]1, +\infty[$ *;*

f est prolongeable par continuité en 1 car $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ *;*

la fonction g définie par



$$\begin{cases} g(x) = f(x) \textit{ pour tout } x \textit{ de } \mathbb{R} - \{1\} \\ \textit{et } g(1) = 2 \end{cases}$$

est un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ *de la fonction* f *(la fonction* g *est continue sur* $\mathbb{R}$*, sa courbe représentative est la droite d'équation* $y = x + 1$*).*

6.3 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions et soit a, l et m trois éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; en tenant compte des cinq observations importantes ci-dessous, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ on obtient les résultats suivants :

- $\lim\limits_{x \to a} (mf(x)) = ml \quad \lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = l + m$;
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = lm \quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$;

en observant que :

a) Si $m = 0$ et si $l \neq 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, résultat qu'on peut préciser :

si $m \to 0^+$: quand $l > 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, quand $l < 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$,

si $m \to 0^-$: quand $l > 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, quand $l < 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

b) Si $|m| \to +\infty$ et si $|l| \neq +\infty$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, résultat qu'on peut préciser :

si $m \to +\infty$: quand $l > 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^+$, quand $l < 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^-$,

si $m \to -\infty$: quand $l > 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^-$, quand $l < 0$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^+$.

c) Il existe des formes indéterminées : ce sont des situations où l'on ne peut pas conclure directement à partir des résultats précédents ; ces situations sont présentées dans le tableau suivant :

« si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots$ »	« et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ldots$ »	« pour $x \to a$ ... »	« donne la forme indéterminée... »
$+\infty$	$-\infty$	$f(x) + g(x)$	$(+\infty) + (-\infty)$
0	∞	$f(x) \, . \, g(x)$	$0 \times \infty$
∞	∞	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$
0	0		$\dfrac{0}{0}$

Remarque : le paragraphe **10.5.2** présente les formes indéterminées exponentielles qui peuvent être ramenées à la forme indéterminées $0 \times \infty$.

d) Une fonction peut ne pas avoir de limite en un point (ce cas est différent de celui des formes indéterminées).

Exemples : • *la fonction* $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite quand x tend vers zéro ;*

• *la fonction* $x \mapsto E(x) - x$, *où* $E(x)$ *est la partie entière de x n'admet pas de limite quand x tend vers l'infini.*

e) Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles ont, souvent, des limites faciles à déterminer, ainsi :

- **une fonction polynôme non nulle a le même comportement que son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$;**
- **une fonction rationnelle non nulle a le même comportement que le quotient de ses termes de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$.**

Exemple 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x^4 - 3x^2 + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^4\left(1 - \dfrac{3}{5x^2} + \dfrac{2}{5x^4}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^4 = +\infty$,

en effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{5x^2} + \dfrac{2}{5x^4}\right) = 1$ *(cette démonstration peut être généralisée et utilisée pour n'importe quelle fonction polynôme).*

Exemple 2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Exemple 3 : $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 + x^2 + 2x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

Exemple 4 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{3x^3 + x^2 + 2x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x} = 0$

Exemple 5 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^5 - 3x - 1}{4x^5 + 2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^5}{4x^5} = \dfrac{5}{4}$

Remarque : en posant le changement de variable $x = \frac{1}{X}$, on a $X \to 0$ si $x \to \infty$ ce qui, à partir des résultats précédents, permet de démontrer que :

- une fonction polynôme non nulle a le même comportement que son terme de plus bas degré en zéro ;
- une fonction rationnelle non nulle a le même comportement que le quotient de ses termes de plus bas degré en zéro.

Exemple 6 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$ *(on pouvait simplifier par x puisque* $x \neq 0$*, il venait :* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2}{3x^2 + 2} = 1$*)*

Exemple 7 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{3x} = \infty$, *et on peut préciser*

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 3x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 3x^2} = -\infty$ *(on pouvait aussi écrire*

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^5 - 5x^4 + 2x}{3x^3 + 3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 1\right)}{3x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2}$*)*

6.4 Opérations sur les fonctions continues

Pour étudier les chapitres suivants il suffit de savoir qu'on peut démontrer que :

- si deux fonctions sont continues en un point x_0, leur somme et leur produit sont des fonctions continues en x_0, leur quotient est une fonction continue en x_0 si le dénominateur ne s'annule pas en x_0 ;
- si une fonction f est continue sur un intervalle I et si une fonction g est continue sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

6.5 Bijection. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

(**Nota :** le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **6.5**).

Une fonction f définie sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$ si, et seulement si, pour tout y de $f(I)$ il existe un, et un seul, élément x de I tel que $y = f(x)$;

alors, une fonction f^{-1} définie sur l'intervalle $f(I)$ réalise une bijection de $f(I)$ sur I; f^{-1} est appelée la fonction réciproque de f sur I et on a :

$$\text{pour tout } y \text{ de } f(I) \text{ et pour tout } x \text{ de } I,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Exemple 1 : *la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ (voir **5.6.2**) réalise une bijection de $[1, 3]$ sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$, sa fonction réciproque sur $[1, 3]$ est la fonction f^{-1} telle que*

$f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2-x}$ qui réalise une bijection de $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ sur $[1, 3]$.

Remarque 1 : avec les notations des défintions ci-dessus, on a :

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) \quad = y,$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

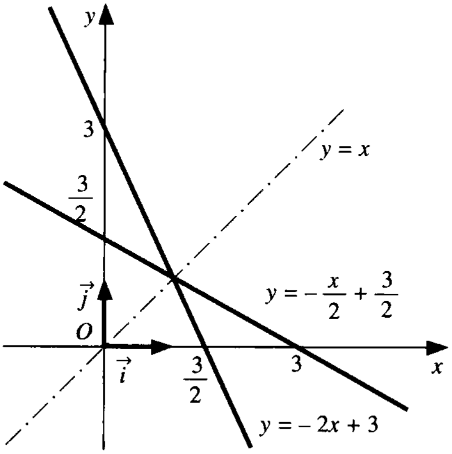
Remarque 2 : si une fonction f est définie, continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $[a, b]$, où $a < b$, elle réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. sur $[f(b), f(a)]$); la fonction f^{-1}, réciproque de f sur $[a, b]$, est définie, continue et strictement croissante (resp. décroissante) et réalise une bijection de $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) sur $[a, b]$.

Remarque 3 : dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$, représentatives des fonctions f et f^{-1} définies à la remarque 2, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ première bissectrice des axes.

Exemple 2 : *la fonction f telle que $f(x) = -2x+3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque sur $\mathbb{R}$ est la fonction f^{-1} telle que*

$f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ *en effet :*

$$y = f(x) = -2x + 3 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -\frac{y}{2} + \frac{3}{2};$$



On vérifie aisément que :

- $(f \circ f^{-1})(y) = y$ *en effet*

  $f(f^{-1}(y)) = -2\left[-\frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right] + 3 = y;$

- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ *en effet*

  $f^{-1}(f(x)) = -\frac{(-2x+3)}{2} + \frac{3}{2} = x.$

- *les fonctions f et f^{-1} sont définies, continues et strictement monotones sur $\mathbb{R}$;*
- *dans un repère orthonormé les droites d'équation $y = -2x + 3$ et $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Remarque 4 : si une fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$: pour tout réel a élément de J, l'équation $f(x) = a$, où x est l'inconnue, admet une solution, et une seule, dans I.

Exemple 3 : *la fonction f telle que $f(x) = x^2$ réalise une bijection de $I = [2, 4]$ sur $J = [4, 16]$; si $a = 9$ ($a \in J$) la solution unique dans I de l'équation $x^2 = 9$ est $x = 3$ (car $3 \in [2, 4]$ et $-3 \notin [2, 4]$).*

6.6 Les fonctions puissance n-ième et racine n-ième

6.6.1 La fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (fonction puissance *n*-ième)

La fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$;

- si n est pair la fonction est paire, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, +\infty[$;
- si n est impair la fonction est impaire, elle réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$;

on peut dresser les tableaux suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair

6.6.2 Les fonctions réciproques de $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (fonction racine *n*-ième)

Dans les intervalles où les fonctions définies au paragraphe **6.6.1** réalisent une bijection, elles définissent une fonction réciproque, on aura ainsi :

- cas où n est pair :

  la fonction f de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^n$ a pour fonction réciproque la fonction f_1^{-1} de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ telle que $f_1^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$;

  la fonction f de $]-\infty, 0]$ dans $[0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^n$ a pour fonction réciproque la fonction f_2^{-1} de $[0, +\infty[$ dans $]-\infty, 0]$ telle que $f_2^{-1}(x) = -\sqrt[n]{x}$;

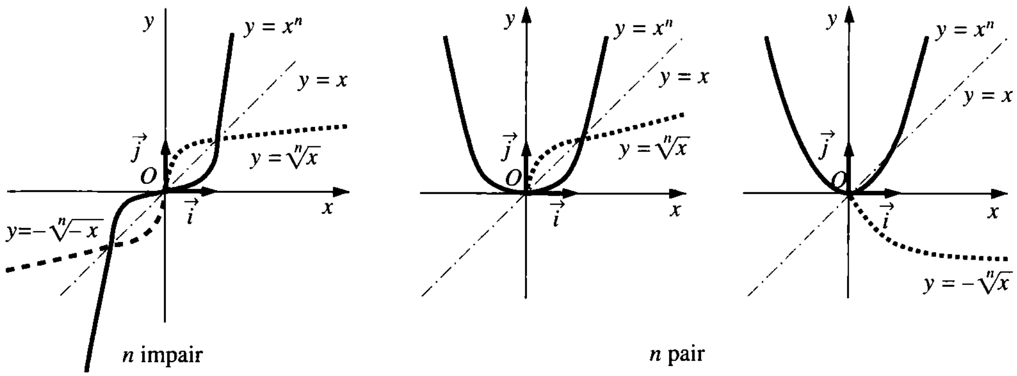
- cas où n est impair :

  la fonction f de $]-\infty, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$ telle que $f(x) = x^n$ a pour fonction réciproque la fonction f^{-1} de $]-\infty, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$ telle que $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ si $x \geqslant 0$ et $f^{-1}(x) = -\sqrt[n]{-x}$ si $x \leqslant 0$.

Remarque : l'écriture $\sqrt[n]{x}$ implique $x \geqslant 0$; cependant, si n est impair et si u est une fonction définie, de nombreux auteurs étudient les fonctions du type $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ même quand $u(x)$ est négatif ; cette pratique s'explique par le fait que la fonction $x \mapsto x^n$, avec n impair, admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; elle consiste alors à poser implicitement la convention $\sqrt[n]{u(x)} = -\sqrt[n]{-u(x)}$ dans le cas où $u(x) < 0$ et n impair.

6.6.3 Représentations graphiques

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on obtient les graphiques suivants :



6.6.4 La fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Q}^*$

On convient de noter si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $q \in \mathbb{N}^* - \{ 1 \}$ (voir **2.5** et **2.6**) :

$$\text{si } x \neq 0 \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p} \text{ et si } x \geqslant 0 \; \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \text{ et donc } \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}.$$

Les règles de calculs appliquées aux exposants entiers positifs sont applicables aux exposants entiers négatifs et aux exposants fractionnaires positifs ou négatifs.

Remarque : la fonction $x \mapsto x^m$ où $m \in \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est étudiée au chapitre 10 (voir **10.4**).

7 Dérivées et primitives

7.1 Dérivée en un point

7.1.1 Définitions

a) Fonction différentiable en un point

(**Nota** : le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **7.1.1, a)**.

La fonction f définie sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset \mathbb{R}$, où $\alpha > 0$, est différentiable en x_0 s'il existe un nombre réel a et une fonction ε définie sur $]-\alpha, +\alpha[- \{0\}$ tels que pour tout h de $]-\alpha, +\alpha[- \{0\}$ on ait :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \qquad (1)$$

Exemple : *la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est différentiable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, en effet :*

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 \text{ où } f(x_0) = x_0^3,\ a = 3x_0^2,\ \varepsilon(h) = 3x_0h + h^2$$

Remarque : si on pose $x = x_0 + h$ la formule (1) devient :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \text{ où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0 \qquad (2)$$

b) Nombre dérivé

Dans les formules (1) et (2), a s'appelle le nombre dérivé de f en x_0, on le note $a = f'(x_0)$, la formule (2) s'écrit alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \text{ où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0 \qquad (3)$$

Cette formule (3) est appelée développement limité d'ordre un de la fonction f au voisinage de x_0.

On démontre aisément à partir des formules précédentes que :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

quand cette limite existe elle est unique (unicité des limites) et on dit que la fonction f est dérivable en x_0.

Remarque 1 : les expressions «f est différentiable en x_0» et «f est dérivable en x_0» sont synonymes.

Remarque 2 : le nombre dérivé en x_0 est, par définition, le taux d'accroissement de la fonction f quand «la variation de x, autour de x_0, est infiniment petite».

Remarque 3 : la fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x_0 de $\mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)}{(x-x_0)} = a,$$

ce nombre dérivé est le taux d'accroissement constant de la fonction affine, c'est le coefficient directeur de sa droite représentative.

Remarque 4 : $f'(x_0)$, nombre dérivé de f en x_0, est aussi appelé dérivée de f en x_0.

c) Fonction affine tangente

La formule (3) définit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ appelée fonction affine tangente à f en x_0.

La courbe représentative de g est évidemment une droite dont l'équation est de la forme $y = ax + b$ avec $y = g(x)$, $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - x_0f'(x_0)$.

Exemple : *soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$; le nombre dérivé de f en 3 est :*

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{3+h}\right)-\frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-3-h}{9+3h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{9h+3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{9h} = -\frac{1}{9}$$

(on pouvait aussi écrire :

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}\Big);$$

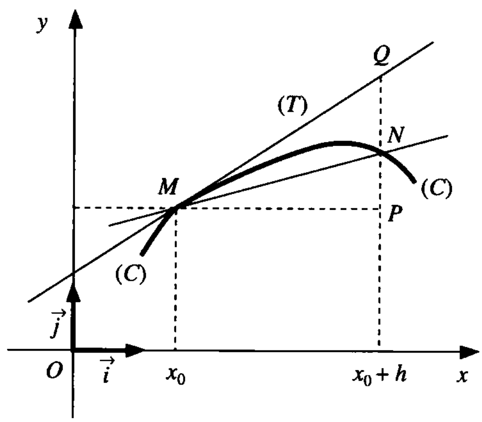
l'équation de la droite (T), tangente au point 3 à la courbe représentative de f est:

$y = f(3) + f'(3)(x - 3)$ c'est-à-dire $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 3)$ ou encore $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$ (on pouvait aussi écrire : la droite (T) a pour coefficient directeur $f'(3) = -\frac{1}{9}$; son équation est donc de la forme $y = -\frac{1}{9}x + b$; or, la droite (T) passe par le point $(3, f(3))$ (c'est-à-dire le point $\left(3, \frac{1}{3}\right)$) donc $\frac{1}{3} = -\frac{1}{9} \times 3 + b$ et $b = \frac{2}{3}$)

7.1.2 Interprétation graphique

Dans la représentation graphique ci-contre : (C) est la courbe représentative d'une fonction f, (T) est sa tangente au point M d'abscisse x_0 et N est le point de (C) d'abscisse $x_0 + h$.

Le coefficient directeur de la droite (MN) est $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.



Si f est dérivable en x_0, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et, quand h tend vers zéro, la droite (MN) a pour limite la droite (T) qui a pour coefficient directeur $f'(x_0)$; cette droite limite est appelée tangente en M à (C).

Remarque : avec les notations du graphique :

$$\text{si } h \to 0 \quad \overline{PN} \to \overline{PQ} \quad \text{et donc} \quad \frac{\overline{PN}}{\overline{MP}} \to \frac{\overline{PQ}}{\overline{MP}}$$

on en conclut que, si h tend vers zéro, le taux d'accroissement de f « autour de x_0 » tend vers le taux d'accroissement de sa fonction affine tangente en x_0.

7.1.3 Extension de la notion de nombre dérivé

(**Nota :** le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **7.1.3**).

En prenant garde aux domaines de définition, on peut étendre la notion de nombre dérivé en définissant des nombres dérivés à droite ou à gauche en x_0 (on parle parfois de demi-dérivées).

a) Nombre dérivé à gauche en x_0

Le nombre dérivé à gauche en x_0 d'une fonction f est, si elle existe, la limite, notée $f'_g(x_0)$ ou $f'(x_0^-)$,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

la courbe représentative de f admet alors une demi-tangente « à gauche de $(x_0, f(x_0))$ » dont le coefficient directeur est $f'_g(x_0)$.

Remarque : si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (ou $-\infty$) on dit que f admet une demi-dérivée infinie à gauche en x_0 et la demi-tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Nombre dérivé à droite en x_0

Le nombre dérivé à droite en x_0 d'une fonction f est, si elle existe, la limite, notée $f'_d(x_0)$ ou $f'(x_0^+)$,

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

la courbe représentative de f admet alors une demi-tangente « à droite de $(x_0, f(x_0))$ » dont le coefficient directeur est $f'_d(x_0)$.

Remarque : si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (ou $-\infty$) on dit que f admet une demi-dérivée infinie à droite en x_0 et la demi-tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.

c) Fonction dérivable en un point et dérivées à droite et à gauche

On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f'_g(x_0) \text{ et } f'_d(x_0) \text{ existent et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)\,;$$

alors, évidemment, $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple : *on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x > 3,$$

$$f(3) = \frac{1}{3},$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{54} + \frac{1}{2} \quad \text{si } x < 3;$$

f est définie sur $\mathbb{R}$ (si $x > 3$ on a bien $x \neq 0$),

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(-\frac{x^2}{54} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3},$$

puisque $f(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, f est continue en 3 (la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$);

$$f'_d(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = -\frac{1}{9},$$

*(voir l'exemple de **7.1.1, c**),*

$$f'_g(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-\frac{x^2}{54} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{-\frac{1}{54}(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \left(-\frac{1}{54}(x + 3)\right) = -\frac{1}{9},$$

donc $f'_g(3) = f'_d(3)$ et la fonction f est dérivable en 3, on a $f'(3) = -\frac{1}{9}$.

7.1.4 Dérivabilité et continuité en un point

Si une fonction f est dérivable en un point x_0, la formule (1) du paragraphe **7.1.1** permet d'écrire $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, donc :

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

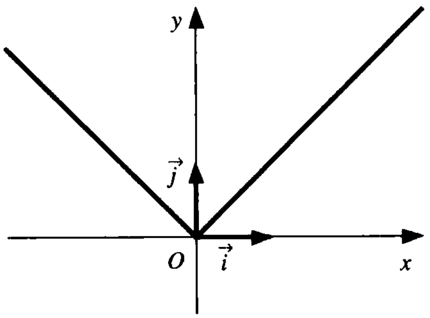
Par contre, une fonction continue en un point n'est pas obligatoirement dérivable en ce point, comme le prouve l'exemple ci-dessous.

Exemple : *la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0, en effet :*

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

donc $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.



7.2 Fonction dérivée

7.2.1 Dérivabilité sur un intervalle

- Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ si elle est dérivable en tous points de $]a, b[$;
- si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $f'_d(a)$ existe, f est dérivable sur $[a, b[$;
- si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $f'_g(b)$ existe, f est dérivable sur $]a, b]$.

7.2.2 Fonction dérivée et dérivées successives

a) Définitions

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, on peut définir une fonction de I dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f'(x)$ pour tout x de I, qui est appelée fonction dérivée de f (ou fonction dérivée première de f) ; on la note f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Si, à son tour, la fonction f' est dérivable sur un intervalle elle admet une dérivée qui, sur cet intervalle, est appelée fonction dérivée seconde de f; on la note f'' ou $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$. De proche en proche (en dérivant n fois si c'est possible) une fonction dérivée n-ième de f peut être définie ; si elle existe, on la note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$

b) Notations

Soit une fonction f, telle que $y = f(x)$, supposée n fois dérivable sur un intervalle I ; on peut rencontrer les notations suivantes :

- images de la dérivée première : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$;
- images de la dérivée seconde : $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y''$;
- images de la dérivée n-ième : $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = \dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = y^{(n)}$.

c) Fonctions de classe C^k

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$; on dit que f est de classe C^k sur $]a, b[$ si f admet des fonctions dérivées successives continues jusqu'à l'ordre k.

Si f est indéfiniment dérivable sur $]a, b[$, elle est dite de classe C^∞ sur $]a, b[$ puisque, f étant indéfiniment dérivable, ses dérivées successives sont toutes continues sur $]a, b[$.

7.2.3 Calculs de dérivées

a) Opérations sur les fonctions dérivables

Soit α un nombre réel et f et g deux fonctions, dérivables sur un intervalle I, de dérivées respectives f' et g' ; on peut démontrer que :

$(\alpha)' = 0$;

sur I : $(f+g)$, (αf), $(f \times g)$ sont dérivables et

$$(f+g)' = f' + g',\ (\alpha f)' = \alpha f',\ (f \times g)' = f' \times g + f \times g' ;$$

sur I et si $0 \notin g(I)$: $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2},\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} ;$$

sur I, si g est dérivable sur $f(I)$: $(g \circ f)$ est dérivable et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

donc, pour x_0 de I on a, en posant $F(x) = g(f(x))$,

$$F'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Remarque : avant de déterminer la dérivée d'une fonction, il faut s'assurer que cette fonction est dérivable.

b) Dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Q}^*$

Les résultats précédents et ceux qui ont été établis au chapitre 6 permettent de démontrer que :

> Sur les intervalles où les fonctions $x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{Q}^*$, sont dérivables, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$.

Remarque 1 : ce résultat sera généralisé pour $n \in \mathbb{R}^*$ dans le chapitre 10 (voir **10.4**).

Remarque 2 : sur les intervalles où les fonctions du type $x \mapsto (u(x))^n$ sont dérivables, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x))^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(u(x))}(u(x))^n \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x).$$

Exemple 1 : *la fonction $f : x \mapsto 7x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 7$.*

Exemple 2 : *la fonction $f : x \mapsto 3x^7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 21x^6$.*

Exemple 3 : *la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (alors qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+$), $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Exemple 4 : *la fonction $f : x \mapsto \sqrt[5]{x^3}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ donc $f'(x) = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.*

Nota : *on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction g telle que $(g(x))^5 = x^3$ alors, en dérivant par rapport à x, on obtient : $5(g(x))^4 g'(x) = 3x^2$ d'où on tire, si $g(x) \neq 0$, $g'(x) = \dfrac{3x^2}{5(g(x))^4}$ et comme, pour $x \geqslant 0$, $(\sqrt[5]{x^3})^4 = \sqrt[5]{x^{12}} = \sqrt[5]{x^{10}.x^2} = x^2\sqrt[5]{x^2}$, on retrouve $g'(x) = f'(x)$ si $x > 0$; par ailleurs, on peut définir sur $\mathbb{R}_-$ la fonction h telle que $h(x) = -\sqrt[5]{-x^3}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, on a $h(x) = -\left((-x)^{\frac{3}{5}}\right)$ donc $h'(x) = +\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.*

Exemple 5 : *soit la fonction f telle que $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 12x + 4)^2$; la fonction u telle que $u(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2 - 6x + 12$; $f(x) = (u(x))^2$, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2(u(x)) \cdot u'(x) = 2(x^3 - 3x^2 + 12x + 4)(3x^2 - 6x + 12)$.*

Exemple 6 : *la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$; on a $f(x) = x^{-n}$ donc $f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$. (On pouvait aussi écrire : soit la fonction $u : x \mapsto x^n$, $f = \frac{1}{u}$ donc $f' = -\frac{u'}{u^2}$, comme $u'(x) = nx^{n-1}$, on obtient $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$).*

Exemple 7 : *soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3}$; les fonctions $u : x \mapsto x^2 + 1$ et $v : x \mapsto x^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3x^2$; $v(x) = 0$ pour $x = 0$ seulement donc la fonction $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$; on a $f' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ et on obtient en définitive*

$$f'(x) = \frac{(x^3)(2x) - (x^2+1)(3x^2)}{x^6} = -\frac{x^2+3}{x^4}.$$

7.2.4 Dérivée à droite ou à gauche et fonction dérivée

(**Nota** : le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **7.2.4**).

On peut démontrer que si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$ (resp. $[a, b[$) telle que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = l$ (resp. $\lim_{x \to b^-} f'(x) = l$) alors, $f'_d(a)$ existe et $f'_d(a) = l$ (resp. $f'_g(b)$ existe et $f'_g(b) = l$).

Exemple : *la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 3$, $f(3) = \frac{1}{3}$, $f(x) = -\frac{x^2}{54} + \frac{1}{2}$ si $x < 3$, est dérivable pour $x = 3$ et $f'(3) = -\frac{1}{9}$ (voir **7.1.3**); f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f'(3)$ existe, elle est dérivable sur $]3, +\infty[$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; elle est dérivable sur $]-\infty, 3[$ alors $f'(x) = -\frac{x}{27}$; on a bien :*

$$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{9} \quad et \quad \lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(-\frac{x}{27}\right) = -\frac{1}{9}.$$

Remarque 1 : si dans les mêmes conditions, $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 2 : si on suppose, de plus, que f' est continue sur $]a, b]$, on peut prolonger f' à $[a, b]$ en posant $f'(a) = l$ et on obtient une fonction f' continue sur $[a, b]$.

Remarque 3 : la réciproque du théorème n'est pas vraie : une fonction g', dérivée d'une fonction g, peut ne pas avoir de limite en un point x_0 alors que $g'(x_0)$ existe.

7.3 Primitives

7.3.1 Définitions et notations

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$; la fonction F est une primitive de f si :

d'une part F est définie et dérivable sur I,

d'une part $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Remarque 1 : si f est définie sur le segment $[a, b]$, F est une primitive de f sur $[a, b]$ si : F est une primitive de f sur $]a, b[$, $F_d'(a) = f(a)$ et $F_g'(b) = f(b)$.

Remarque 2 : si F est une primitive de f sur un intervalle I, l'ensemble des primitives de f sur I est la famille des fonctions $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$; on dit que la primitive d'une fonction, si elle existe, n'est définie « qu'à une constante près » ; on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x) + c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x).$$

Exemple : *les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 + 3$, $x \mapsto x^2 - 5$ sont des primitives de la fonction $x \mapsto 2x$, sur $\mathbb{R}$ car elles sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et car leur dérivée, définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction $x \mapsto 2x$.*

Remarque 3 : on note $x \mapsto \int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de f (voir chapitre 12); on lit « somme de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ; on parle indifféremment de « primitive » ou « d'intégrale indéfinie ».

7.3.2 Propriétés

a) Primitives d'une fonction continue

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Il s'agit là d'une condition suffisante mais non nécessaire : il se peut qu'une fonction non continue sur un intervalle I admette des primitives sur I.

b) Propriétés déduites des propriétés de la dérivation

Soit un intervalle I; si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I, on obtient, sur I, les résultats suivants où $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$:

- $\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + c$ avec $I \subset \mathbb{R}$;
- $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + G(x) + c$ avec $I \subset \mathbb{R}$;
- $\int a\,\mathrm{d}x = a\int \mathrm{d}x = ax + c$ avec $I \subset \mathbb{R}$;
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (pour $n \neq -1$) avec $I \subset \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}_-^* - \{-1\}$, $I \subset \mathbb{R}_+^*$ si $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$;
- $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$ avec $I \subset \mathbb{R}^*$.

Remarque : la compréhension des résultats précédents nécessite l'étude du chapitre 10 et le chapitre 12 présente le calcul intégral.

Exemple 1 : *sur* $\mathbb{R}$, $\int x^4\,dx = \dfrac{x^5}{5} + c.$

Exemple 2 : *sur tout intervalle de* $\mathbb{R}^*$, $\int \dfrac{dx}{x^4} = \int x^{-4}\,dx = \dfrac{x^{-3}}{-3} + c = -\dfrac{1}{3x^3} + c.$

Exemple 3 : *sur* $\mathbb{R}$,
$$\int (3x^2 + 4x - 3)\,dx = 3\int x^2 dx + 4\int x\,dx - 3\int dx$$
$$= 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x + c = x^3 + 2x^2 - 3x + c.$$

Exemple 4 : *sur* $\mathbb{R}$, $\int \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = \int \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,dx = \sqrt{u(x)} + c = \sqrt{1 + x^2} + c$

avec $u(x) = 1 + x^2$ *et* $u'(x) = 2x$.

Exemple 5 : *sur* $]-1, +1[$,
$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = -\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\,dx = -\sqrt{u(x)} + c = -\sqrt{1 - x^2} + c$$
avec $u(x) = 1 - x^2$ *et* $u'(x) = -2x$.

8 Étude locale d'une fonction

8.1 Points où la dérivée première existe

8.1.1 Tangente en un point. Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, (C) sa courbe représentative sur I, (T) la droite tangente à (C) au point x_0 de I ;

l'équation de (T) est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (voir **7.1**),

- quand $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - y] = 0^+$ (C) est au-dessus de (T) pour $x \to x_0$;
- quand $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - y] = 0^-$ (C) est au-dessous de (T) pour $x \to x_0$.

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de (T), on peut donc démontrer que :

- $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f$ croissante sur I ;
- $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f$ décroissante sur I ;
- $f'(x) = 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow f$ constante sur I.

Exemple : *on considère la fonction f telle que :*

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ *quand* $x < 0$, $f(x) = -1$ *quand* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = x^3 - 12x + 10$ *quand* $x > 1$;

f est définie sur $\mathbb{R}$ *(si* $x < 0$ *on a* $x \neq 1$*) ;*

f est continue sur $\mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 12x + 10) = -1\right)$,

- *quand $x < 0$ $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$;*
- *quand $0 \leqslant x \leqslant 1$ $f(x) = -1$ donc f est constante sur $[0, 1]$ (on a $f'(x) = 0$);*
- *quand $x > 1$ $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$,*

  si $1 < x < 2$ $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur $]1, 2[$,

  si $x > 2$ $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$,

  si $x = 2$ $f'(2) = 0$, la tangente à la courbe représentative de f, au point 2, est parallèle à l'axe des abscisses et, d'après les variations de f, le point $(2, f(2))$ est un minimum.

8.1.2 Convexité, concavité, points d'inflexion

(**Nota** : le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu appronfondie de ce paragraphe **8.1.2**).

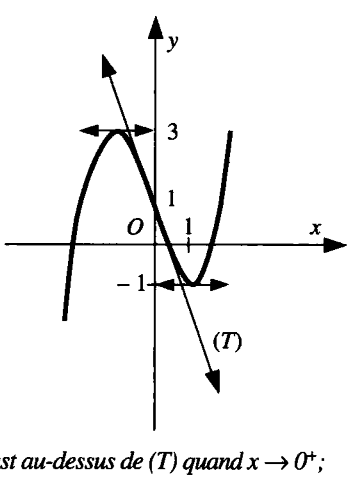
Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I, et si (C) est sa courbe représentative sur I, on peut démontrer que :

- $f''(x) > 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow$ (C) est au-dessus de ses tangentes sur I (f' croissante sur I), on dit que f est convexe sur I;
- $f''(x) < 0$ pour tout x de $I \Leftrightarrow$ (C) est au-dessous de ses tangentes sur I (f' décroissante sur I), on dit que f est concave sur I;
- si donc $f''(x_0) = 0$, avec $x_0 \in I$, et si, en même temps, $f''(x)$ change de signe pour $x = x_0$, (C) admet un point d'inflexion en x_0 ((C) traverse sa tangente en x_0).

Exemple 1 : *soit la fonction*

$$f : x \mapsto x^3 - 3x + 1;$$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$; la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ et $f(0) = 1$: le point $(0, 1)$ est un point d'inflexion; le coefficient directeur de la tangente (T) en ce point $(0, 1)$ est $f'(0) = -3$; (T) a une équation de la forme $y = -3x + b$ et passe par le point $(0, 1)$ donc $1 = b$; l'équation de (T) est $y = -3x + 1$;



$$[f(x) - y] = (x^3 - 3x + 1) - (-3x + 1) = x^3;$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} [f(x) - y] = 0^+$, la courbe représentative de f est au-dessus de (T) quand $x \to 0^+$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} [f(x) - y] = 0^-$, la courbe représentative de f est au-dessous de (T) quand $x \to 0^-$; si $x > 0$ $f''(x) > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$, et si $x < 0$ $f''(x) < 0$ donc f est concave sur $\mathbb{R}_-$.

Remarques :

- si f'' existe sur I et s'annule en changeant de signe en $x_0 \in I$, x_0 est un point d'inflexion ; si x_0 est un point d'inflexion et si, en même temps, $f''(x_0)$ existe, alors f'' s'annule en changeant de signe en x_0 ;
- il y a des points d'inflexion alors que f'' n'existe pas (voir **8.2.1**) ;
- si $f''(x_0) = 0$ et si f'' ne change pas de signe en x_0, le point x_0 n'est pas un point d'inflexion.

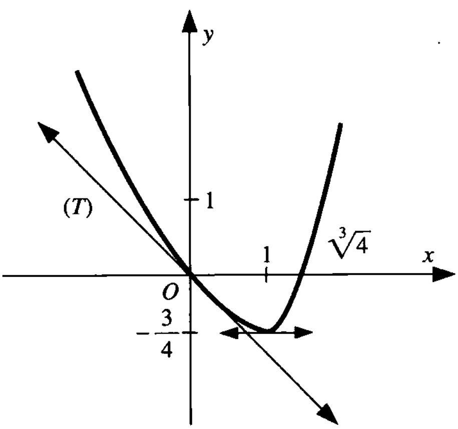
Exemple 2 : *soit la fonction*

$$f : x \mapsto \frac{x^4}{4} - x ;$$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$;

$f'(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f''(x) = 3x^2$; la dérivée seconde de f s'annule sans changer de signe pour $x = 0$ et $f(0) = 0$: le point (0, 0) n'est pas un point d'inflexion ; le coefficient directeur de la tangente (T) en ce point (0, 0) est $f'(0) = -1$; (T) passe par le point (0, 0), son équation est donc $y = -x$;

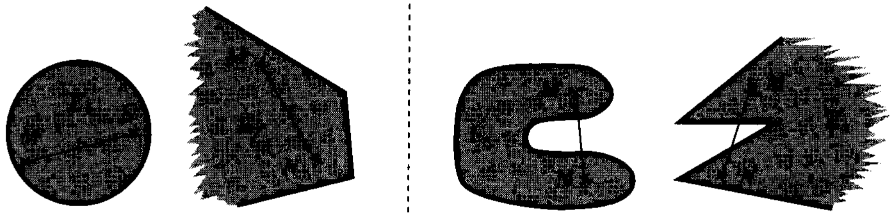


$$[f(x) - y] = \frac{x^4}{4} ; \quad \lim_{x \to 0} [f(x) - y] = 0^+,$$

la courbe représentative de f est au-dessus de (T) quand $x \to 0$; pour tout x de $\mathbb{R}$ $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Remarque générale : les programmes des classes du secondaire ne prévoient pas l'approfondissement de la convexité, de la concavité et des points d'inflexion. Ces notions sont importantes pour l'économiste. Le lecteur curieux trouvera ci-dessous quelques précisions :

- Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (E est une région du plan) ; E est dit convexe si, quels que soient les points M et N de E, tous les points du segment $[MN]$ appartiennent à E ; les schémas suivants représentent les ensembles convexes E_1 et E_2 et les ensembles non convexes E_3 et E_4 :



ensembles convexes ensembles non convexes

- Une fonction f définie sur un intervalle I est dite convexe (resp. concave) sur I si l'ensemble $\{ (x, y) \mid y \geqslant f(x), x \in I \}$ des points qui se trouvent au-dessus de son graphe (resp. $\{ (x, y) \mid y \leqslant f(x), x \in I \}$ des points qui se trouvent au-dessous de son graphe) est convexe (voir les exemples 1 et 2 du paragraphe).
- Une fonction f est convexe sur un intervalle I si, et seulement si, la fonction $(- f)$ est concave sur I.
- Une fonction f peut être convexe, ou concave, sur un intervalle I sans être dérivable sur I.

Exemple 3 : *la fonction $x \mapsto |x|$ (voir paragraphe 7.1.4) est convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.*

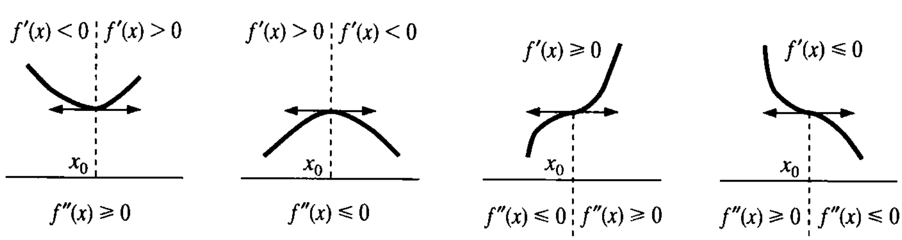
8.1.3 Points où la dérivée première s'annule

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I : si x_0 est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Il est utile d'accompagner ce théorème des quatre commentaires suivants :

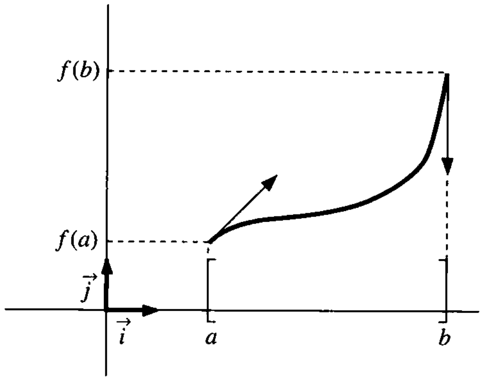
Commentaire 1 : $f'(x_0) = 0$ signifie seulement que x_0 est un point stationnaire, c'est-à-dire que la tangente à la courbe représentative de f en x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Quand $f'(x_0) = 0$, quatre cas peuvent se présenter :



Commentaire 2 : pour qu'il y ait extremum, si f est dérivable, il faut que f' s'annule en changeant de signe (f' s'annule alors que f'' garde un signe constant).

Commentaire 3 : I doit être ouvert ; sur un intervalle fermé une fonction peut admettre un extremum en une extrémité x_0 de cet intervalle alors que $f'(x_0) \neq 0$; ainsi dans le graphique ci-contre : $(a,\ f(a))$ est un minimum or $f'_d(a) = 1$ et $(b, f(b))$ est un maximum ; or, $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = +\infty$.



Commentaire 4 : la réciproque du théorème n'est pas vraie : une fonction peut avoir un extremum en un point où la dérivée n'existe pas (voir **8.2.2** le cas des points anguleux et des points de rebroussement).

8.2 Points où la dérivée première n'existe pas

(**Nota :** le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **8.2**).

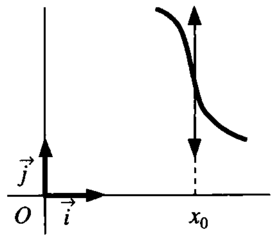
Dans tout le paragraphe **8.2**, on considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I, dérivable sur I sauf en x_0, point de I, et (C) la courbe représentative de f sur I dans un repère cartésien.

8.2.1 Points d'inflexion à tangente parallèle à l'axe des ordonnées

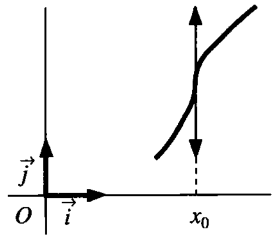
La courbe (C) traverse sa tangente en x_0 et le coefficient directeur des tangentes tend vers l'infini quand x tend vers x_0.

On est en présence de l'un des deux cas suivants :

- soit $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$
  alors f est décroissante quand $x \to x_0$ ($f'(x) < 0$) ;



- soit $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$
  alors f est croissante quand $x \to x_0$ ($f'(x) > 0$).



Remarque : $f''(x_0) = 0$ n'est donc pas une condition nécessaire pour que x_0 soit l'abscisse d'un point d'inflexion.

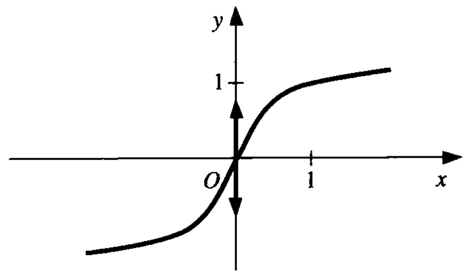
Exemple *: la fonction f telle que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = -\sqrt[3]{-x}$ pour $x \leqslant 0$ (voir **6.6.2**) est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$; le point (0, 0) est un point d'inflexion à tangente parallèle à l'axe des ordonnées, en effet :*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

et, comme f est impaire sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty.$$



Nota : *pour $x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ donc, d'après le paragraphe **7.2.4** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.*

8.2.2 Points anguleux et points de rebroussement

La courbe (C) n'admet pas une tangente au point d'abscisse x_0 mais une demi-tangente à droite en x_0 et une demi-tangente à gauche en x_0 ; ces demi-tangentes n'ont pas le même coefficient directeur, elles forment donc un angle (cet angle est nul dans le cas des points de rebroussement).

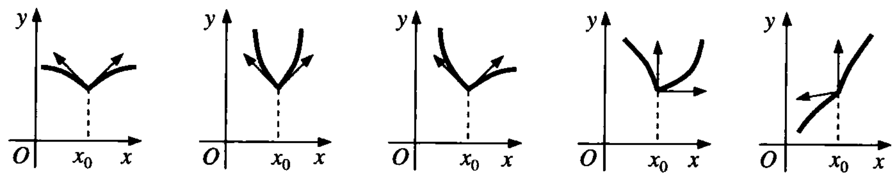
On est en présence des résultats suivants :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \beta$$

où α et β sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $\alpha \neq \beta$.

a) Points anguleux

α et β ne sont pas simultanément infinis; les graphiques ci-dessous présentent quelques cas de ce type :



Exemple : *la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 1|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$; le point (1, 0) est un point anguleux, en effet :*

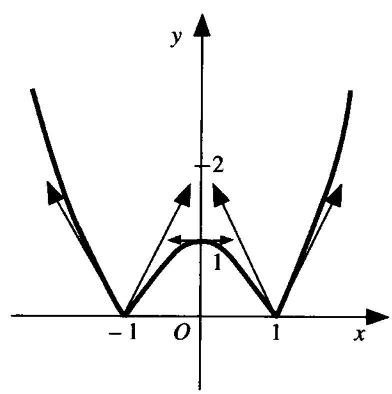
- *pour $x \in]-1, +1[$ $\quad f(x) = 1 - x^2$ et*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (-(1 + x)) = -2;$$

- *pour $x \in]1, +\infty[$ $\quad f(x) = x^2 - 1$ et*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = +2;$$

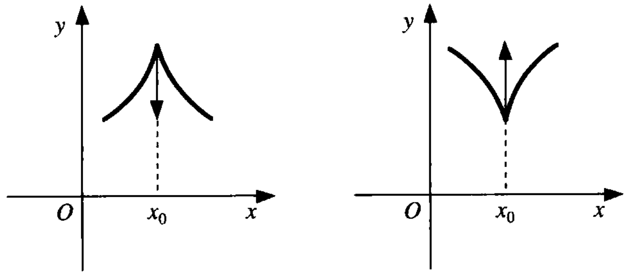
par ailleurs, f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, le point (– 1, 0) est donc aussi un point anguleux.



b) Points de rebroussement

On est en présence de l'un des cas suivants :

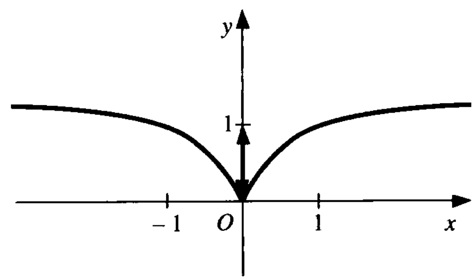
- soit $\alpha = +\infty$ avec $\beta = -\infty$, alors f est décroissante à droite en x_0 et croissante à gauche en x_0;
- soit $\alpha = -\infty$ avec $\beta = +\infty$, alors f est décroissante à gauche en x_0 et croissante à droite en x_0.



Exemple : la fonction $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$; le point (0, 0) est un point de rebroussement, en effet : pour $x \in]0, +\infty[$ $f(x) = \sqrt{x}$ et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty;$$



f est une fonction paire donc

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= -\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty.$$

Nota : *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty;$

pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty.$

Remarque : $f'(x_0)$ n'est donc pas une condition nécessaire pour que x_0 soit l'abscisse d'un extremum local.

Remarque générale : l'étude de f aux extrémités de l'intervalle I ne doit pas être négligée; les résultats des paragraphes **8.1** et **8.2** peuvent être étendus à ces points par des adaptations simples.

8.3 Branches infinies

Dans tout le paragraphe **8.3**, on considère une fonction f et sa courbe représentative (C) dans un repère cartésien.

Pour construire (C), il faut repérer les points du plan en correspondance avec les couples $(x, f(x))$; quand x tend vers l'infini, ou quand $f(x)$ tend vers l'infini, il est impossible de tracer (C) point par point : on est en présence de branches infinies. Trois grands types de cas sont alors possibles. Pour chacun d'entre eux, les limites ci-dessous peuvent être différenciées suivant le signe de l'infini.

8.3.1 Cas où $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ avec $a \in \mathbb{R}$

La droite d'équation $x = a$, parallèle à l'axe des ordonnées, est asymptote à la courbe (C).

Remarque : le résultat est identique pour $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ et pour $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$.

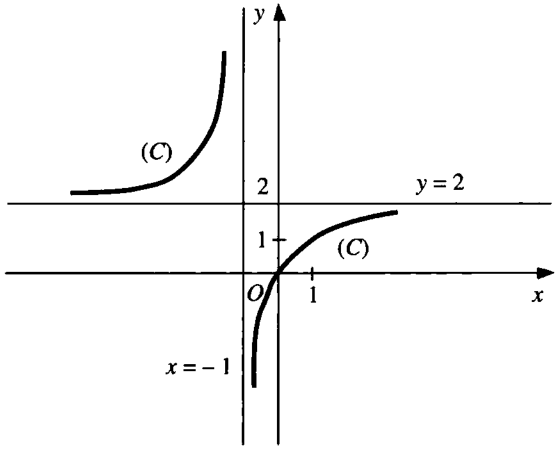
Exemple : *voir l'exemple du paragraphe 8.3.2.*

8.3.2 Cas où $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

La droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, est asymptote à la courbe (C).

Exemple : *la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$ *est définie et continue sur tout* $I \subset \mathbb{R} - \{-1\}$, *sa courbe représentative (C) admet pour asymptotes :*

- *la droite d'équation* $x = -1$ *car* $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$;
- *la droite d'équation* $y = 2$ *car* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$;



Nota : il est possible d'obtenir des précisions supplémentaires :

d'une part, puisque pour $x \to -1$ on a $2x \to -2$,

quand $x \to -1^+$ $(x+1) \to 0^+$ et $f(x) \to -\infty$,

quand $x \to -1^-$ $(x+1) \to 0^-$ et $f(x) \to +\infty$;

d'autre part, puisque $\dfrac{2x}{x+1} = 2 - \dfrac{2}{x+1}$,

quand $x \to +\infty$ $\dfrac{-2}{x+1} \to 0^-$ donc $f(x) \to 2^-$ et (C) est au-dessous de son asymptote,

quand $x \to -\infty$ $\dfrac{-2}{x+1} \to 0^+$ donc $f(x) \to 2^+$ et (C) est au-dessus de son asymptote.

8.3.3 Cas où $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Trois cas peuvent alors se présenter :

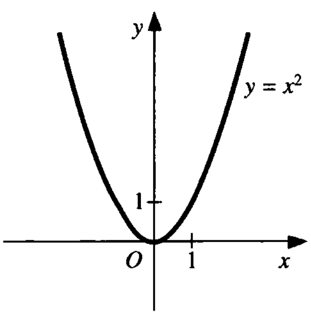
a) Soit $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$

Dans ce cas, la courbe (*C*) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées (c'est-à-dire de la droite d'équation $x = 0$).

Exemple : *la fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$;*

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x = \infty.$$



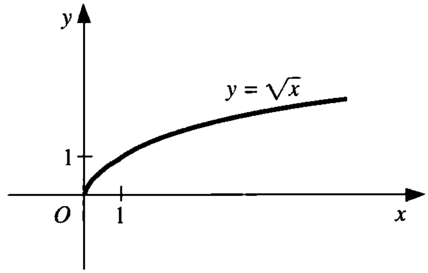
b) Soit $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Dans ce cas, la courbe (*C*) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses (c'est-à-dire de la droite d'équation $y = 0$).

Exemple : *la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$ *;*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$



c) Soit $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ **avec** $a \in \mathbb{R}$

Dans ce cas il y a deux possibilités :

- si $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \infty$,

  la courbe (C) admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.

Remarque : le cas présenté au paragraphe **8.3.3, b** n'est qu'un cas particulier de cette première possibilité.

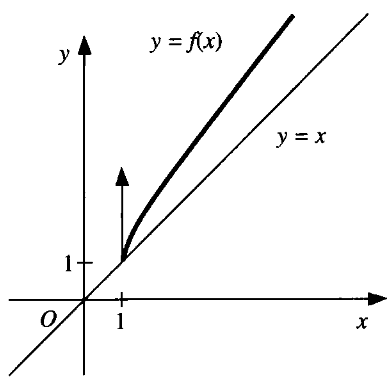
Exemple 1 : *la fonction* $f : x \mapsto x + \sqrt{x-1}$ *est définie et continue sur* $[1, +\infty[$ *:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{\sqrt{x-1}}{x}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x-1}}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty;$$

la courbe représentative de f *admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation* $y = x$.



- si $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$, avec $b \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$,

  la courbe (C) admet une droite asymptote d'équation $y = ax + b$ et,

  quand $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0^+$ la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote,

  quand $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0^-$ la courbe (C) est au-dessous de l'asymptote.

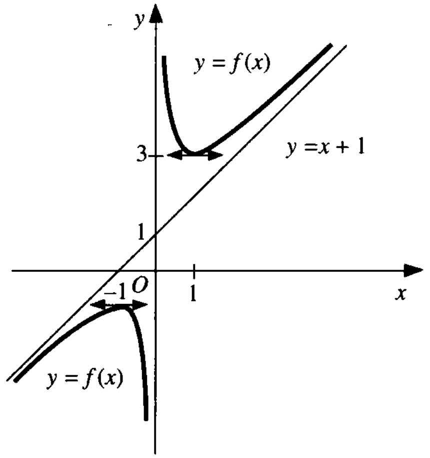
Exemple 2 : *la fonction* $f : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$,

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

la droite d'équation $y = x + 1$ est donc asymptote à la courbe représentative de f quand x tend vers l'infini ;

quand $x \to +\infty$ $\frac{1}{x} \to 0^+$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote,

quand $x \to -\infty$ $\frac{1}{x} \to 0^-$ donc la courbe est au-dessous de l'asymptote.



8.3.4 Remarques à propos des définitions des asymptotes et des branches paraboliques

Remarque 1 : de manière plus générale, si f et g sont deux fonctions (définies quand x tend vers l'infini) telles que $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$, les courbes représentatives de f et de g, dans le même repère cartésien, sont des courbes asymptotes l'une de l'autre quand x tend vers l'infini. Cela signifie que les courbes représentatives de f et de g « se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre, sans jamais se toucher, quand x tend vers l'infini ».

Remarque 2 : dans le cas des branches paraboliques, il est possible de trouver des courbes asymptotes. Ainsi, par exemple, si $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax^2 + bx + c)) = 0$ la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (parabole) est asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ et on est en présence d'une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées quand x tend vers l'infini.

Remarque 3 :

• Si une courbe admet une droite pour asymptote cela signifie que la courbe « se met à ressembler à cette droite en s'en rapprochant de plus en plus, mais de moins en moins vite ».

• Si une courbe admet une branche parabolique dans la direction d'une droite cela signifie que la courbe « se met à ressembler à cette droite en s'en éloignant de plus en plus, mais de moins en moins vite ».

9 Étude d'une fonction

9.1 Plan d'étude d'une fonction

Soit f une fonction réelle de la variable réelle x et (C) sa courbe représentative dans un repère cartésien ; l'étude de f nécessite les cinq étapes suivantes :

9.1.1 Domaine

Trouver le domaine de définition, noté souvent $\mathcal{D}f$, de f, c'est-à-dire éliminer de l'ensemble des réels les éléments qui n'ont pas d'image par f.

Chercher les intervalles où f est continue. Étudier les points de discontinuité et trouver d'éventuels prolongements par continuité.

Préciser le domaine d'étude s'il n'est pas nécessaire d'étudier f sur l'ensemble $\mathcal{D}f$: parités éventuelles, symétries apparentes, périodicité.

9.1.2 Dérivée

Déterminer les intervalles de dérivabilité de f et, sur ces intervalles, calculer $f'(x)$; éventuellement, étudier la dérivabilité des prolongements par continuité. Il faut alors :

- étudier le signe de f' et en déduire les variations de f ;
- étudier les points stationnaires où $f'(x) = 0$ (maximums, minimums, points d'inflexion stationnaires) ;
- étudier les points où f existe mais où f' n'existe pas et trouver la position des tangentes ou des demi-tangentes en ces points.

9.1.3 Bornes et limites

Chercher les valeurs de $f(x)$, ou ses limites, aux bornes des intervalles d'étude (cette recherche a pu être commencée lors des étapes précédentes) :

- préciser la position des demi-tangentes aux bornes quand ces demi-tangentes existent ;
- étudier les branches infinies : asymptotes et branches paraboliques. Éventuellement, il faut trouver l'équation cartésienne de la courbe asymptote et la position de (C) par rapport à cette asymptote ; cette recherche est obligatoire si la courbe asymptote est une droite.

9.1.4 Tableau de variations

Rassembler les résultats trouvés dans un tableau.

9.1.5 Représentation graphique

Tracer (C) dans un repère cartésien. Préciser les unités choisies sur chacun des axes. Utiliser les symétries et les translations éventuelles.

9.1.6 Compléments à l'étude

Si les cinq étapes précédentes ne permettent pas d'obtenir une assez bonne précision pour construire (C), il peut être nécessaire de compléter l'étude par les recherches suivantes :

- calcul de la dérivée seconde pour préciser la convexité, la concavité, les points d'inflexion ;
- calcul des coordonnées de certains points remarquables et étude éventuelle des tangentes, ou demi-tangentes, en ces points : points d'inflexion, points d'intersection de (C) avec les axes du repère ou avec les courbes asymptotes éventuelles, points quelconques, etc.

9.2 EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

9.2.1 Étude de la fonction $f : x \mapsto x^3 - |x|$

- Somme de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$:

– si $x < 0$, $|x| = -x$, $f(x) = x^3 + x$,

$f'(x) = 3x^2 + 1$ donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$,

$f''(x) = 6x$ donc $f''(x) < 0$ et f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$;

– si $x > 0$, $|x| = +x$, $f(x) = x^3 - x$,

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f'(x)$ a le même signe que $3x^2 - 1$ qui s'annule en changeant de signe pour $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = +\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ donc :

sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ $f'(x) > 0$ et f est croissante,

sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$ $f'(x) < 0$ et f est décroissante,

$f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, le point $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est un extremum, d'après les variations de f c'est un minimum local : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0{,}38$,

$f''(x) = 6x$ donc $f''(x) > 0$ et f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$;

– si $x = 0$ $f(0) = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1,$$

(C) admet une demi-tangente de coefficient directeur 1 à gauche en 0 (quand $(x, f(x))$ tend vers $(0, 0)$ avec $x < 0$),

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1,$$

(C) admet une demi-tangente de coefficient directeur -1 à droite en 0 (quand $(x, f(x))$ tend vers $(0, 0)$ avec $x > 0$).

Remarque 1 : il était possible d'écrire (voir **7.2.4**) :

f est continue sur $\mathbb{R}$, puisque f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x^2 - 1) = -1$ on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$, de même, puisque f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et que $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x^2 + 1) = +1$ on a $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +1$.

Remarque 2 : on vérifie que f n'est pas dérivable en zéro puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

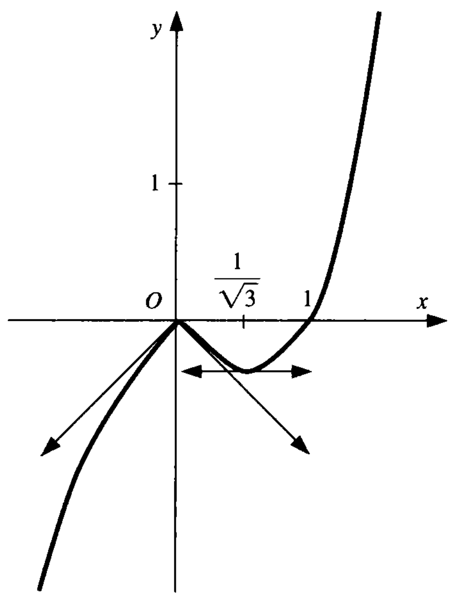
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$,

  $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc :

  la courbe (C) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées pour x infini.

- Quelques valeurs : $f(1) = 0$, $f(2) = 6$, $f(-1) = -2$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+1 \parallel -1$	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\parallel$		$+$		



9.2.2 Étude de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$

- Il faut $1 - x^2 \geqslant 0$ donc $x \in [-1, +1]$, produit de fonctions définies et continues f sera alors définie et continue sur $[-1, +1]$.

  $f(-x) = -x\sqrt{1 - x^2} = -f(x)$ donc f est une fonction impaire sur $[-1, +1]$, sa courbe représentative (C), dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport à l'origine des axes : on étudie f sur $[0, 1]$.

- f est dérivable sur $]-1, +1[$ (il faut $1 - x^2 > 0$) et

$$f'(x) = x \,.\, \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{-x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$f'(x)$ a le signe de $1 - 2x^2 = (1 - \sqrt{2}\,x)\,(1 + \sqrt{2}\,x)$ qui s'annule en changeant de signe pour $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$ $f'(x) > 0$ alors f est croissante,

sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ $f'(x) < 0$ alors f est décroissante,

$f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, le point $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ est un extremum ; d'après les variations de f c'est un maximum :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

- f' n'existe pas en 1 mais f existe en 1 : $f(1) = 0$ et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\sqrt{(1+x)\,(1-x)}}{-(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = -\infty,$$

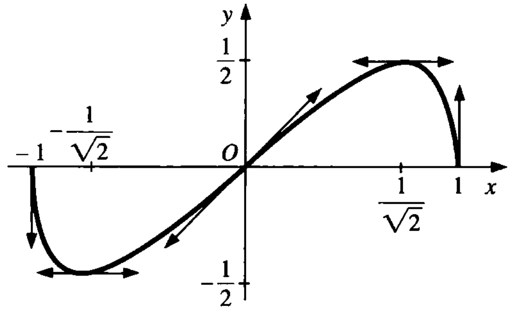
la courbe (C) admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées à gauche en 1.

Remarque 1 : on aurait pu aussi écrire que, puisque f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $[0, 1[$ et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$.

- $f(0) = 0$; le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion puisqu'il est le centre de symétrie d'une fonction continue et dérivable en zéro ; le coefficient angulaire de la tangente à (C) au point $(0, 0)$ est $f'(0) = 1$.

Remarque 2 : sur $]-1, +1[$ le calcul de la dérivée seconde donnerait $f''(x) = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ qui ne s'annule en changeant de signe que pour $x = 0$ (point d'inflexion).

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



On trace d'abord (C) sur $[0, 1]$ puis on obtient (C) sur $[-1, 0]$ à l'aide de la symétrie par rapport au point $(0, 0)$.

9.2.3 Étude de la fonction f telle que : $f(x) = x^3 - |x|$ pour $x < 0$, $f(0) = 0$, et $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ pour $x > 0$

La fonction f est définie sur $]-\infty, 1]$:

- sur $]-\infty, 0[$ l'étude de f a été effectuée au paragraphe **9.2.1** ;
- sur $]0, 1]$ l'étude de f a été effectuée au paragraphe **9.2.2** ;
- il reste à étudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 - |x| = 0 = f(0)$ donc f est continue à gauche en 0,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\sqrt{1-x^2} = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0,

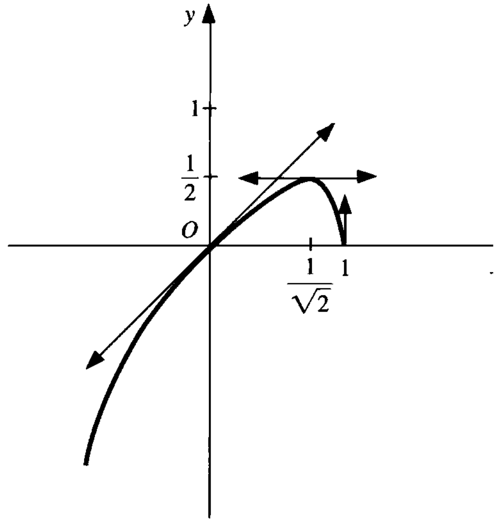
$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ donc f est continue en 0, et, en définitive f est continue sur $]-\infty, 1]$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3-|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x} = 1$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1-x^2} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$,

$f'_g(0) = f'_d(0) = 1$ donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et, en définitive, f est dérivable sur $]-\infty, 1]$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



9.2.4 Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$

Nota : pour tracer la courbe (C) représentative de f, on utilisera un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où les unités de longueur seront différentes sur l'axe des abscisses et des ordonnées dans le rapport 2 (par exemple si $\|\vec{i}\| = 1$ cm alors $\|\vec{j}\| = \frac{1}{2}$ cm).

- Il faut $x - 2 \neq 0$; f est définie sur $\mathbb{R} - \{ 2 \}$, quotient de deux fonctions polynômes f est continue et dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{ 2 \}$.

- $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(3(x-1)^2) - (x-1)^3(2(x-2))}{(x-2)^4} = \dfrac{(x-1)^2(x-2)(x-4)}{(x-2)^4}$

  $f'(x)$ a le même signe que $(x-2)(x-4)$ qui s'annule, en changeant de signe, pour $x = 2$ et $x = 4$:

  f est croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]4, +\infty[$ car $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$;

  f est décroissante sur $]2, 4[$ car $f'(x) < 0$ pour tout x de $]2, 4[$;

  f' s'annule sans changer de signe en 1, le point $(1, f(1))$ est donc un point d'inflexion stationnaire avec $f(1) = 0$; f' s'annule en changeant de signe en 4, le point $(4, f(4))$ est donc un extremum (minimum) avec $f(4) = 6{,}75$.

- si $x \to 2$, $(x-1)^3 \to 1$ et $(x-2)^2 \to 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à (C).
- si $x \to \infty$, comme $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 4x + 4} = x + 1 + \dfrac{3x-5}{x^2-4x+4}$ (voir la division ci-dessous), on a :

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x) - (x+1)) =$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{3x-5}{x^2-4x+4} =$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ et donc

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2} -x^3 + 4x^2 - 4x & x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 - x - 1 & \\ -x^2 + 4x - 4 & \\ \cline{1-1} 3x - 5 & \end{array}$$

la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C),

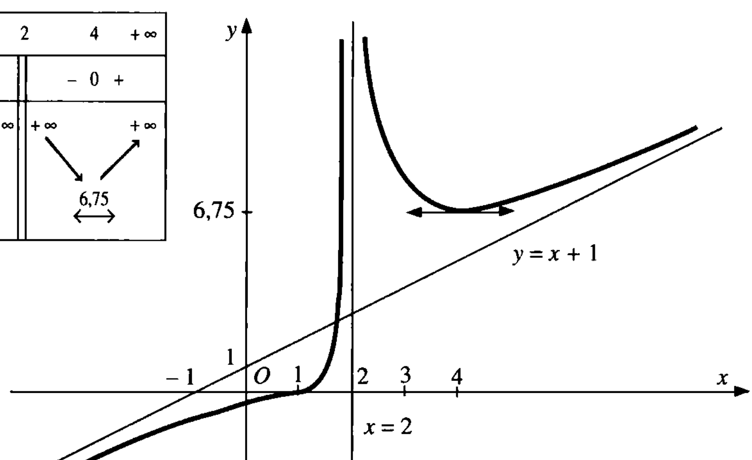
si $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0^+$, (C) est au-dessus de son asymptote oblique,

si $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = 0^-$, (C) est au-dessous de son asymptote oblique.

- Quelques valeurs : $f(-3) = -2{,}56$; $f(0) = -0{,}25$; $f(3) = 8$; $f(7) = 8{,}64$.

Abscisse du point d'intersection de (C) et de son asymptote oblique : en ce point, $\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2} = x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}7$

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6,75	↗	$+\infty$



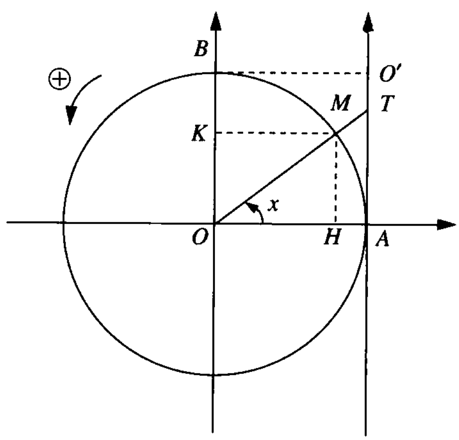
9.3 Présentation succincte des fonctions circulaires

(**Nota :** le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **9.3**).

9.3.1 Définitions

Soit le plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; soit le point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO'}$ sont des vecteurs unitaires

$(\| \overrightarrow{OA} \| = \| \overrightarrow{OB} \| = \| \overrightarrow{AO'} \| = 1)$.



On appelle :

axe des sinus, la droite (OB) munie du repère $(O, \overrightarrow{OB})$,

axe des cosinus, la droite (OA) munie du repère $(O, \overrightarrow{OA})$,

axe des tangentes, la droite (AO') munie du repère $(A, \overrightarrow{AO'})$.

a) Le cercle trigonométrique

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon OA, orienté dans le sens direct :

- $(\mathscr{C})$ est orienté : le chemin parcouru par un mobile parti de A dans le sens inverse de celui suivi par les aiguilles d'une montre est mesuré positivement; le trajet est alors effectué dans le sens direct; le sens contraire (sens horaire) est appelé sens indirect.
- $(\mathscr{C})$ a pour rayon 1 : si le mobile parcourt une fois la circonférence du cercle $(\mathscr{C})$, la longueur du chemin parcouru est égale à 2π radians (en effet $2\pi r = 2\pi$ pour $r = 1$).

Remarque 1 : un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct (ou sens trigonométrique).

Remarque 2 : un radian est la valeur absolue de la mesure d'un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle (un arc de 1 degré est égal à $\dfrac{\text{circonférence}}{360}$, un arc de 1 radian est égal à $\left.\dfrac{\text{circonférence}}{2\pi}\right)$.

b) La définition des fonctions sinus, cosinus, tangente

Soit x la mesure en radians d'un arc $\overset{\frown}{AM}$ (ou de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$) ; soit K le projeté orthogonal de M sur l'axe des sinus, H le projeté orthogonal de M sur l'axe des cosinus, T le point d'intersection de la droite (OM) et de l'axe des tangentes :

- pour tout x de $\mathbb{R}$ on note $\overline{OK} = \sin x$ (lire « sinus x »),
- pour tout x de $\mathbb{R}$ on note $\overline{OH} = \cos x$ (lire « cosinus x »),
- pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ on note $\overline{AT} = \tan x$ (lire « tangente x », noté aussi $\operatorname{tg} x$).

Les relations entre le nombre x et les nombres $\overline{OK}$, $\overline{OH}$ et $\overline{AT}$ permettent de définir respectivement la fonction sinus (notée sin) de $\mathbb{R}$ dans $[-1, +1]$, la fonction cosinus (notée cos) de $\mathbb{R}$ dans $[-1, +1]$, la fonction tangente (notée tan ou tg) de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\sin : x \mapsto \sin x = \overline{OK} ; \quad \cos : x \mapsto \cos x = \overline{OH} ; \quad \tan : x \mapsto \tan x = \overline{AT}.$$

Remarque 1 : les fonctions ci-dessus sont appelées indifféremment fonctions trigonométriques (définies à l'aide de triangles (trigones) rectangles d'hypoténuse de longueur égale à 1) ou fonctions circulaires (définies à l'aide du cercle trigonométrique).

Remarque 2 : les définitions précédentes permettent de déduire que : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $-\infty < \tan x < +\infty$.

Remarque 3 : les fonctions circulaires sont périodiques ; quand elles sont définies on a, avec $k \in \mathbb{Z}$:

- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, la fonction sin a pour période 2π ;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, la fonction cos a pour période 2π ;
- $\tan(x + k\pi) = \tan x$, la fonction tan a pour période π.

Remarque 4 : on utilise certaines conventions d'écriture ; par exemple, on écrit plus souvent $\sin x$ que $\sin(x)$ et, si n est un nombre entier naturel, plus souvent $\sin^n x$ que $(\sin x)^n$.

9.3.2 Relations trigonométriques

a) Relations fondamentales

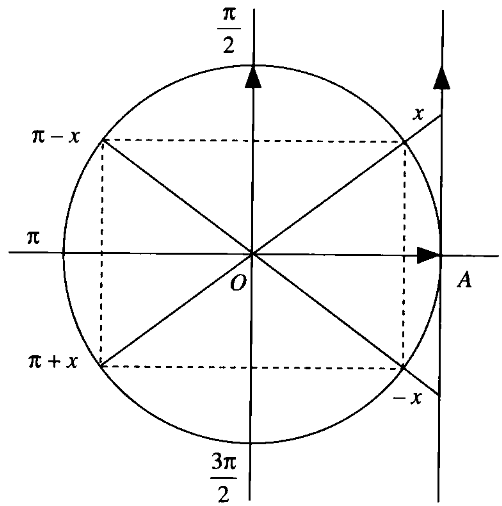
- Pour tout x de $\mathbb{R}$ le théorème de Pythagore permet d'établir que : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

- Pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ le théorème de Thalès permet d'établir que : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et donc $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

b) Symétries

Quel que soit le nombre réel x, on a :

- $\sin(-x) = -\sin x$;
  $\sin(\pi - x) = \sin x$;
  $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- $\cos(-x) = \cos x$;
  $\cos(\pi - x) = -\cos x$;
  $\cos(\pi + x) = -\cos x$;



et quel que soit le nombre réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\tan(-x) = -\tan x$; $\tan(\pi - x) = -\tan x$; $\tan(\pi + x) = \tan x$.

c) Formules d'addition et de duplication

Quels que soient les nombres réels a et b, on a :

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$; $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$;
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

9.3.3 Quelques résultats remarquables

a) Une limite importante

On peut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) Tableau de valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty \| -\infty$	0
mesure de x en degrés	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$

9.3.4 Dérivées des fonctions sinus, cosinus, tangente

On peut montrer que, I étant un intervalle :

- sur $\mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos'(x) = -\sin x$;
- sur $I \subset \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

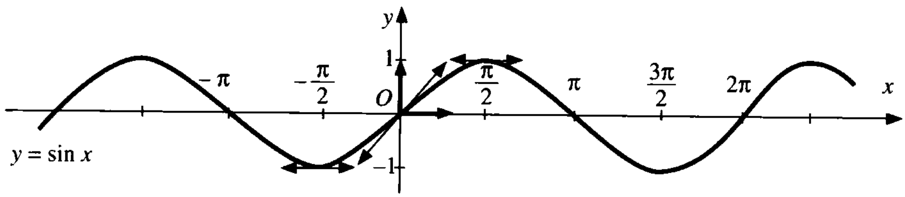
9.3.5 Représentations graphiques des fonctions sinus, cosinus, tangente

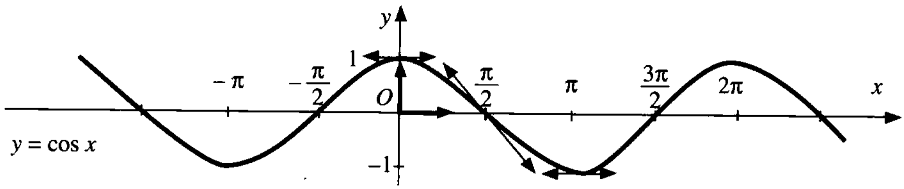
Les fonctions sinus et tangente sont impaires et la fonction cosinus est paire (voir **9.3.2, b**). Il est aisé de dresser les tableaux de variation et de tracer les courbes ci-dessous :

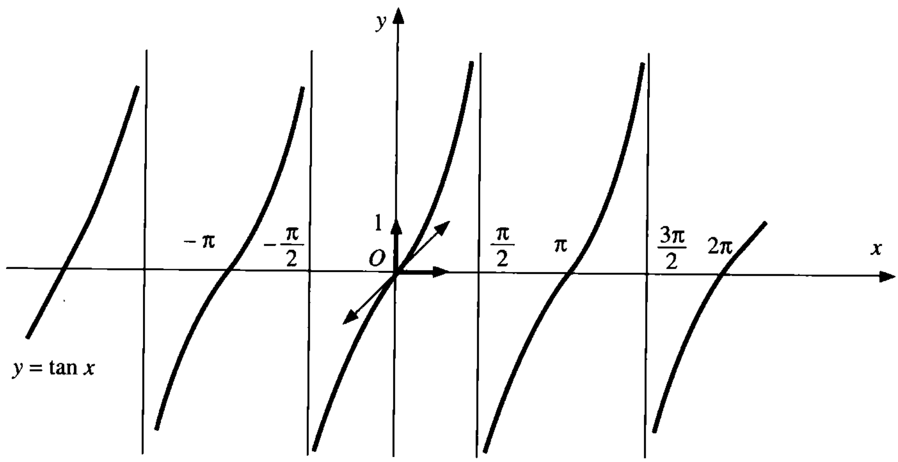
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\sin''$	0		$-$		0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\cos''$		$-$	0	$+$	

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'$	1	$+$	$\|$
$\tan$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$
$\tan''$	0	$+$	$\|$







Exemple : *étude de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos 2x}$

- *Puisque* $\cos 2x = 0$ *si* $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$, *donc si* $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, *f est définie sur* $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{\pi}{2} \right\}$; *elle est continue et dérivable sur tout intervalle de* $\mathcal{D}$.

  $\cos(2x + 2\pi) = \cos(2(x + \pi)) = \cos 2x$ *donc* $f(x) = f(x + k\pi)$, *f a pour période* π.

  $f(-x) = \dfrac{1}{\cos(-2x)} = \dfrac{1}{\cos 2x} = f(x)$, *f est paire.*

  Il suffit d'étudier la fonction f sur un domaine correspondant à une demi-période, par exemple sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- *Avec* $u(x) = \cos 2x$, $u'(x) = -2\sin 2x$, $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2} = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$; $f'(x)$ *a le même signe que* $\sin 2x$.

sur $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right[$ $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante,

sur $\left]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante,

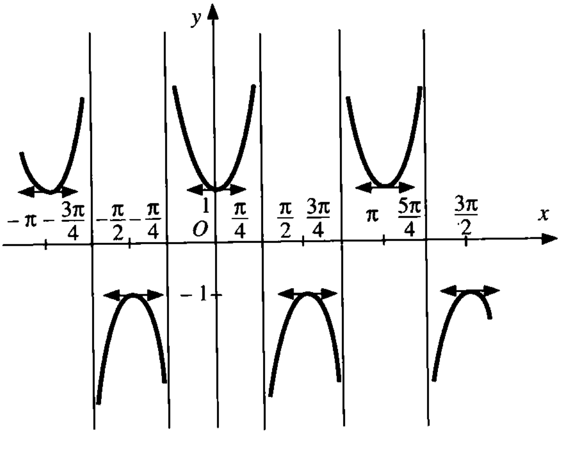
$f'(x)$ s'annule en changeant de signe en 0 et en $\frac{\pi}{2}$, les points $(0,\ f(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ sont des extremums locaux : $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

- *$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \infty$, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f.*
  (Les variations de f permettent de préciser les signes de l'infini mais on peut aussi remarquer que :

  quand $x \to \frac{\pi^-}{4}$ $\cos 2x \to \cos\frac{\pi^-}{2} \to 0^+$ et $f(x) \to +\infty$

  quand $x \to \frac{\pi^+}{4}$ $\cos 2x \to \cos\frac{\pi^+}{2} \to 0^-$ et $f(x) \to -\infty$)
- *Les résultats ci-dessus permettent de représenter la restriction de f à $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4},\ 0\right]$ s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ; des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, appliquées à la courbe restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$ donnent alors la courbe représentative de la fonction f.*

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0 $+$	‖	$+$ 0
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$



10 Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

10.1 La fonction logarithme népérien

10.1.1 Définition

Quand $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ la fonction $x \mapsto x^n$ admet pour primitives, sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ où c est une constante réelle. Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue ; elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$:

> On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarque : d'autres notations sont possibles, on a : $\ln(x) = \ln x = \text{Log}\, x = \text{L}\, x$.

10.1.2 Propriétés essentielles

a) Conséquences immédiates de la définition

$\ln 1 = 0$ et pour tout x de $]0, +\infty[$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ (On note indifféremment : $(\ln x)' = \ln'(x) = \dfrac{d}{dx} \ln x$.)

Remarque : si la fonction u est dérivable sur un intervalle I :

- si $u(x) > 0$, $\dfrac{d}{dx} \ln(u(x)) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I;
- si $u(x) \neq 0$, $\dfrac{d}{dx} \ln |u(x)| = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I.

Exemples

- *sur* $]-1, +1[$ $\dfrac{d}{dx} \ln(1 - x^2) = \dfrac{-2x}{1 - x^2} = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
- *sur un intervalle de* $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ $\dfrac{d}{dx} \ln(x^2 - 1) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$
- *sur un intervalle de* $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ $\dfrac{d}{dx} \ln |1 - x^2| = \dfrac{d}{dx} \ln |x^2 - 1| = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) Propriétés algébriques

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs ; on a :

$$\ln a \times b = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^n = n \ln a \text{ avec } n \in \mathbb{Q}$$

(les résultats du paragraphe **10.3** étendent cette propriété à n réel).

10.1.3 Limites

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, la courbe représentative de ln admet pour asymptote l'axe des ordonnées.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, la courbe représentative de ln admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = 1$ est la valeur de la dérivée de ln en 1.

10.1.4 Le nombre e

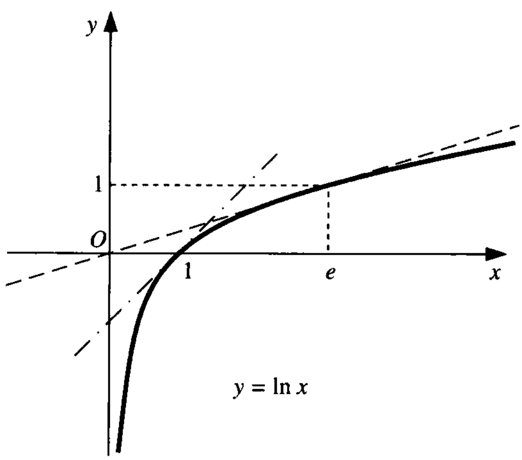
Le nombre solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\ln x = 1$ est noté e, on a donc $\ln e = 1$.

Remarque : $e \approx 2{,}718\,281\,828\ldots$ est un nombre irrationnel et on peut montrer que $e = 1 + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{1}{3\,!} + \ldots$

10.1.5 Tableau de variations et représentation graphique

D'après les résultats précédents, le plan étant muni d'un repère orthonormé, on a :

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$			+	
$\ln x$		$-\infty$ → 0	→ 1	→ $+\infty$



Remarque : la fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$, elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc :

- elle admet une fonction réciproque (voir **10.2**),
- si a et b sont des nombres réels strictement positifs, on a :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b,$$
$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b.$$

Exemple : *résolution des équations :*

$$(A) : \ln (x-2)(x-1) = \ln (2x+8),$$
$$(B) : \ln (x-2) + \ln (x-1) = \ln (2x+8) ;$$

on a : $(2x+8) > 0$ *si* $x \in\,]-4, +\infty[$, $(x-2)(x-1) > 0$ *si* $x \in\,]-\infty, 1[\, \cup\,]2, +\infty[$, $(x-2) > 0$ *si* $x \in\,]2, +\infty[$, $(x-1) > 0$ *si* $x \in\,]1, +\infty[$;

- *l'équation (A) est définie pour* $x \in \left]-4, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$*, elle est alors équivalente à*
$$(x-2)(x-1) = 2x+8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 2x + 8$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-6) = 0,$$
l'équation (A) a donc pour solutions $x_1 = -1$ *et* $x_2 = 6$ *;*
- *l'équation (B) est définie pour* $x \in \left]2, +\infty\right[$*, elle est alors équivalente à l'équation (A), elle admet donc pour solution unique* $x = 6$*.*

10.2 La fonction exponentielle népérienne

10.2.1 Définition

La fonction exponentielle népérienne, (appelée souvent, simplement, fonction exponentielle), notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, on a :

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$$
$$\text{avec} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Remarque : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$; pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$.

10.2.2 Notation

On peut montrer que, pour tout α de $\mathbb{Q}$, $\exp(\alpha) = e^\alpha$; puisque la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction réciproque de la fonction ln), on prolonge cette propriété à tout α de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en utilisant la notation $\exp(x) = e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$, on a donc :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$
$$\text{avec} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}_+^*$$

10.2.3 Propriétés

La réciprocité des fonctions ln et exp et les propriétés de la fonction ln permettent d'établir les résultats présentés dans ce paragraphe.

a) Propriétés algébriques

Soit α et β des nombres réels ;

$$e^0 = 1 \quad , \quad e^1 = e \quad , \quad e^\alpha > 0 \quad , \quad e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta} \quad , \quad \frac{e^\alpha}{e^\beta} = e^{\alpha-\beta} \quad , \quad (e^\alpha)^n = e^{n\alpha}$$

avec $n \in \mathbb{Q}$ (les résultats du paragraphe **10.3** étendent cette propriété à n réel).

Exemple : *résolution de l'équation (E) :* $e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{8}{3}$ *; cette équation est définie sur* $\mathbb{R}$ *et peut s'écrire :*

$e^x - e^{-x} - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(e^{2x} - \frac{8}{3}e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{8}{3}e^x - 1 = 0$ *soit, en posant* $X = e^x$ *(alors* $X > 0$*),* $X^2 - \frac{8}{3}X - 1 = 0 \Leftrightarrow (X-3)\left(X + \frac{1}{3}\right) = 0$ *qui admet pour solutions* $X_1 = 3$ *et* $X_2 = -\frac{1}{3}$ *, or il faut* $X > 0$*, donc l'équation (E) admet pour unique solution* $X_1 = e^x = 3$*, c'est-à-dire* $x = \ln 3$*.*

b) Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $]-\infty, +\infty[$ $(e^x)' = e^x$ $\left(\text{on note indifférement : } (e^x)' = \exp'(x) = \frac{d}{dx}e^x\right)$.

Remarque : si la fonction u est dérivable sur un intervalle I,

$$\frac{d}{dx}e^{u(x)} = u'(x) \,.\, e^{u(x)} \text{ sur } I.$$

Exemple : *sur* $\mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}e^{4x^3+5x+2} = (12x^2+5)e^{4x^3+5x+2}$

c) Limites

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$, la courbe représentative de exp admet pour asymptote l'axe des abscisses.

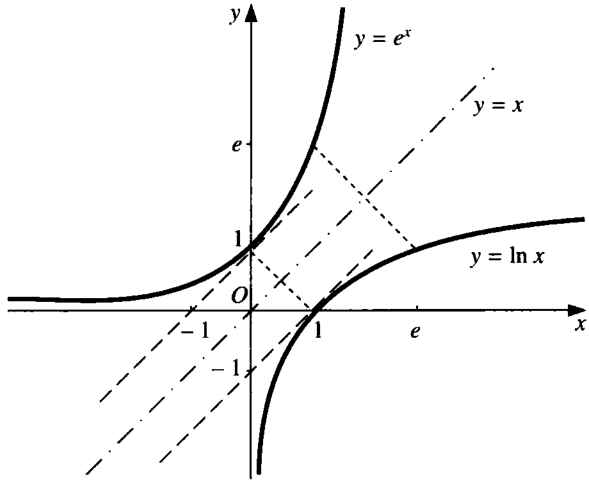
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, la courbe représentative de exp admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ est la valeur de la dérivée de exp en 0.

10.2.4 Tableau de variations et représentation graphique

D'après les résultats précédents, le plan étant muni d'un repère orthonormé, on a :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$		$+$		
e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



Remarque : la fonction exp est une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, elle est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$, donc si α et β sont des nombres réels, on a :

$$e^{\alpha} = e^{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta,$$
$$e^{\alpha} < e^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Exemple : *résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\dfrac{(e^x)^3}{e^2} > 1$; l'inéquation équivaut à*

$e^{3x} > e^2 \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$ et donc l'ensemble de ses solutions est l'intervalle

$\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

*(**Nota :** on pouvait aussi écrire l'inéquation :*

$e^{3x} \times e^{-2} > 1 \Leftrightarrow e^{3x-2} > e^0 \Leftrightarrow 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$)

10.3 Les fonctions logarithme et exponentielle de base *a*

(**Nota :** le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **10.3**)

La fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout a réel donné strictement positif, par :

$$y = \exp_a x = e^{x \ln a} \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*$$

et on note, de préférence : $y = \exp_a x = a^x$.

La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout a réel donné strictement positif et différent de 1, par :

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}.$$

Remarque 1 : la fonction logarithme népérien (resp. exponentielle népérienne) est la fonction logarithme (resp. exponentielle) de base e (ln e = 1).

Remarque 2 : la fonction logarithme de base 10 s'appelle fonction logarithme décimal et se note log, on a donc :

pour tout x de $]0, +\infty[$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque 3 : formules de changement de base :

Si a et b sont des éléments de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, on a :

• $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b} = \dfrac{\ln x}{\ln a} \times \dfrac{\ln a}{\ln b} = \log_a x \times \log_b a$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$;

• $b^x = e^{x \ln b} = e^{x \ln a \cdot \frac{\ln b}{\ln a}} = e^{x \ln a \cdot \log_a b} = a^{x \log_a b}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Remarque 4 : pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, la fonction $\exp_a$ est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$, on a :

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \text{ avec } y \in \mathbb{R}_+^*,\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}.$$

Remarque 5 : les propriétés des fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ se déduisent aisément de celles des fonctions ln et exp. Dans la résolution d'un exercice, il est souvent commode de transformer $\log_a x$ (resp. a^x) en $\dfrac{\ln x}{\ln a}$ (resp. $e^{x \ln a}$).

On obtient, en particulier, si a et b sont deux nombres réels strictement positifs et si α et β sont deux nombres réels quelconques :

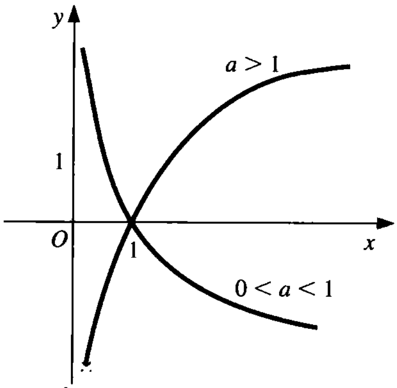
$$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \times \beta}, \quad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}, \quad a^\alpha \times b^\alpha = (a \times b)^\alpha, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

Exemples :

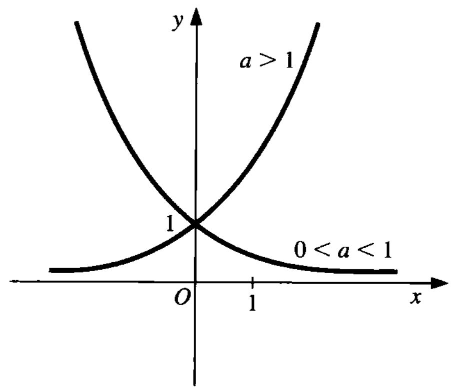
• $2^3 \times 2^{\sqrt{2}} = 2^{3+\sqrt{2}} = e^{(3+\sqrt{2})\ln 2} \approx 21{,}32$;

• $2^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 6} \approx 12{,}6$.

Remarque 6 : le plan étant muni d'un repère orthonormé, on obtient les représentations graphiques ci-dessous :



$y = \log_a x$



$y = a^x$

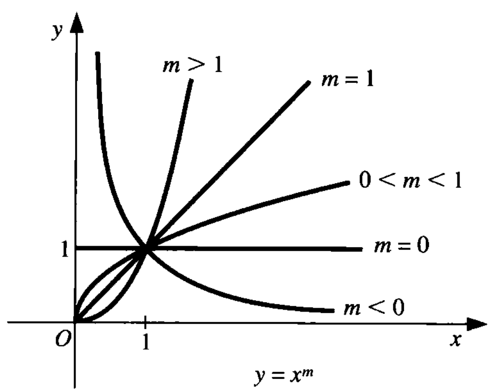
10.4 La fonction puissance (exposants réels)

Pour tout élément m de $\mathbb{Q}^*$, la fonction $x \mapsto x^m$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ a été définie au paragraphe **6.6.4**; on peut prolonger la définition de cette fonction à tout élément m de $\mathbb{R}$ puisque $x^m = e^{m \ln x}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

On retrouve, en les généralisant, les résultats obtenus pour $m \in \mathbb{Q}^*$; en particulier, si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d}{dx} x^m = \frac{d}{dx} e^{m \ln x} = \frac{m}{x} e^{m \ln x} = \frac{m}{x} x^m = mx^{m-1}.$$

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on obtient, suivant les valeurs de m, les représentations ci-contre.



$y = x^m$

10.5 CONSÉQUENCES DES LIMITES DES FONCTIONS LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCE

10.5.1 Croissance comparée

À partir des deux résultats fondamentaux suivants,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

(voir **10.1.3** et **10.2.3**) on démontre que :

> Si a et m sont deux nombres réels tels que $a > 1$ et $m > 0$, on a :
>
> $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^m} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty \quad ,$$
>
> $$\lim_{x \to 0^+} x^m . \ln x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^m . a^x = 0.$$

Remarque : on a coutume de dire, mais ce n'est pas une démonstration : « quand x tend vers $+\infty$ les exponentielles de base supérieure à un l'emportent sur les fonctions puissances qui l'emportent sur le logarithme népérien ».

Exemple : *démonstration de* $\lim_{x \to 0^+} x^m \ln x = 0$ *où* $m \in \mathbb{R}_+^*$*; on pose* $X = \frac{1}{x}$ *quand* $x \to 0^+$ *on a* $X \to +\infty$ *donc :*

$$\lim_{x \to 0^+} x^m \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X^m} \times \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{\ln 1}{X^m} - \frac{\ln X}{X^m} \right)$$ *où* $\ln 1 = 0$ *et où, si on pose* $X^m = Y$, $\ln Y = \ln X^m = m \ln X$ *donc* $\ln X = \frac{\ln Y}{m}$ *; quand* $x \to +\infty$ $Y \to +\infty$ *donc :*

$$\lim_{x \to 0^+} x^m \ln x = \lim_{X \to +\infty} \left(- \frac{\ln X}{X^m} \right) = \lim_{Y \to +\infty} \left(- \frac{\ln Y}{mY} \right) = \lim_{Y \to +\infty} - \frac{1}{m} \left(\frac{\ln Y}{Y} \right) = 0$$ *(en définitive, on a fait apparaître la limite fondamentale* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$*).*

10.5.2 Formes indéterminées exponentielles

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I avec $u(x) > 0$ pour tout x de I; les fonctions puissance et exponentielle permettent de définir sur I la fonction $x \mapsto u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$.

Si, alors, a est un point ou une extrémité de I, on peut établir le tableau suivant :

« si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ldots$ »	« et si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \ldots$ »	« $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x)$ donne la forme indéterminée… »	« et $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)}$ donne la forme indéterminée… »
0	0	$0 \times (-\infty)$	0^0
$+\infty$	0	$0 \times (\infty)$	∞^0
1	$+\infty$	$\infty \times 0$	1^∞

Remarque : ce tableau complète le tableau des formes indéterminées du paragraphe **6.3.**

Exemples : *si* $x \to +\infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0$ *et* $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ *donc :* $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \to 1$ *et* $e^{\frac{1}{x^2}} \to e^0 = 1$;

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$, *en effet : si on pose* $h = \dfrac{1}{x}$ *on a*

$h \to 0^+$ *quand* $x \to +\infty$, *donc :*

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} \ln(1 + h) = 1$ *(voir* ***10.1.3****).*

11 Suites arithmétiques et suites géométriques

Dans tout ce chapitre, on appelle $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que si n appartient à $\mathcal{D}$ alors $n+1$ appartient à $\mathcal{D}$ (sauf pour le plus grand élément de $\mathcal{D}$ quand $\mathcal{D}$ est fini).

11.1 Généralités à propos des suites numériques réelles

11.1.1 Définitions et notations

Les suites numériques réelles sont des fonctions, définies sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ non vide de $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Nota : toutes les suites présentées dans ce chapitre sont des suites numériques réelles.

Soit u une suite : l'image par u de l'entier n est notée u_n (plutôt que $u(n)$) et s'appelle terme général de la suite.

Au lieu d'écrire « soit la suite $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ » on écrit plus fréquemment
$n \mapsto u_n$
« soit la suite (u_n) ».

Si u_0 (terme de rang 0) est le premier terme de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, le terme général u_n (terme de rang n) est le $(n+1)$-ième terme de la suite.

Une suite numérique peut être définie :

- Soit par une fonction, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang.

Exemple 1 : *la suite (u_n) telle que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-3}}$ à partir du rang 4 est la suite où, $u_4 = 1$, $u_5 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_6 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ... définie sur $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$.*

- Soit par une condition initiale, qui fixe la valeur du premier terme, et un procédé de calcul (une formule de récurrence), qui permet d'exprimer u_{n+1} à l'aide de u_n.

Exemple 2 : *la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est la suite où $u_1 = 5$, $u_2 = 9$, $u_3 = 17$, ...*

11.1.2 La démonstration par récurrence

Les travaux effectués sur les suites font souvent appel au raisonnement par récurrence. Son principe est le suivant :

Soit une propriété susceptible d'être vérifiée par les entiers naturels : si l'on peut démontrer que cette propriété est vraie pour un entier $(n+1)$ dès qu'elle est vraie pour son prédécesseur n, alors il suffit de démontrer qu'elle est vraie pour l'entier p pour qu'elle soit vraie pour tous les entiers supérieurs à p.

Exemple : *soit à démontrer que les termes de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^* - \{1\}$, telle que $u_n = n^5 - n$, avec $n \geqslant 2$, sont divisibles par 5.*

- *Dans un premier temps, on vérifie que la propriété est vraie pour u_2 :*

$$u_2 = 2^5 - 2 = 30 = 5 \times 6$$

donc la propriété est vraie pour u_2.

- *Dans un deuxième temps, on suppose la propriété vraie pour u_n; on pose donc l'hypothèse $u_n = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et on vérifie que si $u_n = 5k$ cela entraîne que u_{n+1} est divisible par 5, il vient :*

$$u_{n+1} = (n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1$$
$$= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n),$$

donc, si $u_n = 5k$, on a $u_{n+1} = 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$; on en déduit que, si u_n est divisible par 5, cela implique que u_{n+1} est aussi divisible par 5.

- *Dans un troisième temps, les résultats obtenus lors des deux premiers temps, permettent de conclure que $u_n = n^5 - n$ est divisible par 5 pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.*

11.1.3 Suites monotones, suites bornées

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathcal{D}$;

(u_n) est dite :

- **stationnaire sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $u_n = u_{n+1}$ pour tout n de $\mathcal{D}$;**
- **croissante sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n de $\mathcal{D}$;**
- **décroissante sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n de $\mathcal{D}$;**
- **monotone sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, (u_n) est soit croissante, soit décroissante, soit stationnaire.**

(u_n) est dite :

- **majorée sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout n de $\mathcal{D}$;**
- **minorée sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe un réel m tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n de $\mathcal{D}$;**
- **bornée sur $\mathcal{D}$ lorsque (u_n) est à la fois majorée et minorée sur $\mathcal{D}$.**

Exemple 1 *: sur $\mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$ est croissante, minorée et n'est pas majorée, en effet :*

- *(u_n) est croissante car $u_0 = 0$, $u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour $n \neq 0$ puisque $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} > 1$;*
- *(u_n) est minorée par tout nombre $m \leqslant 0$ puisqu'elle est croissante et que $u_n \geqslant 0$;*
- *(u_n) n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.*

Exemple 2 *: sur $\mathbb{N}^*$, la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est décroissante et bornée, (minorée et majorée), en effet :*

- *(u_n) est décroissante car $u_1 = 1$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ puisque $\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} < 1$;*
- *(u_n) est minorée par tout nombre $m \leqslant 0$ car (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ (on a plus simplement $u_n > 0$) ;*
- *(u_n) est majorée par tout nombre $M \geqslant 1$ car (u_n) est décroissante et $u_1 = 1 \geqslant u_n$ quel que soit n de $\mathbb{N}^*$.*

Exemple 3 *: sur $\mathbb{N}$, la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = (-1)^{n+1} n$, n'est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée ; on a, en effet : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = -2$, $u_3 = 3$, $u_4 = -4$, $u_5 = 5$, $u_6 = -6$, ... (cette suite est dite alternée : deux termes voisins sont de signes opposés).*

11.2 SUITES ARITHMÉTIQUES

11.2.1 Définitions

Soit d un nombre réel; on appelle suite arithmétique (ou progression arithmétique) toute suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathcal{D},$$

d est appelé raison de cette suite arithmétique.

Exemple : *soit les nombres réels a et b; pour $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, si $u_n = an + b$ on a $u_{n+1} = a(n+1) + b$ donc $d = u_{n+1} - u_n = a$: (u_n) est une suite arithmétique, sa raison est a, ses premiers termes sont $u_0 = b$, $u_1 = a + b$, $u_2 = 2a + b$, $u_3 = 3a + b$, ...*

11.2.2 Expression du terme général

Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique (u_n) de raison d, on a :

$$u_n = u_0 + nd.$$

Remarque : le terme u_n ci-dessus est le $(n+1)$-ième terme de la suite (u_n).

Exemple 1 : *la suite arithmétique (2, 5, 8, 11, ...) a pour raison $d = 3$, son premier terme est $u_0 = 2$, son vingt-sixième terme est $u_{25} = 2 + 25 \times 3 = 77$.*

Exemple 2 : *la suite arithmétique (10, 6, 2, −2, −6, ...) a pour raison $d = -4$, son premier terme est $u_0 = 10$, son onzième terme est $u_{10} = 10 + 10 \times (-4) = -30$.*

11.2.3 Somme de N termes consécutifs

Soit N termes consécutifs d'une suite arithmétique et S leur somme; si A est le premier de ces termes consécutifs et si B en est le dernier, on a :

$$S = \frac{N}{2}(A + B).$$

Remarque : la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison d est donc :

$$\frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}) = \frac{n}{2}\,(2u_0 + (n-1)d)$$

Exemple 1 : *les n premiers entiers naturels non nuls constituent une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1, leur somme est donc :*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}\,(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 : en reprenant les caractéristiques de la suite de l'exemple 2 du paragraphe 11-2-2, on a :

$$10+6+2-2-6-10-14-18-22-26-30=\frac{11}{2}(10-30)=-110.$$

11.3 Suites géométriques

11.3.1 Définitions

Soit r un nombre réel non nul; on appelle suite géométrique (ou progression géométrique) toute suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1}=ru_n \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathcal{D},$$

r est appelé raison de cette suite géométrique.

Remarque :

- si $r>0$ et $r\neq 1$ la suite (u_n) est monotone;
- si $r=1$ la suite (u_n) est stationnaire;
- si $r<0$ la suite (u_n) est alternée.

***Exemple** : la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=a^n$, où a est un nombre réel positif non nul et différent de 1, est une suite géométrique de raison a, croissante quand $a>1$ et décroissante quand $0<a<1$; ses premiers termes sont $u_0=1$, $u_1=a$, $u_2=a^2$, $u_3=a^3$, ...*

11.3.2 Expression du terme général

Si u_0 est le premier terme d'une suite géométrique (u_n) de raison r, on a :

$$u_n=u_0r^n$$

Remarque 1 : le terme u_n ci-dessus est le $(n+1)$-ième terme de la suite (u_n).

Remarque 2 : le premier terme d'une progression arithmétique ou géométrique est parfois appelé base de la progression.

***Exemple 1** : la suite géométrique $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$ a pour raison $r=\frac{1}{2}$, son premier terme est $u_0=2$, son dixième terme est $u_9=2\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{256}$.*

***Exemple 2** : la suite géométrique $(3, -6, 12, -24, ...)$ a pour raison $r=-2$, son premier terme est $u_0=3$, son neuvième terme est $u_8=3(-2)^8=768$.*

11.3.3 Somme de N termes consécutifs

Soit N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ et S leur somme ; si A est le premier de ces termes consécutifs, on a :

$$S = A\,\frac{r^N - 1}{r - 1} = A\,\frac{1 - r^N}{1 - r}$$

Remarque : la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $r \neq 1$ est donc :

$$u_0\,\frac{r^n - 1}{r - 1} = u_0\,\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Nota : si le nombre de termes est infini et si, en même temps, $|r| < 1$, cette somme tend vers le nombre $\frac{u_0}{1 - r}$.

***Exemple 1** : soit i un nombre réel strictement positif;*

- *la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $(1 + i)$ est :*

$$\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- *la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{1+i}$ et de raison $\frac{1}{1+i}$ est :*

$$\frac{1}{1+i}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}}\right) = \frac{1}{1+i}\left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{\frac{1+i-1}{1+i}}\right) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

***Exemple 2** : en reprenant les caractéristiques de la suite de l'exemple 2 du paragraphe **11.3.2**, on a :*

$$3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 - 384 + 768 = 3\,\frac{1 - (-2)^9}{1 - (-2)} = 513.$$

12 Calcul intégral

Pour alléger les explications et les notations, les fonctions utilisées dans ce chapitre sont supposées définies, continues et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et les nombres a et b sont toujours des éléments de I.

12.1 Intégrale définie d'une fonction continue

12.1.1 Définition

Soit F une primitive de la fonction f sur $[a, b]$; on appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$.

On note, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

L'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Les nombres réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.

Exemple : $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(2)^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$

Remarque : le nombre $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ne dépend :

- ni de la primitive choisie ($[F(x)]_a^b = [F(x) + c]_a^b$ où c désigne une constante réelle) ;

• ni de la variable x, dite variable muette :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

12.1.2 Intégrales et primitives

La définition de l'intégrale définie permet de démontrer que : pour tout x appartenant à I la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple : *la fonction logarithme népérien est la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ; la fonction ln est donc définie par*

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ (voir } \mathbf{10.1.1}\text{).}$$

Remarques : l'écriture $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelée intégrale indéfinie et se lit « somme de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Si F est une primitive de f sur I et c une constante réelle :

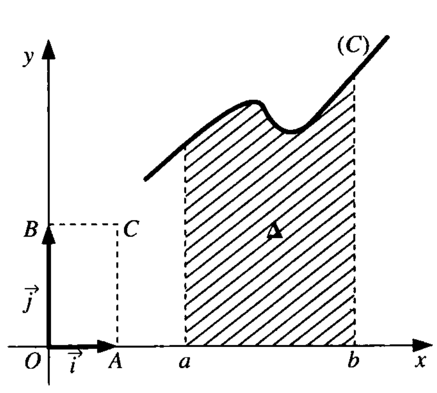
• $x \mapsto \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ est une fonction ;

• $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ est un nombre.

12.1.3 Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive

Nota : Une fonction f est dite positive sur un intervalle $[a, b]$ si, et seulement si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$.

Soit dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) représentative d'une fonction f positive sur $[a, b]$ où $a \leqslant b$; soit Δ la partie (hachurée) du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$; soit le rectangle $OACB$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j}$; si on choisit pour unité d'aire l'aire du rectangle $OACB$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la mesure de l'aire du domaine Δ.



Remarque : soit $M(x, y)$ un point du plan, on peut écrire : $\Delta = \{M(x, y) | a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

Exemple : *avec les notations ci-dessus ; si on prend* $f(x) = x^2$, $a = 2$ *et* $b = 3$ *; on a vu* ***(12.1.1)*** *que* $\int_2^3 x^2\,dx = \frac{19}{3}$:

- *pour* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ *cm l'aire du domaine* Δ *est* $\frac{19}{3}$ *cm*^{2} *;*

- *pour* $\|\vec{i}\| = 2$ *cm et* $\|\vec{j}\| = 3$ *cm l'aire du domaine* Δ *est* $\frac{19}{3} \times 2 \times 3 = \frac{19}{3} \times 6 = 38$ *cm*^{2}*;*

- *pour* $\|\vec{i}\| = 3$ *cm et* $\|\vec{j}\| = 0{,}1$ *cm l'aire du domaine* Δ *est* $\frac{19}{3} \times 3 \times 0{,}1 = 1{,}9$ *cm*^{2}.

12.2 PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

12.2.1 Propriétés immédiates et relation de Chasles

Soit f une fonction caractérisée au début du chapitre, on a :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

- et, si c appartient à l'intervalle I, on a la relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Remarque : la relation de Chasles est vérifiée quel que soit l'ordre des trois réels a, b et c.

Exemples :

- $\int_3^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^2 = \frac{8}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{19}{3} = -\int_2^3 x^2\,dx$;

- $\int_{-1}^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3$ *et*

$$\int_{-1}^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 = \frac{27}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} = \frac{9}{3} + \frac{19}{3} = \int_{-1}^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx.$$

12.2.2 Linéarité de l'intégrale

Soit deux fonctions f et g caractérisées au début du chapitre et un nombre réel α, on a :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Remarque : sur l'intervalle I, on a (voir **7.3.2**) :
$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x.$

Exemple : $\displaystyle\int_2^3 \left(x^2 - 4\,e^x + 2 + \frac{3}{x}\right) dx =$

$$\int_2^3 x^2\,dx - 4\int_2^3 e^x\,dx + 2\int_2^3 dx + 3\int_2^3 \frac{dx}{x} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 - 4\,[e^x]_2^3 + 2\,[x]_2^3 + 3\,[\ln x]_2^3 =$$

$$\left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right) - 4\,(e^3 - e^2) + 2\,(3 - 2) + 3\,(\ln 3 - \ln 2) =$$

$$\frac{19}{3} - 4\,e^2(e - 1) + 2 + 3\ln\frac{3}{2} \approx -41{,}2.$$

12.2.3 La positivité de l'intégrale et ses conséquences

Nota : le lecteur pressé peut se contenter d'une étude peu approfondie de ce paragraphe **12.2.3**).

Soit deux fonctions f et g caractérisées au début du chapitre :

a) Positivité de l'intégrale

Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de I et si $a \leqslant b$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$

b) Inégalité

Si on applique la propriété précédente à la fonction $g - f$, on démontre que :

Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x de I et si $a \leqslant b$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

c) Inégalité de la moyenne

Soit deux nombres réels m et M tels que, pour tout x de I, $m \leqslant f(x) \leqslant M$; si on applique la propriété précédente à cette double inégalité, on démontre que, si $a \leqslant b$, on a : $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Exemple : *on ne peut trouver, en termes élémentaires, une primitive de la fonction* $x \mapsto e^{-x^2}$, *il est donc difficile de trouver* $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$; *il est, par contre, possible de montrer que, sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, *on a* $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ *et que* $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)\,dx > 0{,}458$ *et* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2} < 0{,}464$; *il en résulte que :*

$$0{,}458 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \leqslant 0{,}464,$$

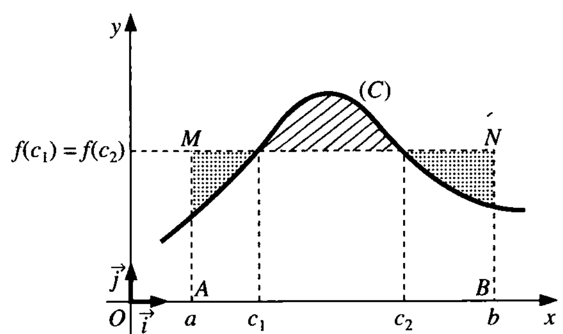
cette double inégalité permet, en définitive, d'obtenir une valeur approchée de $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$.

d) Valeur moyenne d'une fonction

Si $a < b$ le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$.

Remarque : la propriété présentée au paragraphe **12.2.3,c** et le théorème des valeurs intermédiaires (voir **6.2.2**) permettent de conclure qu'il existe un point c de $[a, b]$ tel que $f(c)$ soit cette valeur moyenne, on a donc :
$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$ (le point c n'est pas forcément unique).

Le résultat précédent est illustré par la figure ci-contre où l'aire du domaine Δ (définie comme au paragraphe **12.1.3**) est égale à l'aire du rectangle *AMNB* ; la somme des aires visualisées par des pointillés est égale à l'aire hachurée.



12.3 CALCUL INTÉGRAL ET CALCUL D'AIRES

Dans tout ce paragraphe, on considère un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(x, y)$ un point quelconque de ce plan; puisque $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, l'unité d'aire est 1 ; les résultats qui vont suivre restent valables si le repère n'est pas normé, à condition de prendre comme unité d'aire l'aire d'un rectangle $OBCA$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j}$.

12.3.1 Aire de la partie Δ du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équation *x* = *a* et *x* = *b* avec *a* < *b*

Soit une fonction f caractérisée au début du chapitre ;

- si pour tout x de $[a, b]$ $f(x) \geqslant 0$ on peut écrire
  $\Delta = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et l'aire du domaine Δ est $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  (voir **12.1.3**) ;
- si pour tout x de $[a, b]$ $f(x) \leqslant 0$ on peut écrire
  $\Delta = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$ et l'aire du domaine Δ est $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  (car $-f(x) \geqslant 0$ et les courbes représentatives de f et de $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses) ;
- si $f(x)$ ne garde pas un signe constant sur $[a, b]$ mais change de signe aux points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de $[a, b]$ (points d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses) les deux résultats précédents et la relation de Chasles permettent de conclure que l'aire du domaine Δ est

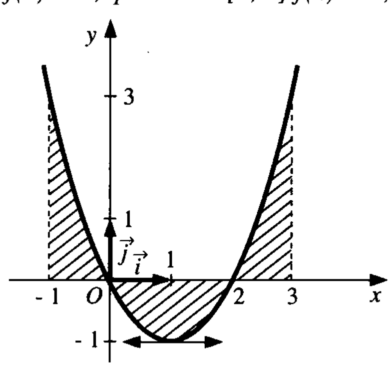
$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \ldots + \left|\int_{x_p}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Exemple 1 : *avec les notations précédentes ; pour $f(x) = x^2 - 2x$, $a = -1$ et $b = 3$ on a $f(0) = 0$ et $f(2) = 0$, quand $x \in [-1, 0]$ $f(x) \geqslant 0$, quand $x \in [0, 2]$ $f(x) \leqslant 0$, quand $x \in [2, 3]$ $f(x) \geqslant 0$; l'aire du domaine Δ est, si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm :*

$$\left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{3} f(x)\,dx\right| =$$

$$+\int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx =$$

$$+\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{2}^{3} =$$



$$\left[0-\left(-\frac{1}{3}-1\right)\right]-\left[\left(\frac{8}{3}-4\right)-0\right]+\left[\left(\frac{27}{3}-9\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]$$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4\ cm^2.$$

Remarque : fonctions paires et fonctions impaires :
Les résultats précédents permettent immédiatement d'établir les propriétés suivantes :

> Soit a un nombre réel strictement positif et f une fonction continue sur le segment $[-a, a]$;
>
> • si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$;
>
> • si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Exemple 2 : *soit la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 1$;*
f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire sur $\mathbb{R}$;

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{4}{3}\ ;$$

il est intéressant de remarquer que la courbe d'équation $y = x^2 - 2x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où le point M a pour coordonnées $(1, 0)$, a pour équation $y = x^2 - 1$ dans le repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$ et de comparer les résultats obtenus aux exemples 1 et 2 de ce paragraphe.

Exemple 3 : *soit la fonction f telle que $f(x) = e^x - e^{-x}$; f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire sur $\mathbb{R}$; on peut vérifier que pour tout réel a strictement positif $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, en effet il vient :*

$$\int_{-a}^{a} (e^x - e^{-x})\,dx = [e^x + e^{-x}]_{-a}^{a} = e^a + e^{-a} - e^{-a} - e^a = 0.$$

12.3.2 Aire d'une partie du plan comprise entre deux courbes

Les conclusions du paragraphe précédent permettent de démontrer que :

> soit les fonctions f et g caractérisées au début du chapitre; si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de f et de g et par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$.

Exemple : *avec des notations du type précédent ; pour* $f(x) = x^2 - 3x - 1$,

$g(x) = -x^2 - x + 3$, $a = 0$ *et* $b = 1$ *on a* $g(x) - f(x) = -2(x^2 - x - 2) = -2(x+1)(x-2)$ *donc quand* $x \in [-1, 2]$ $(g(x) - f(x)) \geqslant 0$;

- *l'aire demandée est, si* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ *cm :*

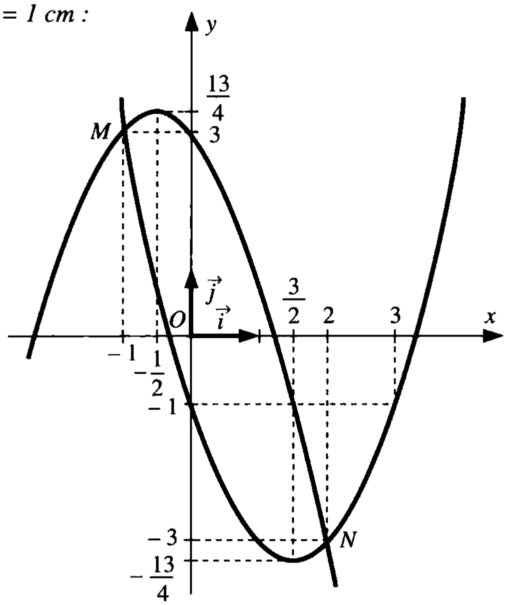
$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$\int_0^1 (-2(x^2 - x - 2))\,dx =$$

$$-2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 =$$

$$-2\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)\right) =$$

$$\frac{13}{3}\ \text{cm}^2 \approx 4{,}33\ \text{cm}^2;$$



- *si à présent, toujours avec* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ *cm, on cherche l'aire du domaine* $\mathcal{D}$ *délimité par les courbes représentatives des paraboles f et g : on détermine les abscisses des points d'intersection des deux paraboles ; en ces points* $g(x) = f(x)$ *; en résolvant cette équation on trouve les abscisses* -1 *et* 2 *de ces points M et N (on a* $M(-1, 3)$ *et* $N(2, -3)$*) ; l'aire du domaine* $\mathcal{D}$ *est donc*

$$\int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{2} (-2(x^2 - x - 2))\,dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = 9\ \text{cm}^2.$$

12.4 Quelques procédés de calcul

Étant donné une fonction f, caractérisée au début du chapitre, ce paragraphe présente quelques procédés permettant de trouver une primitive F de f sur I, donc :

- soit de déterminer la fonction $x \mapsto \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ (où c est une constante réelle dans tout le paragraphe) ;

- soit de calculer le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

12.4.1 Utilisation des dérivées

Pour trouver F, on peut utiliser « en sens inverse » les dérivées usuelles et les propriétés des fonctions dérivables.

On établit, par cette méthode, le tableau ci-dessous où α est un nombre réel et u et v deux fonctions dérivables, avec u' et v' continues, sur leur domaine de définition respectif $\mathcal{D}u$ et $\mathcal{D}v$.

Remarque : au cours d'un calcul, il est souvent nécessaire de « faire apparaître » les fonctions présentées dans ce tableau.

Tableau de primitives

$x \mapsto f(x) = \ldots$	$x \mapsto F(x) = \ldots$	sur un intervalle de …
0	c	$\mathbb{R}$
α	$\alpha x + c$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* \text{ si } n \in \mathbb{Z}^*_- - \{-1\} \\ \mathbb{R}^*_+ \text{ si } n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\alpha u'(x)$	$\alpha u(x) + c$	$\mathcal{D}u$
$u'(x)\,(u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathcal{D}u \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{D}u \text{ quand } u(x) \neq 0 \text{ si } n \in \mathbb{Z}^*_- - \{-1\} \\ \mathcal{D}u \text{ quand } u(x) > 0 \text{ si } n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z} \end{cases}$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + c$	$\mathcal{D}u \cap \mathcal{D}v$
$u(x) . v'(x) + v(x) . u'(x)$	$u(x) . v(x) + c$	$\mathcal{D}u \cap \mathcal{D}v$
$\dfrac{v(x) . u'(x) - u(x) . v'(x)}{(v(x))^2}$	$\dfrac{u(x)}{v(x)} + c$	$\mathcal{D}u \cap \mathcal{D}v$ quand $v(x) \neq 0$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln \lvert u(x) \rvert + c$	$\mathcal{D}u$ quand $u(x) \neq 0$
$u'(x) . e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	$\mathcal{D}u$

Exemple 1 : *calcul de* $K = \displaystyle\int_0^1 x^4(1 + x^5)^5\,dx$;

la fonction $x \mapsto x^4(1 + x^5)^5$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$, *donc sur* $[0, 1]$;

si $u(x) = 1 + x^5$, $u'(x) = 5x^4$ *et* $x^4(1 + x^5)^5 = \dfrac{1}{5}\,u'(x)\,(u(x))^5$, *donc :*

$$K = \frac{1}{5}\int_0^1 u'(x) \,.\, (u(x))^5\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{(u(x))^6}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{30}\,[(1 + x^5)^6]_0^1 = \frac{1}{30}\,(2^6 - 1) = \frac{63}{30} = 2{,}1.$$

Exemple 2 : *calcul de* $K = \int_{-1}^{3} x^2\sqrt{27 - x^3}\,dx;$

la fonction $x \mapsto x^2\sqrt{27 - x^3}$ *est définie et continue sur* $]-\infty, 3]$*, donc sur* $[-1, 3]$*;* *si* $u(x) = 27 - x^3$, $u'(x) = -3x^2$*, donc :*

$$K = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{3}(-3x^2\sqrt{27 - x^3})\,dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{3} u'(x)\,(u(x))^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(u(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{3} = -\frac{2}{9}\left[\sqrt{(u(x))^3}\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{2}{9}\left[\sqrt{(27 - x^3)^3}\right]_{-1}^{3} = -\frac{2}{9}\,(0 - \sqrt{21\,952}) \approx 32{,}9.$$

Exemple 3 : *calcul de* $K = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx;$

la fonction $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$*, donc sur* $[0, 1]$*; si* $u(x) = 1 + x^2$*,* *on a* $u(x) > 0$ *et* $u'(x) = 2x$*, donc :*

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \frac{1}{2}\,[\ln(u(x))]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\,[\ln(1 + x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}35.$$

Exemple 4 : *détermination de* $K(x) = \int \frac{x}{4 - x^2}\,dx;$

la fonction $x \mapsto \frac{x}{4 - x^2}$ *est définie et continue sur tout intervalle I de* $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$*;*

si $u(x) = 4 - x^2$ *on a* $u'(x) = -2x$*, donc :*

$$\int \frac{x}{4 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{4 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$$

$= -\frac{1}{2}\ln|u(x)| + c = -\frac{1}{2}\ln|4 - x^2| + c$ *sur tout intervalle I de* $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

12.4.2 L'intégration par parties

Quand les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I, on a, sur I :

$$(u(x) \,.\, v(x))' = u(x) \,.\, v'(x) + v(x) \,.\, u'(x),$$

cette propriété permet de démontrer la formule de l'intégration par parties.

Soit les fonctions u et v telles que leur dérivée, u' et v', soient continues sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b u(x) \,.\, v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x) \,.\, v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \,.\, u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 1 : si les fonctions u et v admettent des dérivées continues sur un intervalle I, on a sur I :

$$\int u(x) \,.\, v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \,.\, v(x) - \int v(x) \,.\, u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 2 : on utilise, évidemment, l'intégration par parties quand on pense trouver aisément une primitive de la fonction $x \mapsto v(x) \,.\, u'(x)$; deux cas se présentent :

- soit on reconnaît dans $u(x) \,.\, v'(x)$ la fonction u et on préfère effectuer les calculs sur u' (voir exemple 1) ;
- soit on reconnaît dans $u(x) \,.\, v'(x)$ une dérivée usuelle v' (voir exemple 2).

Exemple 1 : *calcul de* $K = \int_1^2 (3x^2 + x) \ln x \, dx$;

la fonction $x \mapsto (3x^2 + x) \ln x$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc sur* $[1, 2]$;

$$\text{si } u(x) = \ln x \qquad \text{alors} \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{et } v'(x) = 3x^2 + x \quad \text{alors} \quad v(x) = x^3 + \frac{x^2}{2}$$

$$K = \int_1^2 u(x) \,.\, v'(x)\, dx = [u(x) \,.\, v(x)]_1^2 - \int_1^2 v(x) \,.\, u'(x)\, dx$$

$$= \left[\left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right) \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left[\left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right) \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$8\ln 2 + 2\ln 2 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 10\ln 2 - \frac{37}{12} \approx 3{,}85.$$

Remarque 3 : pour trouver, sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de la fonction ln on utilise le procédé de l'exemple 1, avec :

$$u(x) = \ln x \quad \text{alors} \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1 \quad \text{alors} \quad v(x) = x$$

il vient, $\int \ln x \, dx = \int u(x) \, . \, v'(x) \, dx =$
$u(x) \, . \, v(x) - \int v(x) \, . \, u'(x) \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$ et, en définitive, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une primitive de la fonction ln.

Exemple 2 : *détermination de* $K(x) = \int e^{2x}(x^2 - 2x + 3)\,dx$ *;*
la fonction $x \mapsto e^{2x}(x^2 - 2x + 3)$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$*; on effectue une intégration par parties, avec :*

$$u(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{donc} \quad u'(x) = 2x - 2$$

$$\text{et } v'(x) = e^{2x} \quad \text{donc} \quad v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

il vient, $K(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}(x^2 - 2x + 3) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{2x}(2x - 2)\,dx$ *;*

pour déterminer $\int e^{2x}(2x - 2)\,dx$*, on effectue une nouvelle intégration par parties, avec :*

$$u(x) = 2x - 2 \quad \text{donc} \quad u'(x) = 2$$

$$\text{et } v'(x) = e^{2x} \quad \text{donc} \quad v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

il vient, $\displaystyle\int e^{2x}(2x - 2)\,dx = \frac{e^{2x}}{2}(2x - 2) - \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}(2x - 2) - \frac{e^{2x}}{2} + c$ *;*

et en définitive :

$$K(x) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2 - 2x + 3) - \frac{e^{2x}}{4}(2x - 2) + \frac{e^{2x}}{4} + c$$

$$K(x) = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - 3x + \frac{9}{2}\right) + c.$$

TROISIÈME PARTIE

Dix séances d'entraînement

***D**ix séances d'entraînement permettent de retrouver, ici, le programme traité dans la deuxième partie.*

Ces séances font appel aux tests de la première partie et proposent des exercices corrigés. Les solutions sont entièrement rédigées. L'élégance de certaines d'entre elles a quelques fois été sacrifiée au profit de la généralité d'une méthode. Exceptionnellement, quand il est très facile de démarquer les corrections des exemples du cours, certaines parties des résolutions le précisent et ne donnent que les principaux résultats.

Les paragraphes du cours, dont la compréhension est importante pour les résolutions, sont indiqués en caractères gras après chaque énoncé. Quand plusieurs renvois sont nécessaires, seuls ceux qui caractérisent l'exercice sont mentionnés.

Il est conseillé de ne lire un corrigé qu'après avoir cherché soi-même une solution ; l'étude des parties du cours, correspondantes à l'exercice, facilite cette recherche.

0. Activité préparatoire
Mise en condition

0.1 Se familiariser avec le livre : comprendre la structure de l'ouvrage, connaître les modalités de travail proposées, lire l'avant-propos, parcourir la table des matières, feuilleter.

0.2 Tests 1 à 3 chapitre 1 : s'assurer d'une bonne connaissance de la terminologie de base.

1. Calcul numérique
Équations et inéquations simples

1.1 Tests 1 à 10 chapitre 2

1.2 Calculer : 7^4; $(-5)^4$; $(-5)^3$; 7^0; 0^7; 7^1; 7^{-1}; 4^{-3}; $(4+3^3)$; $(4+3)^3$; $(4-2^3)^{-3}$; $(4+3^{-2})^2$.

Solution : (2.5)

$7^4 = 7\times 7 \times 7 \times 7 = 2401$; $(-5)^4 = 625$; $(-5)^3 = -125$; $7^0 = 1$; $0^7 = 0$; $7^1 = 7$; $7^{-1} = \dfrac{1}{7} \approx 0{,}14$; $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}016$; $(4+3^3) = 4+27=31$; $(4+3)^3 = 7^3 = 343$; $(4-2^3)^{-3} = (4-8)^{-3} = -\dfrac{1}{4^3} = -\dfrac{1}{64} \approx -0{,}016$; $(4+3^{-2})^2 = \left(4+\dfrac{1}{9}\right)^2 = \left(\dfrac{36+1}{9}\right)^2 = \dfrac{1\,369}{81} \approx 16{,}9.$

1.3 Simplifier : $2^3 \times 2^{-5} \times 4^2$; $9^3 \times 6^{-2} \times 4$; $\sqrt[4]{32} \times \sqrt[5]{32}$; $\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{32}}$

Solution : (2.5 - 2.6)

$2^3 \times 2^{-5} \times 4^2 = 2^3 \times 2^{-5} \times 2^4 = 2^{3-5+4} = 2^2 = 4$;
$9^3 \times 6^{-2} \times 4 = (3^2)^3 \times (2 \times 3)^{-2}\,(2)^2 = 3^6 \times 2^{-2} \times 3^{-2} \times 2^2 = 3^4 \times 2^0 = 3^4 = 81$;
$\sqrt[4]{32} \times \sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{4}} \times 32^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = 32^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{32^9} \approx 4{,}76$
ou encore $\sqrt[4]{32} \times \sqrt[5]{32} = \sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[5]{2^5} = 4\sqrt[4]{2}$;
$\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{32}} = 32^{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}} = 32^{-\frac{1}{20}} = \dfrac{1}{\sqrt[20]{32}} \approx 0{,}84$
ou encore $\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{32}} = \dfrac{2}{2^{\frac{5}{4}}} = 2^{-\frac{5}{20}} = 2^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

1.4 Tests 1 et 2 chapitre 3

1.5 Résoudre les équations :

$$(E_1) : \quad \frac{(5x+1)^2}{3} - \frac{(8x+1)^2}{9} = \frac{(13x+1)(x+1)}{12} + \frac{5x^2}{36}$$

$$(E_2) : \quad (4-3x)^2 - (x^2-4x+4) = 0.$$

Solution : (2.7 - 3.1)

• $(E_1) \Leftrightarrow \dfrac{12(25x^2+10x+1)-4(64x^2+16x+1)}{36} = \dfrac{3(13x^2+13x+x+1)+5x^2}{36}$

$\Leftrightarrow 300x^2 - 256x^2 - 39x^2 - 5x^2 + 120x - 64x - 42x + 12 - 4 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 14x + 5 = 0$, (E_1) a pour solution $x = -\dfrac{5}{14} \approx -0{,}36$.

• $(E_2) \Leftrightarrow (4-3x)^2 - (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (4-3x-x+2)(4-3x+x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (6-4x)(2-2x) = 0 \Leftrightarrow 4(3-2x)(1-x) = 0$, (E_2) a pour solutions $x_1 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ et $x_2 = 1$.

1.6 Résoudre les inéquations :

$$(I_1) : \quad \sqrt{2}\,(1-2x) + 1 - x\sqrt{3} > 2(1 - x\sqrt{3})$$

$$(I_2) : \quad \frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x-2}} \geqslant -\frac{1}{2}$$

Solution : (3.2)

- $(I_1) \Leftrightarrow x(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) > 2 - 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x < \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ (car $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) < 0$), l'ensemble des solutions de (I_1) est donc $\left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\right[$
- (I_2) n'existe que si $x \neq -2$, $x \neq 0$ et $x \neq 2$ alors, sur

$$\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}, (I_2) \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} \times \frac{x-2}{x} + \frac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4+x+2}{2(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{2}{3},$$

l'ensemble des solutions de (I_2) est donc $[\frac{2}{3}, 2[\cup]2, +\infty[$.

2. Équations et inéquations

2.1 Tests 3 à 8 chapitre 3

2.2 Résoudre le système :

$$\begin{cases} (a): & x + 8y + 3z + 6\,000t = 16\,100 \\ (b): & 2x + 20y + z + 8\,000t = 26\,000 \\ (c): & 5x + 10y + 2z + 10\,000t = 23\,500 \\ (d): & 2x + 50y + 4z + 30\,000t = 63\,100 \end{cases}$$

Solution : (3.3.1)

L'une, quelconque, des méthodes de résolution présentées dans le cours permet de trouver la solution unique du système, on obtient : $x = 1\,800$, $y = 1\,000$, $z = 2\,000$, $t = 0{,}05$; si, par exemple, on utilise la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir successivement les systèmes équivalents suivants :

$$\begin{cases} x + 8y + 3z + 6\,000t = 16\,100 \; (a) \\ - 4y + 5z + 4\,000t = 6\,200 \; (b') \\ 30y + 13z + 20\,000t = 57\,000 \; (c') \\ -34y + 2z - 18\,000t = -30\,900 \; (d') \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \text{où :} \\ 2 \times (a) - (b) \text{ conduit à } (b') \\ 5 \times (a) - (c) \text{ conduit à } (c') \\ 2 \times (a) - (d) \text{ conduit à } (d') \end{array}$$

$$\begin{cases} x+3z+\ 8y+\quad 6000t = \quad 16100\ (a) \\ \qquad z-17y-\quad 9000t = -\ 15450\ (d'') \\ \qquad\quad -81y-\ 49000t = -\ 83450\ (b'') \\ \qquad -251y-137000t = -257850\ (c'') \end{cases}$$

où :
(d') : 2 conduit à (d'')
$\dfrac{5}{2} \times (d') - (b')$ conduit à (b'')
$\dfrac{13}{2} \times (d') - (c')$ conduit à (c'')

$$\begin{cases} x+3z+\ 8y+\quad 6000t = \quad 16100\ (a) \\ \qquad z-17y-\quad 9000t = -\ 15450\ (d'') \\ \qquad\qquad y+\ \dfrac{49000}{81}t = \dfrac{83450}{81}\ (b''') \\ \qquad\qquad -\dfrac{1202000}{81}t = -\dfrac{60100}{81}\ (c''') \end{cases}$$

où :
$(b'') : (-81)$ conduit à (b''')
$\dfrac{-251}{-81} \times (b'') - (c'')$ conduit à (c''')

2.3 Pour quelles valeurs de x a-t-on :

$$-2 < -2x^2 + x + 1 < 1\ ?$$

Solution : (3.4)

Le problème revient à résoudre le système d'inéquations :

$$\begin{cases} -2x^2 + x + 1 > -2 \\ -2x^2 + x + 1 < 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} -2x^2 + x + 3 > 0 \quad (a) \\ x(-2x+1) < 0 \quad (b) \end{cases}$$

- inéquation (a) : le trinôme $-2x^2 + x + 3$ admet pour racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$, l'inéquation (a) est donc vérifiée pour tout x de $\mathcal{D}_a = \left]-1, \dfrac{3}{2}\right[$ (trinôme du signe de $-(-2) = 2$) ;
- inéquation (b) : le trinôme $x(-2x+1)$ admet pour racines $x' = 0$ et $x'' = \dfrac{1}{2}$, l'inéquation (b) est donc vérifiée pour tout x de $\mathcal{D}_b =]-\infty, 0[\cup]\dfrac{1}{2}, +\infty[$ (trinôme du signe de (-2)) ;
- en définitive : le système d'inéquations proposé est vérifié pour tout x de $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$, l'ensemble des solutions est donc $]-1, 0[\cup \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$

2.4 Résoudre le système :

$$\begin{cases} xz - xy = 0 & (a) \\ z + xy = 2 & (b) \\ 2y + 2x = 7 & (c) \end{cases}$$

Solution : (3.3.1,*a* - 3.4)

Le système se résoud aisément par substitution mais certaines simplifications peuvent faire disparaître des solutions qu'il ne faut pas négliger, ainsi :

si $x \neq 0$, (a) donne $z = y$, avant d'aller plus loin il faut étudier le cas où $x = 0$;

si $x = 0$, (a) est vérifiée, (b) donne $z = 2$ et (c) donne $y = \dfrac{7}{2}$;

si $x \neq 0$, puisque (a) donne $z = y$, (b) donne $y + xy = 2$ c'est-à-dire $y(1 + x) = 2$ alors, si $x \neq -1$, $y = \dfrac{2}{1+x}$; on étudie donc le cas où $x = -1$, alors (a) donne $-z + y = 0$, c'est-à-dire $z - y = 0$, et (b) donne $z - y = 2$, les équations obtenues sont incompatibles, on ne peut donc pas avoir $x = -1$ dans une des solutions du système ;

si $x \neq 0$, et $x \neq -1$, puisque $y = \dfrac{2}{1+x}$; (c) donne

$$\frac{4}{1+x} + 2x = 7 \Leftrightarrow 4 + 2x + 2x^2 = 7(1+x) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) = 0$$

qui admet les deux racines distinctes $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ (alors $y_1 = z_1 = 4$) et $x_2 = 3$ $\left(\text{alors } y_2 = z_2 = \dfrac{1}{2}\right)$

En définitive, le système admet pour solutions les trois triplets de type (x, y, z) suivants :

$$\left(0, \frac{7}{2}, 2\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, 4, 4\right), \quad \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

2.5 Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \quad -2x + 5 > \sqrt{x-2} ; \qquad (I_2) : \quad x - 1 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x - 4}$$

Solution : (3.6)

Les inéquations (I_1) et (I_2) sont résolues respectivement aux exemples 5 et 6 du paragraphe 3.6.

3. Connaissances de base sur les fonctions : généralités, limites, continuité, dérivabilité. Rappels de cours

3.1 Tests 1 à 9 chapitre 4

3.2 Tests 1 à 10 chapitre 5

3.3 Tests 1 à 8 chapitre 6

3.4 Tests 1 à 6 chapitre 7

4. Limites, continuité, dérivabilité. Exercices

4.1 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x}{x^4 - 3x^2 - 3x}\ ;\quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3 + 2x^2}\ ;\quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x^4 + 2x^3}$$

Solution : (6.1.1 - 6.1.2,*a* - 6.3)

On est en présence de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; si $x \to 0$ une fonction rationnelle en x a la même limite que la fonction associée au quotient de ses fonctions monômes de plus bas degré du numérateur et du dénominateur (voir aussi la remarque de l'exercice **4.3**), donc :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x}{x^4 - 3x^2 - 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2x}{-3x} = \dfrac{2}{3}$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^3 + 2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2x} = \infty$

$$\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^3 + 2x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^3 + 2x^2} = -\infty\right);$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^4 + 2x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{2x^2} = -\infty$

4.2 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{-3x-1}\ ; \quad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\ ; \quad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-2x-4}{x^2-x+1}$$

Solution : (6.1.2,*c* - 6.3)

On est en présence de la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$; si $x \to \infty$ une fonction rationnelle en x a la même limite que la fonction associée au quotient de ses fonctions monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur, donc :

- $$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{-3x-1} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{-3x} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x}{-3} = \infty$$

  $$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{-3x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{-3x-1} = +\infty\right);$$

- $$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1\ ;$$

- $$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{-2x-4}{x^2-x+1} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

  $$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-4}{x^2-x+1} = 0^- \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x-4}{x^2-x+1} = 0^+\right)$$

4.3 Déterminer la limite en -1 de la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$$

Solution : (4.4.2 - 6.3)

Si $x \to -1$ $(x^3+1) \to 0$ et $(x^2+3x+2) \to 0$; pour lever l'indétermination on factorise numérateur et dénominateur par $(x+1)$ puisque -1 est un zéro des polynômes x^3+1 et x^2+3x+2 (**remarque** : pour les limites de l'exercice **4.1** on pouvait factoriser numérateurs et dénominateurs par x, c'est-à-dire par $(x-0)$) ;

il vient : $\displaystyle \lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+1}{x+2} = 3.$

4.4 Déterminer la limite en -2 de la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt{3-3x}}{(x+3)(x+2)}$$

Solution : (2.7 - 6.3)

Si $x \to -2$ $(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{3-3x}) \to 0$ et $(x+3)(x+2) \to 0$; pour lever l'indétermination, on utilise l'égalité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, il vient :

$$\sqrt{x^2+5} - \sqrt{3-3x} = \frac{(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{3-3x})(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x})}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x}}$$

$$= \frac{x^2+5-3+3x}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x}} = \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x}} = \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x}},$$

donc :

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{(x+3)(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{3-3x})} = -\frac{1}{6}$$

4.5 Déterminer, pour x infini, les limites de la fonction f telle que

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$$

Solution : (6.3)

- Si $x \to -\infty$ $\sqrt{x^2+x} \to +\infty$ et $(-x) \to +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- Si $x \to +\infty$ $\sqrt{x^2+x} \to +\infty$ et $(-x) \to -\infty$, on est en présence de la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$, pour lever l'indétermination, on utilise l'égalité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

on est en présence de la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$; pour lever l'indétermination on cherche à effectuer une simplification, ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}$$

si $x \to +\infty$ on a $x > 0$ donc $|x| = x$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

Remarque : pour $x \to -\infty$ on a $x < 0$ donc $|x| = -x$, on pouvait écrire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1},$$

si $x \to -\infty$ $\frac{1}{x} \to 0^-$ $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \to 1^-$ $\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) \to 0^-$ et $f(x) \to +\infty$

4.6 Soit la fonction $f : x \mapsto -3x^3 + 2x^2 + 1 + \frac{a}{x}$ où a est un paramètre réel.

1) Étudier la limite de f quand $|x| \to +\infty$

2) Étudier la limite de f quand $x \to 0$; donner, quand il existe, un prolongement par continuité de f en 0.

Solution : (6.2.3 - 6.3)

La fonction f est définie et continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}^*$.

1) Si $|x| \to +\infty$ $\frac{a}{x} \to 0$ donc

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 1) = \lim_{|x|\to+\infty} (-3x^3) = \infty$$

et on peut préciser :
quand $x \to +\infty$ $f(x) \to -\infty$ et quand $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$

2) Si $x \to 0$ $(-3x^3 + 2x^2 + 1) \to 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a}{x}$ dépend de a et de x ;

- Pour $a > 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{a}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{a}{x} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$

- Pour $a < 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{a}{x} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{a}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$$

- Pour $a = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

donc la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ où $a = 0$ (donc $g(x) = -3x^3 + 2x^2 + 1$) pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et par $g(0) = 1$ est un prolongement par continuité de f en 0.

4.7 Étudier la continuité des fonctions f et g suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{2\sqrt{(x-3)^2}}{x^2 - 9} \qquad g : x \mapsto f(x) - \frac{|x-3|}{3x-9}$$

Solution : (6.2 - 6.3)

Les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R} - \{-3, +3\}$ et constituées de fonctions continues sont continues sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{-3, +3\}$;

- Pour $x \to -3$:

$$2\sqrt{(x-3)^2} \to 12, \quad (x^2 - 9) \to 0, \quad f(x) \to \infty$$

$$\frac{|x-3|}{3x-9} \to -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}, \quad g(x) \to \infty$$

les fonctions f et g n'ont pas de limite finie, elles ne sont donc pas prolongeables par continuité en -3.

- Pour $x \to +3$:

quand $x > 3$ $\quad f(x) = \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2}{x+3}$ donc si $x \to 3^+$ $\quad f(x) \to \dfrac{1}{3}$,

quand $x < 3$ $\quad f(x) = \dfrac{2(3-x)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-2}{x+3}$ donc si $x \to 3^-$ $\quad f(x) \to -\dfrac{1}{3}$,

f admet une limite à droite en 3 et une limite à gauche en 3 mais ces deux limites ne sont pas égales : f n'est pas prolongeable par continuité en 3 ;

quand $x > 3$ $\quad \dfrac{|x-3|}{3x-9} = \dfrac{x-3}{3(x-3)} = \dfrac{1}{3}$ donc si $x \to 3^+$ $\quad g(x) \to 0$,

quand $x < 3$ $\quad \dfrac{|x-3|}{3x-9} = \dfrac{3-x}{3(x-3)} = -\dfrac{1}{3}$ donc si $x \to 3^-$ $\quad g(x) \to 0$,

on a donc $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = 0$ et la fonction h définie et continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{-3\}$:
par $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{-3, +3\}$
et par $h(3) = 0$,
est un prolongement par continuité de la fonction g en 3.

4.8 Soit la fonction f définie sur R_+ par $f(x) = \sqrt{x}$; en utilisant la définition du nombre dérivé, trouver $f'(2)$; en déduire l'équation de la droite (T) tangente, au point 2, à la courbe représentative de la fonction f.

Solution : (7.1)

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la droite (T), l'équation de cette droite est donc de la forme $y = \dfrac{x}{2\sqrt{2}} + b$; la droite (T) passe par le point $(2, \sqrt{2})$ on a donc $\sqrt{2} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} + b$ donc $b = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et, en définitive, l'équation de la droite (T) est $y = \dfrac{x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Remarque : on pouvait directement appliquer la formule

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(2) + f'(2)(x-2) = \sqrt{2} + \frac{(x-2)}{2\sqrt{2}}$$

4.9 On considère sur $]0, +\infty[$ la fonction f telle que :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{pour } x > 2,$$

$$f(2) = \sqrt{2}, \quad f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{3\sqrt{2}}{x} \quad \text{pour } 0 < x < 2.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 2.

Solution : (6.1 - 7.1)

Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est définie ;

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x} = \sqrt{2} = f(2)$,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(-\frac{\sqrt{2}}{x} + 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} = f(2),$$

puisque $f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$ la fonction f est continue en 2.

- $$f'_d(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(voir exercice **4.8**),

$$f'_g(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-\frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-2\sqrt{2} + x\sqrt{2}}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

puisque $f'_d(2) = f'_g(2)$ la fonction f est dérivable en 2 et $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Remarque : il est alors aisé de montrer que la fonction f est continue et dérivable sur son domaine de définition.

5. ÉTUDES DE FONCTIONS. RAPPELS DE COURS

5.1 Test 7 chapitre 7.

5.2 Tests 1 à 13 chapitre 8.

5.3 Tests 1 à 6 chapitre 9.

6. ÉTUDES DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

6.1 Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction polynôme de degré 3 ; déterminer f sachant que sa courbe représentative (C), dans un repère cartésien, passe par des extremums pour $x = 0$ et $x = 2$, que $f(0) = -1$ et que $f(1) = -3$; montrer que le point $(1, -3)$ est un point d'inflexion (on rappelle qu'en un point d'inflexion si f'' existe alors f'' s'annule en changeant de signe) ; trouver l'équation de la droite (T) tangente à (C) au point d'abscisse 1 et préciser les positions respectives de (C) et de (T) quand x tend vers 1 ; vérifier que le point $(1, -3)$ est le centre de symétrie de (C).

Solution : (3.3 - 5.6 - 7.1 - 7.2 - 8.1)

La fonction f est explicitée par une expression de la forme

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d sont des nombres réels avec $a \neq 0$; elle est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

- $f(0) = -1$ donc $d = -1$; $f(1) = -3$ donc $a + b + c + d = -3$; (C) passe par un extremum pour $x = 0$ et pour $x = 2$ donc $f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$, c'est-à-dire, $c = 0$ et $12a + 4b + c = 0$; on obtient le système :

$$\begin{cases} d = -1 \\ a + b + c + d = -3 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 4b = 8 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$$

  d'où on tire $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = -1$; on a donc :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \quad \text{et} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

- f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 6x - 6$; f'' s'annule, en changeant de signe, en 1 : le point $(1, f(1))$ est un point d'inflexion ($f(1) = -3$).

- Au point $(1, -3)$ la droite tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(1) = -3$; l'équation de (T) est de la forme $y = -3x + b$; (T) passe par le point de tangence $(1, -3)$ donc $-3 = -3 + b$ et $b = 0$; l'équation de (T) est $y = -3x$; $(f(x) - y) = (x^3 - 3x^2 - 1) - (-3x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$.

  $\lim\limits_{x \to 1^+} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1)^3 = 0^+$ donc pour $x \to 1^+$ la courbe (C) est au-dessus de la droite (T),

  $\lim\limits_{x \to 1^-} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1)^3 = 0^-$ donc pour $x \to 1^-$ la courbe (C) est au-dessous de la droite (T).

- Soit M le point d'inflexion $(1, -3)$; dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) a pour équation $y = f(x)$, soit $Y = g(X)$ l'équation de la courbe (C) dans le repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$, on a : $y = Y - 3$ et $x = X + 1$ donc

$$\begin{aligned} g(X) = Y = y + 3 = f(x) + 3 &= f(X + 1) + 3 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 - 1 + 3 \\ &= X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - 3X^2 - 6X - 3 - 1 + 3 = X^3 - 3X \end{aligned}$$

  alors,

$$g(-X) = -X^3 + 3X = -g(X).$$

  g est donc une fonction impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine des axes du repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$ c'est-à-dire par rapport au point M.

6.2 Étudier la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + \dfrac{1}{2}$

Solution : (5.6.1 - 7.2 - 8.1 - 8.3.3, a - 9.1)

- Fonction polynôme, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$;

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + \frac{1}{2} = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} = f(x),$$

f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, sa courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal, il suffit donc d'étudier f sur $[0, +\infty[$

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$, sur $[0, +\infty[$ f' a le même signe que $x - 1$:

  si $x > 1$ $f'(x) > 0$, f est croissante sur $]1, +\infty[$;

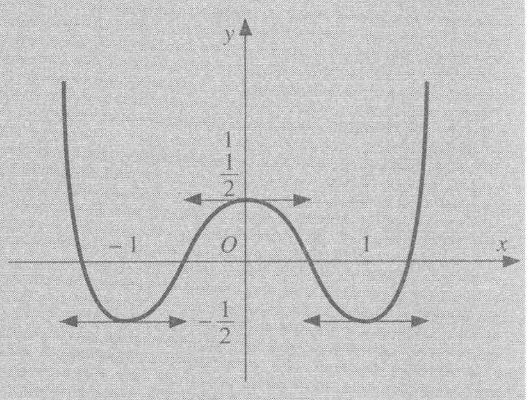
  si $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$, f est décroissante sur $[0, 1[$;

  si $x = 1$ $f'(x)$ s'annule en changeant de signe, le point $(1, f(1))$ est un extremum : minimum $f(1) = -\dfrac{1}{2}$

  si $x = 0$ $f'(x)$ s'annule en changeant de signe, le point $(0, f(0))$ est un extremum : maximum $f(0) = \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.
- Tableau de variations et représentation graphique :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$			$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		



Remarque 1 : intersections de (C) et de l'axe des abscisses : les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses vérifient l'équation

$$x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

on obtient donc les abscisses

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Remarque 2 : convexité et concavité

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 12x^2 - 4$ s'annule en changeant de signe pour $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$; sur $[0, +\infty[$, on a :

si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f''(x) > 0$, f convexe sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$

si $0 \leqslant x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $f''(x) < 0$, f concave sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ le point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est un point d'inflexion, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{18}$

6.3 Déterminer la fonction $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des nombres réels, sachant que sa courbe représentative (C), dans un repère cartésien, a pour asymptotes les droites d'équation $x = 2$ et $y = 1$ et qu'elle passe par le point $(1, -1)$.

Solution : (4.4.2, a - 8.3.1 - 8.3.2)

Il faut $c \neq 0$, en effet si $c = 0$ (avec évidemment $d \neq 0$) et si a ou b ne sont pas nuls, la courbe (C) est une droite ce qui est contraire aux contraintes de l'énoncé.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et on a : $f(x) = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$ et à l'aide d'une division euclidienne, on obtient $f(x) = \frac{a}{c} + \dfrac{r}{x + \frac{d}{c}}$ où r est un nombre réel non nul.

Puisque (C) a pour asymptote la droite d'équation $x = 2$, on a : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$

donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r}{x + \dfrac{d}{c}} = \infty$ et, par suite, $\lim\limits_{x \to 2} \left(x + \dfrac{d}{c}\right) = 0$ d'où on tire $\dfrac{d}{c} = -2$.

Puisque (C) a pour asymptote la droite d'équation $y = 1$, on a : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$

or $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{r}{x + \dfrac{d}{c}} = 0$ donc $\dfrac{a}{c} = 1$.

On peut donc écrire : $f(x) = 1 + \dfrac{r}{x - 2}$ et $f(1) = -1$ équivaut à $1 + \dfrac{r}{1 - 2} = -1$ d'où on tire $r = 2$.

En définitive :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x - 2} = \frac{x}{x - 2}$$

6.4 Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

Solution : (6.2.3 - 7.2 - 8.3.1 - 8.3.2 - 9.1)

- Il faut $x^2 - 4 \neq 0$, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$, fonction rationnelle, elle est continue et dérivable sur tout intervalle de $\mathcal{D}f$, où $f(x) = \dfrac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \dfrac{1}{x + 2}$
- $f'(x) = \dfrac{-1}{(x + 2)^2}$ pour tout x de $\mathcal{D}f$ on a $f'(x) < 0$, f est décroissante sur $]-\infty, -2[$, $]-2, 2[$ et $]2, +\infty[$
- $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote à la courbe (C) représentative de f; pour $x \to +\infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0^+$ (C) est au-dessus de son asymptote, pour $x \to -\infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0^-$ (C) est au-dessous de son asymptote (les variations de f suffisent pour préciser ces positions).

  $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$ (car si $x \to -2$ $(x + 2) \to 0$), la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C); pour $x \to -2^+$ $(x+2) \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$, pour

$x \to -2^-$ $(x+2) \to 0^-$ $f(x) \to -\infty$ (les variations de f suffisent pour préciser ces signes de l'infini).

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$ (car si $x \to 2$ $(x+2) \to 4$), on peut donc prolonger la fonction f en 2 par continuité ; la fonction g définie par :

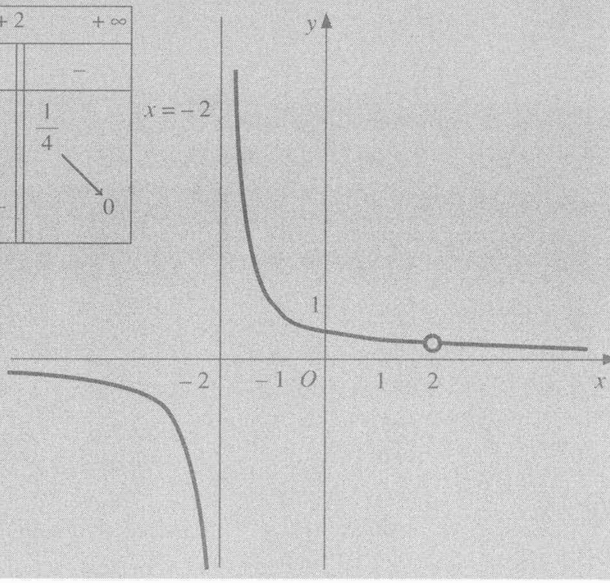
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} - \{-2, +2\} \\ \text{et } g(2) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f en 2, définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Remarque : le point (2, 1/4) est ce qu'on appelle parfois un point limite de (C).

- Tableau de variations et représentation graphique :

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$ ‖ $\frac{1}{4}$	↘	0



6.5 1) Étudier la fonction $g : x \mapsto 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$; montrer que si $g(x_0) = 0$ alors $x_0 \in [0, 1]$.

2) Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1}$; montrer que la courbe (C) représentative de la fonction f admet une courbe asymptote d'équation $y = h(x)$, qu'on déterminera, quand x tend vers l'infini.

3) Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2 ; préciser les positions respectives de (T) et de (C) quand x tend vers 2.

4) On donne $x_0 \approx 0{,}2$; étudier f et construire, dans un même repère cartésien, les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = h(x)$.

Solution : (4.4 - 6.2.2 - 7.2 - 8.1 - 8.3.4 - 9.1)

1) La fonction polynôme g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$;

$g'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $g'(x) \geqslant 0$, g est croissante sur $\mathbb{R}$,

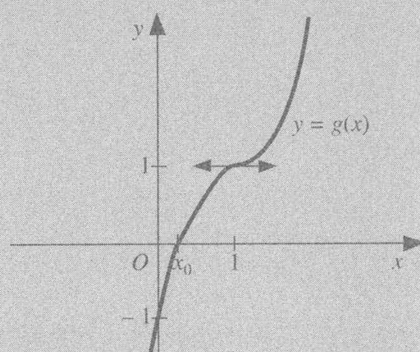
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$g'(x)$ s'annule sans changer de signe pour $x = 1$, le point $(1, g(1))$ est un point d'inflexion stationnaire, $g(1) = 1$;

$$\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = \lim_{|x| \to +\infty} x^3 = \infty$$

et $\displaystyle \lim_{|x| \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = \infty$,

la courbe représentative de g admet des branches paraboliques dans la direction de l'axe des ordonnées.



$g(1) = 1$ et $g(0) = -1$; g est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, elle croît de -1 à $+1$ (g réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, +1]$), elle s'annule donc pour une valeur $x_0 \in [0, 1]$ (théorème des valeurs intermédiaires) ; puisque g est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule qu'en ce point x_0.

2) La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{1\}$, continue et dérivable sur tout intervalle de $\mathcal{D}f$.

La division euclidienne du numérateur par le dénominateur permet d'écrire :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 + \frac{-1}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1}
-2x^2 - x + 2 & \\
+2x^2 - 2x & \\ \cline{1-1}
-3x + 2 & \\
+3x - 3 & \\ \cline{1-1}
-1 &
\end{array}$$

d'où :

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f(x) - (x^2 - 2x - 3))$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{-1}{x-1}\right) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = 0,$$

et on en conclut que la courbe d'équation $y = h(x) = x^2 - 2x - 3$ est asymptote à la courbe (C) pour x infini ; cette courbe asymptote est une parabole : la courbe (C) admet des branches paraboliques dans la direction de l'axe des ordonnées ;

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty,$$

quand $x \to +\infty$ $\quad -\dfrac{1}{x} \to 0^-$ $\quad (C)$ est au-dessous de sa parabole asymptote,

quand $x \to -\infty$ $\quad -\dfrac{1}{x} \to 0^+$ $\quad (C)$ est au-dessus de sa parabole asymptote.

3) $f'(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{2(x-1)^3 + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$, l'équation de la droite (T) est $y = f(2) + (x-2)f'(2) = -4 + (x-2)(3)$ l'équation de (T) est en définitive :

$$y = 3x - 10$$

$$(f(x) - (3x - 10)) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x - 1} - 3x + 10$$

$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 1} = \frac{(x-2)^3}{x - 1} ;$$

pour $x \to 2$ $\quad (x-1) \to 1 > 0$,

pour $x \to 2^+$ $\quad (x-2)^3 \to 0^+$ $\quad (f(x) - (3x - 10)) \to 0^+$ (T) est au-dessus de (C),

pour $x \to 2^-$ $\quad (x-2)^3 \to 0^-$ $\quad (f(x) - (3x - 10)) \to 0^-$ (T) est au-dessous de (C),

Remarque : les positions respectives de (C) et de (T) quand x tend vers 2 permettent de conclure que le point $(2, f(2))$ est un point d'inflexion, $f(2) = -4$.

4)

- $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ donc, d'après les résultats obtenus pour la première question :
  - pour $x < x_0$ $\quad f'(x) < 0$ $\; f$ est décroissante sur $]-\infty, x_0[$
  - pour $x_0 < x < 1$ $\quad f'(x) > 0$ $\; f$ est croissante sur $]x_0, 1[$
  - pour $x > 1$ $\quad f'(x) > 0$ $\; f$ est croissante sur $]1, +\infty[$
  - pour $x = x_0$ $\quad f'(x)$ s'annule en changeant de signe
  - le point $(x_0, f(x_0))$ est un extremum : d'après les variations de f c'est un minimum, pour $x_0 \approx 0{,}2$ $\; f(x_0) \approx -2{,}1$

- $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) = \infty$ (car si $x \to 1$ $\quad (x^2 - 2x - 3) \to -4$ $\quad (x-1) \to 0$ et $\dfrac{-1}{x-1} \to \infty)$,

  la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe (C) ;

– pour $x \to 1^+$ $(x-1) \to 0^+$ $\dfrac{-1}{x-1} \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$

– pour $x \to 1^-$ $(x-1) \to 0^-$ $\dfrac{-1}{x-1} \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$

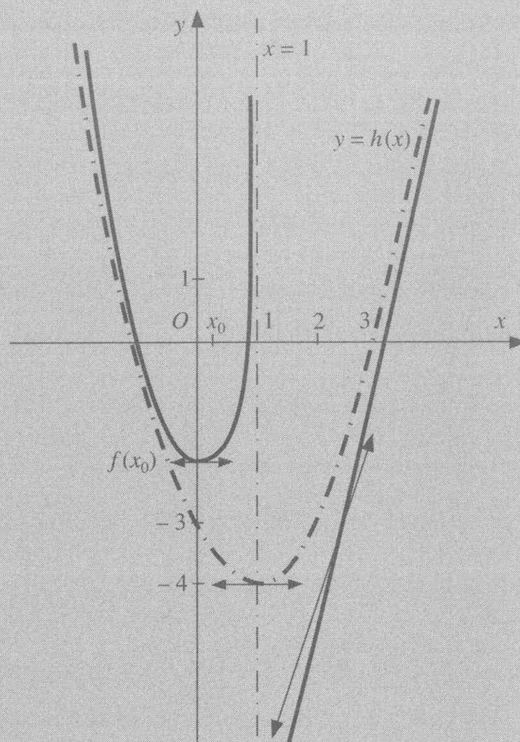
- Pour x infini, on a vu que (C) admet pour asymptote la parabole d'équation $y = h(x) = x^2 - 2x - 3$, pour construire cette parabole, on a :

  $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ la parabole a pour minimum le point $(1, -4)$,

  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ la parabole et l'axe des abscisses ont pour intersection les points d'abscisse -1 et 3,

  $h(0) = -3$ le point $(0, -3)$ est le point d'intersection de la parabole et de l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		x_0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



7. ÉTUDES DE FONCTIONS DÉFINIES À L'AIDE DE RADICAUX

7.1 Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(-x^2+5x)^2} - 4$; montrer que, dans un repère orthogonal, la courbe (C) représentative de f admet un axe de symétrie.

Solution : (2.2 - 4.1.4 - 5.6 - 8.2.2,*a*)

- Puisque $(-x^2+5x)^2 \geqslant 0$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$; $-x^2+5x=0$ pour $x=0$ ou pour $x=5$, f est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}-\{0,5\}$ (car si $u(x)>0$ $\frac{d}{dx}\sqrt{u(x)} = ($ $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ pour u dérivable).
- On peut écrire $f(x) = |-x^2+5x| - 4$:
  sur $]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$ $-x^2+5x<0$ $|-x^2+5x| = x^2-5x$ donc f est la restriction à $]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$ de la fonction $f_1 : x \mapsto x^2-5x-4$,
  sur $]0, 5[$ $-x^2+5x>0$ $|-x^2+5x| = -x^2+5x$ donc f est la restriction à $]0, 5[$ de la fonction $f_2 : x \mapsto -x^2+5x-4$;
  les fonctions f_1 et f_2 sont des paraboles, leur étude n'offre pas de difficulté (on peut démarquer l'étude de la fonction h de l'exercice **6.5**).
- Une étude particulière doit être faite aux points d'abscisse 0 et 5 :

$$f(0) = f(5) = -4,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f_1'(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x-5) = -5$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f_2'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-2x+5) = +5,$$

le point $(0, -4)$ est un point anguleux ;

$$\lim_{x\to 5^-} f'(x) = \lim_{x\to 5^-} f_2'(x) = \lim_{x\to 5^-} (-2x+5) = -5$$

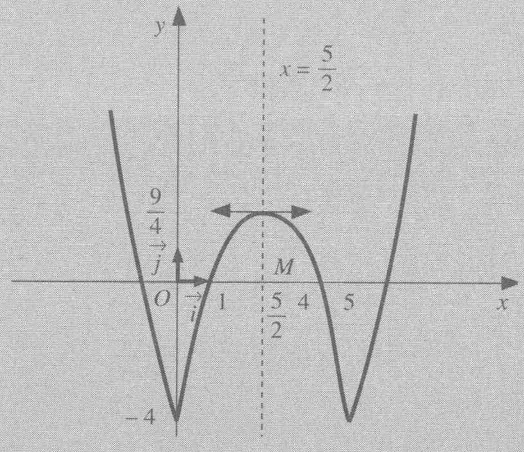
et

$$\lim_{x\to 5^+} f'(x) = \lim_{x\to 5^+} f_1'(x) = \lim_{x\to 5^+} (2x-5) = 5,$$

le point $(5, -4)$ est un point anguleux.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-5 ‖ $+5$	$+$	0	$-$	-5 ‖ $+5$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	$\frac{9}{4}$	↘	-4	↗	$+\infty$

- La courbe (C) n'a qu'un maximum, si elle admet un axe de symétrie, cet axe passe par ce maximum $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$; cet axe ne peut donc être que la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$



Dans un repère orthogonal, la courbe (C) a pour équation $y = f(x)$ et soit M le point $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ dans ce repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; dans le repère $(M, \vec{i}, \vec{j})$ soit $Y = g(X)$ l'équation de la courbe (C), on a : $y = Y$ et $x = X + \frac{5}{2}$, donc

$$g(X) = Y = y = f(x) = f\left(X + \frac{5}{2}\right) = \left|-\left(X + \frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(X + \frac{5}{2}\right)\right| - 4$$

$$= \left|-X^2 - 5X - \frac{25}{4} + 5X + \frac{25}{2}\right| - 4 = \left|-X^2 + \frac{25}{4}\right| - 4$$

donc $g(-X) = g(X)$ g est une fonction paire, sa courbe représentative est, dans un repère orthogonal, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées c'est-à-dire ici, par rapport à la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$

7.2 Étudier les fonctions g et f telles que

$$g(x) = 2\sqrt{x - 2} \quad \text{et } f(x) = x - g(x)$$

(les courbes représentatives de g et de f, dans un repère cartésien, sont respectivement appelées C_g et C_f).

Solution : (5.3 - 6.6 - 7.1.3 - 7.2.4 - 8.2 - 8.3.3,*b* et *c* - 9.1)

- Les fonctions g et f sont définies et continues sur $[2, +\infty[$ ($x \geqslant 2$) et dérivables sur $]2, +\infty[$ ($x > 2$).

- $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ $\quad g'(x) > 0$, g est croissante sur $]2, +\infty[$;

  $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}}$, $\sqrt{x-2}-1 = 0$ pour $x = 3$,

  pour $x > 3$ $\quad \sqrt{x-2} > 1$ $\quad f'(x) > 0$, f est croissante sur $]3, +\infty[$,

  pour $2 < x < 3$ $\quad \sqrt{x-2} < 1$ $\quad f'(x) < 0$, f est décroissante sur $]2, 3[$,

  pour $x = 3$ $\quad f'(x)$ s'annule en changeant de signe, le point $(3, f(3))$ est un extremum : minimum $f(3) = 1$.

- $g(2) = 0$, $\displaystyle \lim_{x\to 2+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{2\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{2}{\sqrt{x-2}} = +\infty$,

  le point $(2, 0)$ est un point d'arrêt de la courbe C_g qui admet en ce point une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

  Remarque : on pouvait aussi écrire

$$\lim_{x\to 2+} g'(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 2+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = +\infty$$

  $f(2) = 2$, $\displaystyle \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \left(1 - \frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right) = -\infty$,

  le point $(2, 2)$ est un point d'arrêt de la courber C_f qui admet en ce point une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ et $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, la courbe C_g

  admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

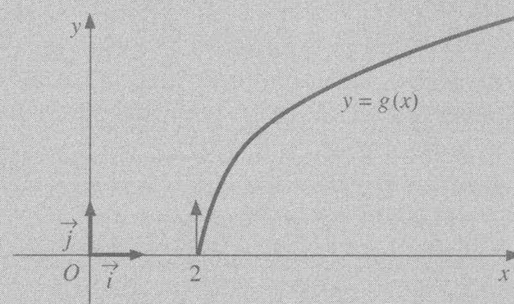
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{g(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{g(x)}{x}\right) = 1,$$

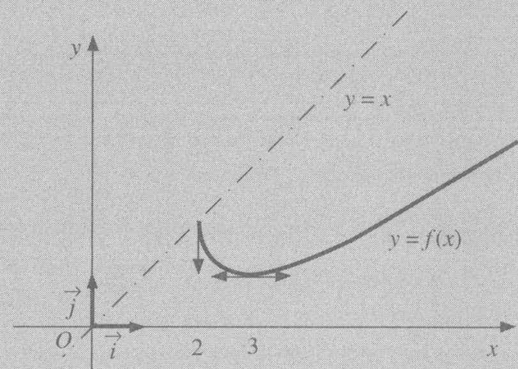
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} (-g(x)) = -\infty,$$

la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = x$.

x	2		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



7.3 Étudier la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{|4 - x^2|}$

Solution : (2.2 - 3.6 - 7.2.4 - 8.2.2, b - 8.3.2 - 8.3.3, c - 9.1)

1) la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$; soit (C) sa courbe représentative dans un repère cartésien.

2) f est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ (il faut $4 - x^2 \neq 0$);

- pour $x \in]-2, +2[$ on a $4 - x^2 > 0$ donc $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$;

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$f'(x)$ a le même signe que $(\sqrt{4-x^2}-x)$ qui s'annule pour $x = \sqrt{4-x^2}$ donc pour $x^2 = 4 - x^2$ avec $x \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $x = \sqrt{2}$ (solution positive), on a :

sur $]-2, \sqrt{2}[$ f' est continue et ne s'annule pas, elle garde donc un signe constant : $0 \in]-2, \sqrt{2}[$ et $f'(0) = 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est croisssante ;

sur $]\sqrt{2}, 2[$ f' est continue et ne s'annule pas, elle garde donc un signe constant : $\sqrt{3} \in]\sqrt{2}, 2[$ et $f'(\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3}) < 0$ donc $f'(x) < 0$ et f est décroissante ;

$f'(x)$ s'annule, en changeant de signe, pour $x = \sqrt{2}$, le point $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ est un extremum : un maximum d'après les variations de f, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Remarque : les calculs de $f'(0)$ et de $f'(\sqrt{3})$ n'étaient pas nécessaires ; en effet, pour préciser l'allure des demi-tangentes en -2 et $+2$, il faut chercher les dérivées à droite en -2 et à gauche en $+2$; les résultats obtenus donneront, outre l'allure des demi-tangentes, le signe de $f'(x)$; on obtient ainsi :

$\lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty$ donc la demi-tangente à (C) à droite en -2 est parallèle à l'axe des ordonnées et si $x \to -2^+$ $(x \in]-2, \sqrt{2}[)$ $f'(x) > 0$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty$ donc la demi-tangente à (C) à droite en $+2$ est parallèle à l'axe des ordonnées et si $x \to +2^-$ $(x \in]\sqrt{2}, 2[)$ $f'(x) < 0$.

- pour $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ on a $4 - x^2 < 0$ donc $f(x) = x + \sqrt{x^2-4}$;

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$f'(x)$ ne peut s'annuler que si $-x = \sqrt{x^2-4}$, donc pour $x^2 = x^2 - 4$ avec $x \leqslant 0$; l'équation $x^2 = x^2 - 4$ n'admet pas de solution, f' garde donc un signe constant sur chacun de ses intervalles de continuité :

sur $]-\infty, -2[$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f'(x) = -\infty$ donc $f'(x) < 0$, f est décroissante, et la demi-tangente à (C) à gauche en -2 est parallèle à l'axe des ordonnées ;

sur $]2, +\infty[$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty$ donc $f'(x) > 0$, f est croissante, et la demi-tangente à (C) à gauche en 2 est parallèle à l'axe des ordonnées.

3) pour x infini : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ ou encore, puisqu'alors $x \neq 0$,

$$f(x) = x + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = x + |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} ;$$

- quand $x \to +\infty$ $x > 0$ donc $|x| = +x$ et, par suite :

$$f(x) = x + x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$(f(x) - 2x) = \sqrt{x^2 - 4} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

ces trois limites permettent de conclure que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$, et puisque

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0^-$ la courbe (C) est au-dessous de son asymptote.

- quand $x \to -\infty$ $x < 0$ donc $|x| = -x$ et, par suite :

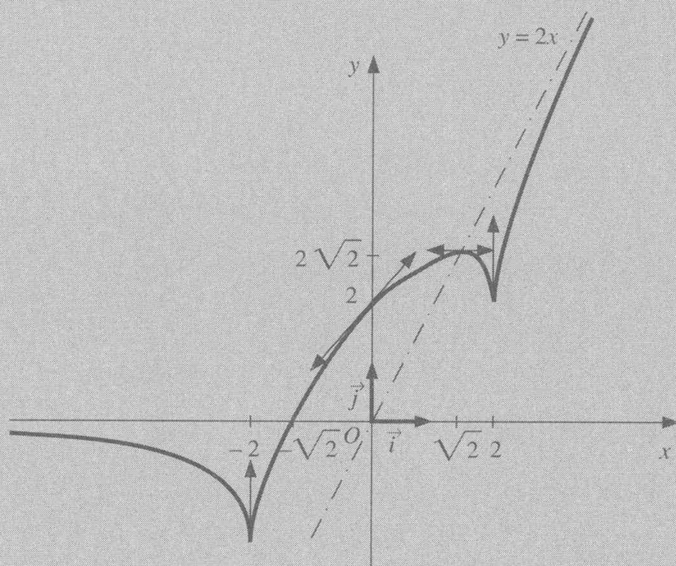
$$f(x) = x - x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)$$

$$= \frac{x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \frac{x \, \frac{4}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{4}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)}$$

quand $x \to -\infty$ $\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{4}{x^2}}\right) \to 2$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$, la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à la courbe (C), la courbe est au-dessous de son asymptote.

4) $f(2) = 2$ et $f(-2) = -2$, d'après les positions des demi-tangentes, à droite et à gauche en -2 et $+2$, (voir plus haut), les points $(2, 2)$ et $(-2, -2)$ sont des points de rebroussement.



x	$-\infty$		-2		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$,
le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe (C) au point $(0, 2)$ est égal à 1.

7.4 Étudier, sur $[-2, +2]$ la fonction f telle que $(f(x))^3 = (x-1)^2(x+1)$; soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, déterminer l'équation de la droite (T) tangente, en zéro, à la courbe (C) et préciser, suivant les valeurs de x, les positions respectives de (C) et de (T).

(On pourra poser $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$ en convenant que, pour $u < 0$, $\sqrt[3]{u}$ signifie $-\sqrt[3]{-u}$)

Solution : (3.6 - 6.6 - 7.2.3, b - 8.1 - 8.2 - 9.1)

- La fonction f est définie et continue sur $[-2, +2]$ (son expression, est celle d'une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$).
- f est dérivable sur tout intervalle de $[-2, -1[\cup]-1, +1[\cup]1, 2]$ (le radicande ne doit pas être nul),

$$\frac{d}{dx}(f(x))^3 = 3(f(x))^2 \times f'(x) = 2(x-1)(x+1) + (x-1)^2$$
$$= (x-1)(3x+1)$$

(en utilisant la convention de l'énoncé on trouve :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(3x+1)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2(x+1))^2}} = \frac{(x-1)(3x+1)}{3(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}}\Bigg);$$

$f'(x)$ a le même signe que $(x-1)(3x+1)$,

pour tout x de $\left[-2, -\frac{1}{3}\right[$ $\quad f'(x) > 0$, f croissante sur $\left[-2, -\frac{1}{3}\right[$,

pour tout x de $\left]-\frac{1}{3}, 1\right[$ $\quad f'(x) < 0$, f décroissante sur $\left]-\frac{1}{3}, 1\right[$,

pour tout x de $]1, 2]$ $\quad f'(x) > 0$, f croissante sur $]1, 2]$,

$f'(x)$ s'annule, en changeant de signe, pour $x = -\frac{1}{3}$, le point $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ est un extremum : maximum $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1{,}06$.

- $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \infty$

pour $x \to 1^+$ $\quad (x-1)^{\frac{1}{3}} \to 0^+$ et pour $x \to 1^-$ $\quad (x-1)^{\frac{1}{3}} \to 0^-$ donc

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty, \text{ et } \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$$

le point (1, 0) est un point de rebroussement.

- $f(-1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)}$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

le point (– 1, 0) est un point d'inflexion à tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

- $f(2) = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$ et le coefficient directeur de la demi-tangente à (C) au point d'arrêt $(2, f(2))$ est $f'(2) = \dfrac{7}{3(\sqrt[3]{3})^2} \approx 1{,}12$;

$f(-2) = -\sqrt[3]{9} \approx -2{,}08$ et le coefficient directeur de la demi-tangente à (C) au point d'arrêt $(-2, f(-2))$ est $f'(-2) = \dfrac{15}{3(-\sqrt[3]{9})^2} \approx 1{,}16$.

- $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{3}$, l'équation de la droite (T) est de la forme $y = -\dfrac{1}{3}x + b$; la droite (T) passe par le point (0, 1) donc $1 = b$ et l'équation de la droite (T) est $y = -\dfrac{1}{3}x + 1$. La droite (T) partage le plan en deux demi-plans, ainsi, par exemple, la courbe (C) est au-dessous de (T) si

$$-\frac{1}{3}x + 1 > \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3}x\right)^3 > (x-1)^2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27} > x^3 - x^2 - x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27} > x^3 - x^2,$$

c'est-à-dire puisque $x \neq 0$ (en zéro (T) est tangente à (C)),

$\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{27} > x - 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{9}{7}$, et donc en définitive :

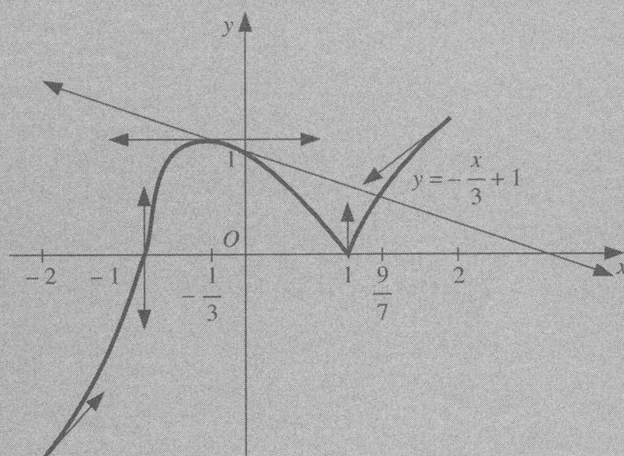
pour $x = 0$ (T) est tangente à (C),

pour $x = \dfrac{9}{7}$ il y a intersection entre (T) et (C),

pour $x \in [-2, 0[\cup \left]0, \dfrac{9}{7}\right[$ (T) est au-dessus de (C),

pour $x \in \left]\dfrac{9}{7}, 2\right]$ (T) est au-dessous de (C).

x	-2		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+2$
$f'(x)$	$f'(-2)$	$+$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	$f'(2)$
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(2)$



8. Fonctions logarithmes et exponentielles

8.1 Tests 1 à 16 chapitre 10

8.2 Résoudre l'inéquation (I) : $\ln (x+2)^3 - \ln x^3 > 9$.

Solution : (10.1.2 - 10.1.5 - 10.2.2)

Il faut $x > 0$ alors sur $]0, +\infty[$:

$$(I) \Leftrightarrow 3 \ln (x+2) - 3 \ln x > 9 \Leftrightarrow \ln (x+2) - \ln x > 3 \Leftrightarrow \ln \frac{x+2}{x} > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} > e^3 \Leftrightarrow x + 2 > x\,e^3 \Leftrightarrow 2 > x(e^3 - 1) \Leftrightarrow x < \frac{2}{e^3 - 1} \approx 0{,}1,$$

l'ensemble des solutions de (I) est $\left]-\infty, \frac{2}{e^3 - 1}\right[$

8.3 Résoudre les systèmes d'équations :

$$(S_1)\begin{cases} e^{x-1} \times e^{y-3} = 1 \\ \ln \dfrac{x}{2} + \ln 8y = \ln 12 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} \log_a b + 6 \log_b a = 7 \quad (A) \\ \qquad\qquad ab = 128 \quad (B) \end{cases}$$

Solution : (3.4 - 10.1 - 10.2 - 10.3)

- pour (S_1) il faut $x > 0$ et $y > 0$, alors :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y-4} = e^0 \\ \ln \dfrac{x}{2}\ 8y = \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 4xy = 12 \end{cases}$$

pour résoudre ce dernier système il suffit de démarquer l'exemple 5 du paragraphe **3.4** ; on trouve les couples solutions du type (x, y) : $(1, 3)$ et $(3, 1)$.

- pour (S_2) il faut $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, alors :

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{1}{\dfrac{\ln b}{\ln a}} = \frac{1}{\log_a b}$$ et l'équation (A) peut s'écrire,

$$\log_a b + \frac{6}{\log_a b} - 7 = 0 \Leftrightarrow (\log_a b)^2 - 7 \log_a b + 6 = 0 \text{ (puisque } \log_a b \neq 0\text{)};$$

on pose $X = \log_a b$, il vient : (A) $\Leftrightarrow X^2 - 7X + 6 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X - 6) = 0$ qui admet les solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = 6$; pour $X_1 = 1$, $\log_a b = 1$ donc $b = a$ et l'équation (B) s'écrit $a^2 = 128$ et $a = b = \sqrt{128}$ (solution positive) ; pour $X_2 = 6$, $\log_a b = 6 \Leftrightarrow b = a^6$ et l'équation (B) s'écrit $a = \sqrt[7]{128} = 2$ (solution positive) et $b = 2^6 = 64$.
En définitive, le système (S_2) admet les couples solutions du type (a, b) : $(\sqrt{128}, \sqrt{128})$ et $(2, 64)$.

8.4 Soit les fonctions f et g telles que :

$$f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{2x+2} \right| \quad \text{et} \quad g(x) = x^{\frac{1}{x}}\,;$$

déterminer f' et g'.

Solution : (10.1.2 - 10.2.3, b - 10.4)

- f est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\ln|x-2| - \ln|2x+2|) = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x+2}$$

$$= \frac{(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

- g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\right) e^{\frac{1}{x}\ln x} = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\right) x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) x^{\frac{1}{x}}$$

$$= (1 - \ln x) x^{\frac{1}{x} - 2} = (1 - \ln x) x^{\frac{1-2x}{x}}$$

8.5 Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln x}$; déterminer et étudier la fonction f prolongement par continuité de g en zéro.

Solution : (6.2.3 - 9.1 - 10.1)

- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, elle est continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$; $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ \text{et } f(0) = 0 \end{cases}$$

est donc un prolongement par continuité de g en zéro ; f est définie sur $\mathbb{R}_+ - \{1\}$, elle est continue sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

Remarque : le point (0,0) est ce qu'on appelle parfois un point limite de la courbe représentative de g.

- f est, d'une part dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et, d'autre part, puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$, elle est dérivable en zéro avec $f'(0) = 0$; f est donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+ - \{1\}$.

$$\text{Sur } \mathbb{R}_+^* - \{1\} \quad f'(x) = \frac{(\ln x)(2x) - (x^2)\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \frac{x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}\ ;\ f'(x) \text{ a le signe}$$

de $2 \ln x - 1$ qui s'annule quand $\ln x = \dfrac{1}{2}$ donc $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1{,}6$;

pour $x \in]0, 1[\cup]1, \sqrt{e}[$ $\quad f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, \sqrt{e}[$

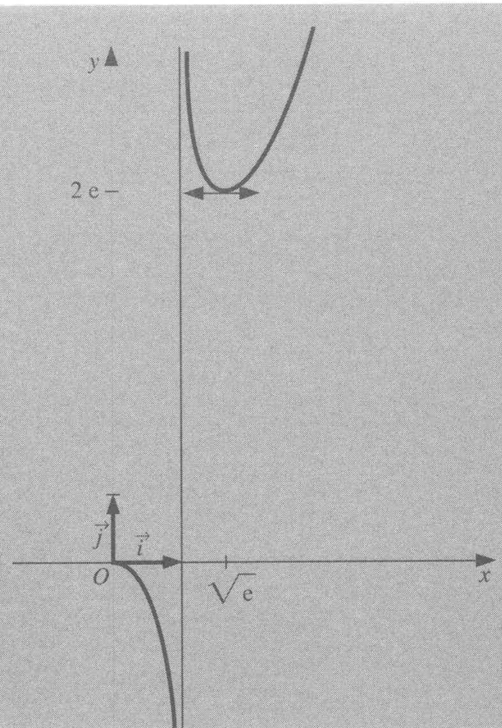
pour $x \in]\sqrt{e}, +\infty[$ $\quad f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]\sqrt{e}, +\infty[$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = \sqrt{e}$, les points $(0, f(0))$ et $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$ sont des points stationnaires ($f(0) = 0$ et $f(\sqrt{e}) = \dfrac{e}{\frac{1}{2}\ln e} = 2e$) ; d'après ses variations, f admet un maximum en zéro (point d'arrêt de sa courbe représentative) et un minimum en $\sqrt{e}$.

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ la courbe représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation $x = 1$, (si $x \to 1^+$ $\ln x \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$ et si $x \to 1^-$ $\ln x \to 0^-$ $f(x) \to -\infty$).

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ $\left(\text{de la forme } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x}\right)$, la courbe représentative de f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées pour x tend vers $+\infty$.

x	0		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\vec{0}$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2e$	↗	$+\infty$



8.6 Étudier la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)^2 - 2$

Solution : (9.1 - 10.2)

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut écrire

$$f(x) = e^{-2x}(x+1)^2 - 2.$$

- $f'(x) = (e^{-2x})(2x+2) + (-2\,e^{-2x})(x+1)^2 = e^{-2x}(2x + 2 - 2x^2 - 4x - 2)$
$= -2\,e^{-2x}(x^2 + x)$;

$f'(x)$ a le même signe que $-x(x+1)$:

pour $x \in\ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]0, +\infty[$ $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$,

pour $x \in\ ]-1, 0[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-1, 0[$;

$f'(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = -1$ et pour $x = 0$, donc, d'après ses variations, f admet un minimum égal à $f(-1) = -2$ et un maximum égal à $f(0) = -1$.

$$\lim_{x \to \infty} (e^{-2x}(x+1)^2) = \lim_{x \to \infty} e^{-2x} x^2 = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 \text{ donc :}$$

pour $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{x}{e^x} \to 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe représentative de f ;

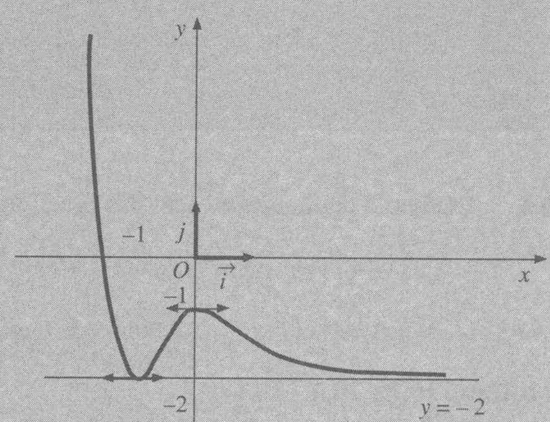
pour $x \to -\infty$ $\quad e^x \to 0$,

$$\frac{x}{e^x} \to \infty \qquad \frac{2}{x} \to 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{2\,e^{2x}} - 2\right) = +\infty$$

et $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}} - \frac{2}{x}\right) = \infty,$$

la courbe représentative de f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2



Remarque : f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut obtenir $f''(x) = 2\,e^{-2x}(2x^2 - 1)$, la courbe représentative de f admet des points d'inflexion en $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8.7 Soit dans un repère orthogonal la courbe (C) d'équation

$$y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

déterminer pour x infini l'équation des droites asymptotes à la courbe (C).

Solution : (5.6.1 - 8.3.3,*c* - 10.1 - 10.2)

La fonction $f : x \mapsto \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln (e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln (e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 \\ &= \ln e^x + \ln (1 + e^{-2x}) - \ln 2 \\ &= x - \ln 2 + \ln (1 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

donc $f(x) - (x - \ln 2) = \ln (1 + e^{-2x})$

- Si $x \to +\infty$:

  $$e^{-2x} \to 0^+ \quad (1 + e^{-2x}) \to 1^+ \quad \ln (1 + e^{-2x}) \to 0^+ \text{ donc,}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x - \ln 2)) = 0^+,$$

  la droite d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à la courbe (C) (la courbe est au-dessus de l'asymptote).

- Si $x \to -\infty$:

  pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(-x) = \ln \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$, f est paire sur $\mathbb{R}$; sa courbe représentative, dans un repère orthogonal, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : la droite d'équation $y = -x - \ln 2$ est donc asymptote à la courbe (C) (la courbe est au-dessus de l'asymptote).

8.8 Étudier la continuité en zéro des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0,$$

$$g(x) = (|x|)^{x^2} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$

Solution : (6.1 - 10.4 - 10.5)

- Si $x \to 0^+$ $\quad -\dfrac{1}{x} \to -\infty \quad e^{-\frac{1}{x}} \to 0 \quad \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \to 1 \quad f(x) \to 0$

  Si $x \to 0^-$ $\quad -\dfrac{1}{x} \to +\infty \quad e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty \quad \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \to 1 \quad f(x) \to +\infty$

  on a donc :

  $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0)$, f est continue à droite en zéro,

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$, f n'est pas continue à gauche en zéro ;

en définitive, la fonction f n'est pas continue en zéro.

- Si $x \neq 0$ $g(x) = e^{x^2 \ln|x|}$ et si $x \to 0$ $x^2 \ln|x| \to 0$ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = e^0 = 1 = g(0)$; la fonction g est continue en zéro.

9. Suites arithmétiques et suites géométriques

9.1 Tests 1 à 9 chapitre 11

9.2 Démontrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Solution : (11.1.2)

- La formule à démontrer est vraie pour $n = 1$, en effet $S_1 = 1 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$
- On suppose la formule vraie pour $n = i$, donc on suppose que $S_i = \dfrac{i^2(i+1)^2}{4}$;

$$S_{i+1} = 1^3 + 2^3 + ... + i^3 + (1+i)^3 = S_i + (1+i)^3$$

donc, avec l'hypothèse pour S_i, on a :

$$S_{i+1} = \frac{i^2(i+1)^2}{4} + (1+i)^3 = \frac{(1+i)^2(i^2 + 4(1+i))}{4}$$

$$= \frac{(1+i)^2(i^2+4i+4)}{4} = \frac{(i+1)^2(i+2)^2}{4};$$

on en conclut que si la formule est vraie pour $n = i$, elle est vraie pour $n = i + 1$.

- Les résultats obtenus ci-dessus (formule vraie pour $n = 1$ et formule vraie pour $n = i + 1$ dès qu'elle est vraie pour $n = i$) permettent de conclure, de proche en proche, que la formule est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

9.3 Trouver le dixième terme et la somme S des dix premiers termes d'une progression de raison 5 et de premier terme 2 :

1) Quand cette progression est une suite arithmétique.
2) Quand cette progression est une suite géométrique.

Solution : (11.2 ; 11.3)

1) Avec les notations du paragraphe **11.2** :

$u_0 = 2 \quad d = 5 \quad$ le dixième terme est u_9, on a donc :

$$u_9 = 2 + 9 \times 5 = 47 \quad \text{et} \quad S = \frac{10}{2}\,(2 + 47) = 245$$

2) Avec les notations du paragraphe **11.3** :

$u_0 = 2 \quad r = 5 \quad$ le dixième terme est u_9, on a donc :

$$u_9 = 2 \times 5^9 = 3\,906\,250 \quad \text{et} \quad S = 2\,\frac{5^{10} - 1}{5 - 1} = 4\,882\,812$$

9.4 Une entreprise a produit 500 unités la première année et 2 300 unités pendant les quatre premières années de son activité ; de combien d'unités la production a-t-elle augmenté en moyenne chaque année ?

Solution : (11.2)

On suppose que la production a augmenté, chaque année, du même nombre d'unités : il s'agit de trouver la raison d d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 500$ et dont la somme des quatre premiers termes est $S = 2\,300$.
Si u_3 est la production de la quatrième année, on a :

$$2\,300 = S = \frac{4}{2}\,(500 + u_3)$$

donc $u_3 = \dfrac{2\,300 - 1\,000}{2} = 650$ unités et donc $650 = u_3 = 500 + 3d$ d'où on tire

$$d = \frac{650 - 500}{3} = 50 \text{ unités.}$$

9.5 La population d'une ville est de 100 000 habitants à une date donnée ; elle croît de 3 % par an, quel est le nombre d'habitants, cinq ans plus tard ?

Solution : (11.3)

Il s'agit de trouver le cinquième terme u_4 d'une suite géométrique de raison $r = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$ et de premier terme $u_0 = 100\,000$, on obtient :

$$u_4 = 100\,000\,(1{,}03)^4 \approx 112\,550 \text{ habitants.}$$

9.6 Déterminer les cinq réels a, b, x, y, z sachant que ces cinq nombres sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que :

$$a + b + x + y + z = 10 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 270.$$

Solution : (11.2)

Soit d la raison de la suite arithmétique cherchée, on a :

$a = x - 2d, \quad b = x - d, \quad y = x + d, \quad z = x + 2d \quad$ et $\quad a + b + x + y + z = 5x = 10$

donc $x = 2$, de même,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= (x - 2d)^2 + (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 \\ &= x^2 - 4d + 4d^2 + x^2 - 2d + d^2 + x^2 + x^2 \\ &\qquad + 2d + d^2 + x^2 + 4d + 4d^2 \\ &= 5x^2 + 10d^2 = 270 \end{aligned}$$

d'où on tire, pour $x = 2$, $d^2 = 25$; on peut donc avoir soit $d = 5$ soit $d = -5$ et deux suites arithmétiques répondent à la question :

pour $d = 5$ on a $(a, b, x, y, z) = (-8, -3, 2, 7, 12)$

pour $d = -5$ on a $(a, b, x, y, z) = (12, 7, 2, -3, -8)$

Remarque : il était prévisible qu'on trouverait deux suites pour solution ; en effet, il est toujours possible d'associer deux raisons à une suite arithmétique finie.

9.7 Soit la série de transactions suivante : un individu $n - 1$ verse une somme u_n à un individu n, l'individu n verse alors les deux-tiers de u_n à un individu $n + 1$, etc. (chaque individu dépense 66,66... % de ce qu'il perçoit). Au début du processus, l'individu 1 verse 1 460 francs à l'individu 2 ; quelle sera la somme perçue par l'individu 15 et quel aura été, alors, le montant monétaire total S des transactions ? Si on imagine que le processus peut durer indéfiniment, que devient S ?

Solution : (11.3)

Les versements successifs sont les termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1\,460$ et de raison $\dfrac{2}{3}$

- La somme u_{15} perçue par l'individu 15 est le quinzième terme de la suite (u_n) :

$$u_{15} = u_1\left(\frac{2}{3}\right)^{14} = 1\,460\left(\frac{2}{3}\right)^{14} \approx 5 \text{ francs.}$$

- S est la somme des quinze premiers termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$S = u_1 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{15}}{1-\frac{2}{3}} = 1\,460 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{15}}{1-\frac{2}{3}} \approx 4\,370 \text{ francs.}$$

(il y a eu 14 transactions).

- Pour n transactions : $S = 1\,460 \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$; si le processus dure indéfiniment, on a :

$$n \to +\infty \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \to 0 \quad S \to \frac{1\,460}{1-\frac{2}{3}} = 4\,380 \text{ francs.}$$

(voir la remarque du paragraphe **11.3.3**).

9.8 Pour un achat à crédit, deux contrats prévoient chacun un premier versement de 12 000 francs et dix versements annuels :

- dans le contrat n° 1, les versements augmentent chaque année de 6 % ;
- dans le contrat n° 2, les versements augmentent chaque année de 850 francs.

Calculer le montant du dernier versement et la somme totale S payée à l'issue de chaque contrat.

Solution : (11.2 - 11.3)

Pour chacun des contrats, le dernier versement est le dixième terme u_9 d'une suite de premier terme $u_0 = 12\,000$ et S est la somme des dix premiers termes consécutifs de cette suite.

- Pour le contrat n° 1, les versements sont les termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{6}{100} = 0{,}06$, on a donc :

$$u_9 = 12\,000\,(1{,}06)^9 \approx 20\,273{,}75 \text{ francs}$$

et $$S = 12\,000 \frac{(1{,}06)^{10} - 1}{1{,}06 - 1} \approx 158\,169{,}54 \text{ francs.}$$

- Pour le contrat n° 2, les versements sont les termes d'une suite arithmétique de raison 850, on a donc :

$$u_9 = 12\,000 + 9 \times 850 = 19\,650 \text{ francs}$$

et $$S = \frac{10}{2}\,(12\,000 + 19\,650) = 158\,250 \text{ francs.}$$

10. Calcul intégral

10.1 Tests 8 et 9 chapitre 7

10.2 Tests 1 à 10 chapitre 12

10.3 Déterminer la primitive F, qui prend la valeur $\frac{2}{3}$ pour $x = 0$, de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$

Solution : (7.3 - 12.4.1)

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$;
si $u(x) = x^2 + x + 1$ $f(x) = u'(x)(u(x))^{-4}$ donc :

$$F(x) = \frac{(u(x))^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3(x^2+x+1)^3} + c,$$

on a $F(0) = -\frac{1}{3} + c$ or $F(0) = \frac{2}{3}$ donc $c = 1$ et, en définitive :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{3(x^2+x+1)^3}$$

10.4 Sur R_+^*, déterminer la primitive F, qui prend la valeur 2 pour $x = 9$ de la fonction $f : x \mapsto x^3\sqrt{x}$.

Solution : (2.6.1 - 7.3 - 12.4.1 - 12.4.2)

Sur R_+^*, f est définie et continue et on peut écrire :

$$f(x) = x^3\sqrt{x} = 2x^3 \frac{x}{2\sqrt{x}} = 2x^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})^8 \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

si on pose $u(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = 2(u(x))^8 \times u'(x)$ d'où :

$$F(x) = 2\frac{(u(x))^9}{9} + c = \frac{2}{9}(\sqrt{x})^9 + c = \frac{2}{9}x^4\sqrt{x} + c$$

on a $F(9) = \frac{2}{9} 9^4 \sqrt{9} + c = 4\,374 + c$ or $F(9) = 2$ donc $c = -4\,372$ et, en définitive :

$$F(x) = \frac{2x^4\sqrt{x}}{9} - 4\,372$$

Remarque 1 : le procédé peut être généralisé, pour déterminer $\int x^n \sqrt{x}\, dx$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$x^n \sqrt{x} = 2x^{n+1} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})^{2n+2} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

donc,

$$\int x^n \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{2n+3} (\sqrt{x})^{2n+3} + c = \frac{2}{2n+3}\, x^{n+1} \sqrt{x} + c.$$

Remarque 2 : pour déterminer $\int x^3 \sqrt{x}\, dx$ sur $\mathbb{R}_+^*$ il est possible d'utiliser l'intégration par parties :

si $u(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = x^3$ on a $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v(x) = \dfrac{x^4}{4}$, on obtient :

$$\int x^3 \sqrt{x}\, dx = \int u(x)\ v'(x)\, dx = u(x)\ v(x) - \int v(x)\ u'(x)\, dx$$

$$= \frac{x^4 \sqrt{x}}{4} - \int \frac{x^4\, dx}{8\sqrt{x}} = \frac{x^4\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{8}\int x^3 \sqrt{x}\, dx,$$

cette égalité peut s'écrire :

$$\int x^3 \sqrt{x}\, dx + \frac{1}{8}\int x^3 \sqrt{x}\, dx = \frac{x^4\sqrt{x}}{4}$$

c'est-à-dire : $\dfrac{9}{8}\displaystyle\int x^3 \sqrt{x}\, dx = \dfrac{x^4\sqrt{x}}{4}$ d'où on tire :

$$\int x^3 \sqrt{x}\, dx = \frac{2x^4\sqrt{x}}{9} + c$$

(le procédé est évidemment généralisable et permet de déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\int x^n \sqrt{x}\, dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$).

10.5 Déterminer $\displaystyle\int \frac{2x^4 - x - 4}{(x-1)^2}\, dx$

Solution : (4.4.2 - 12.2.2 - 12.4.1)

La fonction $x \mapsto \dfrac{2x^4 - x - 4}{(x-1)^2}$ est définie et continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ et par division euclidienne, on obtient :

$$\frac{2x^4 - x - 4}{(x-1)^2} = 2x^2 + 4x + 6 + \frac{7x - 10}{(x-1)^2}$$

(pour effectuer cette division de $2x^4 - x - 4$ par $x^2 - 2x + 1$ on peut démarquer la division du paragraphe **4.4.2** ou celle de l'exercice **6.5**)
Sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R} - \{1\}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 - x - 4}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(2x^2 + 4x + 6 + \frac{7x - 10}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int (2x^2 + 4x + 6)\,\mathrm{d}x + \frac{7}{2}\int \frac{2x-2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x + \frac{7}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + c\end{aligned}$$

10.6 Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm (f a été étudiée au paragraphe **9.2.2.**).

1) Calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Déterminer l'aire des domaines A et B délimités par la courbe (C), l'axe des abscisses et par :

a) les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ pour A ;

b) les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour B.

Solution : (12.2.1 - 12.3.1 - 12.4.1)

1) Sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ la fonction f est définie et continue ; puisque f est impaire sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2) *a*) Puisque f est une fonction continue et impaire sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, l'aire du domaine A est égale à :

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{puisque pour tout } x \text{ de } \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ on a } f(x) \geqslant 0.$$

Si $u(x)=\sqrt{1-x^2}$ $f(x)=-\frac{1}{2}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{2}}$, une primitive de f est donc F définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{(u(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$; l'aire du domaine A est donc :

$$2[F(x)]_0^{\frac{1}{2}}=2\left(F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)\right)=2\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right)\approx 0{,}23\text{ cm}^2.$$

b) Sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ la fonction f est définie et continue ; pour $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ on a $f(x)\leqslant 0$ et pour $x\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ on a $f(x)\geqslant 0$, l'aire du domaine B est donc :

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}f(x)\,dx;$$

la fonction F telle que $F(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$, est une primitive de f sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, l'aire du domaine B est donc en définitive :

$$-[F(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0}+[F(x)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=F\left(-\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2F(0)$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}+\frac{2}{3}\approx 0{,}41\text{ cm}^2.$$

10.7 Dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ où $\|\vec{i}\|=3$ mm et $\|\vec{j}\|=5$ cm, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par les courbes d'équation $y=(x-1)\,e^{2x}$ et $y=-x^2\ln x$ dans l'intervalle $[1, 3]$.

Solution : (12.1.3 - 12.3.2 - 12.4.2)

Soit A l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$ (calculer A en unités d'aire revient à traiter le problème avec un repère orthonormé).

Sur $[1, 3]$ les fonctions $f: x\mapsto(x-1)\,e^{2x}$ et $g: x\mapsto -x^2\ln x$ sont définies et continues ; pour $x\in[1,3]$ $f(x)\geqslant 0$ et $g(x)\leqslant 0$ donc $f(x)\geqslant g(x)$, on a donc :

$$A = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 f(x)\, dx - \int_1^3 g(x)\, dx$$

$$= \int_1^3 (x-1)\, e^{2x}\, dx + \int_1^3 x^2 \ln x\, dx$$

On détermine $\int f(x)\, dx$ et $\int g(x)\, dx$ en utilisant l'intégration par parties.

- Sur $\mathbb{R}$, si $u(x) = (x-1)$ et $v'(x) = e^{2x}$

  on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$, alors :

$$\int f(x)\, dx = \int u(x) v'(x)\, dx = u(x)\ v(x) - \int v(x)\ u'(x)\, dx$$

$$= \frac{e^{2x}(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx$$

$$= \frac{e^{2x}(x-1)}{2} - \frac{1}{4}\ e^{2x} + c = \frac{e^{2x}}{4}\ (2x-3) + c,$$

donc $\displaystyle\int_1^3 (x-1)\, e^{2x}\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{4}\ (2x-3)\right]_1^3 = \frac{3\, e^6 + e^2}{4}$

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, si $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$

  on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$, alors :

$$-\int g(x)\, dx = \int u(x) v'(x)\, dx = u(x) \times v(x) - \int v(x)\, .\, u'(x)\, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{9}\ (3 \ln x - 1) + c$$

donc $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{9}\ (3 \ln x - 1)\right]_1^3$

$$= 3(3 \ln 3 - 1) - \frac{1}{9}\ (3 \ln 1 - 1)$$

$$= 9 \ln 3 - 3 + \frac{1}{9} = 9 \ln 3 - \frac{26}{9}$$

- En définitive :

$$A = \frac{3\,e^6 + e^2}{4} + 9 \ln 3 - \frac{26}{9} \approx 311{,}42 \text{ unités d'aire ;}$$

l'unité d'aire vaut $0{,}3 \times 5 = 1{,}5$ cm^2, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ mesurée en cm^2 est donc :

$$A \times 1{,}5 \approx 467{,}13 \text{ cm}^2.$$

Bibliographie

De très nombreux manuels à l'usage des lycéens ou des étudiants des premiers cycles universitaires, tant scientifiques que d'économie et gestion, ont été consultés pour la conception de cet ouvrage. Le choix est vaste ; il présente des approches multiples et des niveaux plus ou moins élevés.

Pour éviter à l'étudiant de se perdre dans un dédale de références bibliographiques, nous indiquons, ci-dessous, quelques titres en regrettant de ne pouvoir être exhaustif.

Le lecteur désireux de compléter son programme de révision peut se reporter aux manuels des classes de seconde, première et terminale B, voire C ; les livres de la collection « Fractale », publiés par les Éditions Bordas, en sont des exemples.

Le lecteur désireux de prolonger son étude des mathématiques pour économistes peut consulter, par exemple, les ouvrages suivants :

- Gabriel ARCHINARD et Bernard GUERRIEN, *Principes mathématiques pour économistes,* Economica, Paris, 1992.
- Marie BOISSONNADE et Daniel FREDON, *Analyse mathématique pour les sciences économiques* (2 tomes), Armand Colin, Paris, 2e édition, 1992.
- D. CHARLOT et A. DROGUET, *Précis de mathématiques, HEC option économie, Algèbre et analyse,* (2 tomes), Bréal, Paris, 1991.
- Edward T. DOWLING, *Mathématiques pour l'économiste,* McGraw-Hill, Paris, 1990.
- Bernard DUPONT, *Algèbre pour les sciences économiques,* Armand Colin, Paris, 2e édition, 1991.
- Bernard GUERRIEN (sous la direction de), *Annales corrigées du DEUG de sciences économiques 1992, Mathématiques,* Dunod, Paris, 1992.
- Bernard GUERRIEN, *Algèbre linéaire pour économistes,* Economica, Paris, 3e édition, 1991.
- Alain PLANCHE, *Mathématiques pour économistes, Algèbre,* Dunod, Paris, 1992.

Index alphabétique

045042-(I)-(0.8)-OSB 100°-NOU

STEDI, 1, boulevard Ney, 75018 Paris - Tél. 01.40.38.65.40
Dépôt légal, Imprimeur, n° 6430
Dépôt légal : mars 2000

Imprimé en France

Dépôt légal 1re édition : 2e trimestre 1993

ÉCO SUP

Jean-Louis Sol

MATHÉMATIQUES

Accès à l'université

MANUEL

Avoir le niveau en maths : tel est le principal souci de la plupart des étudiants qui s'inscrivent en DEUG Économie-gestion, AES ou MASS.

Cet ouvrage a précisément pour objectif de les aider à acquérir le niveau minimum qui leur permettra de suivre pendant l'année (attention au contrôle continu !) et de réussir leur examen.

Accessible à tous les étudiants – et notamment à ceux qui viennent d'obtenir le bac ES –, il leur offre la possibilité de réviser seuls le programme du lycée qu'il faut absolument maîtriser pour réussir en première année. Il propose en effet un plan de révision en trois parties :

– la première, composée de questions et de tests, permet à l'étudiant d'évaluer son niveau ;
– la deuxième lui présente un cours complet pour combler ses lacunes ou acquérir des connaissances ;
– la troisième le pousse à s'entraîner grâce à de nombreux exercices corrigés de façon détaillée ; chaque exercice renvoie en outre à des paragraphes du cours.

Ces trois parties peuvent être utilisées indépendamment : l'ouvrage s'adapte ainsi au lecteur pour lui présenter les révisions du secondaire et les bases qui lui seront nécessaires dans le supérieur.

JEAN-LOUIS SOL
enseigne les mathématiques à l'université Montpellier I (UFR de sciences économiques).

▸ DEUG Économie-gestion, AES, MASS

9 782100 050420
ISBN 2 10 005042 7
Code 045042

http://www.dunod.com

DUNOD